

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Горно-Алтайский государственный университет»

На правах рукописи

Богданова Рада Александровна

**Аналитические методы исследования
некоторых феноменологически симметричных
двумерных и трехмерных геометрий**

01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Г.Г. Михайличенко

Горно-Алтайск – 2019

Оглавление

Основные обозначения	5
Введение	6
1 Основные определения	29
1.1 Феноменологическая симметрия в геометрии	29
1.2 Групповая симметрия в геометрии	35
1.3 Эквивалентность групповой и феноменологической симметрий в геометрии	38
1.4 Пример: плоскость Евклида	40
1.5 Методы классификации феноменологически симметричных геометрий и анализ полученных результатов	44
2 Аналитические методы определения групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий	48
2.1 Феноменологически симметричные двумерные геометрии и их классификация	49
2.2 Функциональное уравнение для определения полной группы движений	55
2.3 Решение функционального уравнения для определения полной группы движений плоскости Гельмгольца	57

2.4	Решение функциональных уравнений для определения полных групп движений псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей	63
2.5	Решение функционального уравнения для определения полной группы движений обобщенной симплициальной плоскости	72
2.6	Метрическая функция как двухточечный инвариант группы движений	76
3	Группы движений некоторых феноменологически симметричных трехмерных геометрий	86
3.1	Феноменологически симметричные трехмерные геометрии и их классификация	86
3.2	Алгебры Ли групп движений симплициальных и гельмгольцевых трехмерных геометрий	93
3.3	Группы движений симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой трехмерных геометрий	96
3.4	Группы движений гельмгольцевой и симплициальной III типа трехмерных геометрий	103
3.5	Группы движений симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий	108
4	Аналитический метод классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий	116
4.1	Определение двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий	116
4.2	Исследование ранга систем функционально-дифференциальных соотношений и решение возникающих из них систем дифференциальных уравнений	122

4.3	Анализ полученных результатов классификации на эквивалентность	133
4.4	Группы движений и их двухточечные инварианты	138
	Заключение	145
	Литература	147

Основные обозначения

$\mathfrak{M}_{sn}$	sn –мерное многообразие;
i, j, k	точки многообразия $\mathfrak{M}_{sn}$;
$x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{sn}$	локальные координаты точки $i \in \mathfrak{M}_{sn}$;
$U(i)$	окрестность точки i ;
$f(i, j), \lambda(i)$ и т.п.	сокращенные обозначения некоторых функций $f(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{sn}, x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^{sn}),$ $\lambda(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{sn})$ и т.п.;
$\frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i^1}$	частная производная функции $f(x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{sn}, x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^{sn})$ по координате x_i^1 .

Уточним приведенные выше обозначения для случаев $n = 1, s = 2$ и $n = 2, s = 1$:

$\mathfrak{M}_2$	двумерное многообразие;
x_i, y_i	локальные координаты точки $i \in \mathfrak{M}_2$;
$f(i, j), \lambda(i)$ и т.п.	некоторые функции соответственно $f(x_i, y_i, x_j, y_j), \lambda(x_i, y_i)$ и т.п.;
$\frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i}$	частная производная функции $f(x_i, y_i, x_j, y_j)$ по координате x_i ;
$\lambda_x(i), \lambda_y(i)$ и т.п.	соответственно частные производные функции $\lambda(x_i, y_i)$ по координатам x_i, y_i , то есть $\partial \lambda(x_i, y_i) / \partial x_i, \quad \partial \lambda(x_i, y_i) / \partial y_i$.

Эти обозначения приведены по работе [43] и монографиям [44], [46] Г.Г. Михайличенко, которые способствуют большей краткости в изложении и записи формул.

Введение

Актуальность темы. Диссертация посвящена: разработке аналитического метода классификации феноменологически симметричных геометрий (геометрий максимальной подвижности) и его применению к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий, которая ранее была построена Г.Г. Михайличенко групповым методом [41, 45]; разработке аналитических методов решения функциональных уравнений для нахождения полных групп движений трех гельмгольцевых и симплицальной двумерных геометрий; определению всех невырожденных двухточечных инвариантов найденных групп движений этих двумерных геометрий; нахождению ранее неизвестных явных выражений групп движений симплицальной II типа и псевдогельмгольцевой, гельмгольцевой и симплицальной III типа, симплицальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий максимальной подвижности. Только для одной из четырех двумерных геометрий, а именно дуальногельмгольцевой плоскости, в диссертации Г.Г. Михайличенко [40] проведено доказательство теоремы о группе движений, в которое было введено сильное дополнительное условие. Это условие не позволяет утверждать, что найденная группа движений полна. Исследования двумерных гельмгольцевых геометрий проводились В.А. Кыровым. В работе [23] он только приводит группы их движений, которые использует для построения дифференциальной геометрии двумерных гельмгольцевых многообразий.

Основными методами классификации феноменологически симметричных геометрий являются групповой и аналитический, которые были предложены Г.Г. Михайличенко (см. [43], [34]).

Групповой метод классификации феноменологически симметрич-

ных геометрий состоит в нахождении локальных групп Ли преобразований многообразия (см. [36], [39], [42]) и их невырожденных двухточечных инвариантов, которые рассматриваются как метрические функции. Однако с ростом размерности многообразия, числа компонент метрической функции и ранга феноменологической симметрии предварительное проведение классификации групп преобразований становится технически очень сложным.

Аналитический метод классификации феноменологически симметричных геометрий состоит в получении функционально-дифференциальных соотношений и систем дифференциальных уравнений из анализа строения и ранга соответствующей функциональной матрицы.

В настоящее время В.А. Кыровым разрабатывается новый метод классификации, опирающийся на представление о вложении (см. [27], [28]), справедливость которого подтверждается, например, сопоставлением классификаций двумерных и трехмерных феноменологически симметричных геометрий (см. работы Г.Г. Михайличенко [46] и В.Х. Лева [31]).

Необходимость применения разных методов классификации феноменологически симметричных геометрий является существенной, поскольку их применение позволяет судить о полноте и надежности полученных ранее результатов. Эти соображения естественно привели автора к следующей задаче: разработать аналитический метод классификации, который позволит уточнить или подтвердить классификацию двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий.

К настоящему времени построены полные классификации одномерных, двумерных и трехмерных феноменологически симметричных геометрий, а также двуметрических, триметрических и четырехметрических феноменологически симметричных геометрий (см. рабо-

ты Г.Г. Михайличенко [41], [43], [35], [45], В.Х. Лева [31], В.А. Кырова [24]). Классификации других феноменологически симметричных геометрий еще не построены, так как не найдены более эффективные методы решения подобных задач.

Классификация и исследование феноменологически симметричных геометрий является основной задачей теории физических структур. Полученные результаты используются в теоретической физике для обоснования размерности и сигнатуры пространства-времени, развития нового подхода к описанию физических взаимодействий и их объединения, формулировки нового взгляда на спинорные свойства элементарных частиц (см. [8], [9], [10]).

Феноменологически симметричные геометрии представляют собой синтез двух классических подходов к построению геометрии: группового и метрического, которые на протяжении многих десятилетий (начиная с работ Г. Гельмгольца, Ф. Клейна, А. Пуанкаре, С. Ли, А. Кэли и др.) являются предметом исследования в теории функций, представлений групп Ли, римановой геометрии и других разделов математики. На *феноменологическую симметрию* особое внимание обратил Ю.И. Кулаков [18]. Сущность феноменологической симметрии состоит в том, что между всеми взаимными расстояниями для некоторого конечного числа точек пространства имеется функциональная связь (см. [3], [53], [21]). Первоначально феноменологическая симметрия как принцип была установлена при анализе строения второго закона Ньютона в механике и закона Ома в электродинамике (см. [17], [20]), а затем перенесена в геометрию.

Начиная с 60-ых годов XX века наряду с такими направлениями как геометрия расстояний (представленным в фундаментальных трудах Н. Busemann [54], Н. Busemann и В.В. Phadke [55], А.Д. Александрова, В.Н. Берестовского и И.Г. Николаева [1],

В.Н. Берестовского [4], L.M. Blumenthal [53], Ю.Г. Решетняка [52], Ю.Д. Бураго [6], А. Papadopoulos [59], М. Bridson и А. Haefliger [56] и их учеников), геометрия максимальной подвижности (представленным в работах Д.В. Алексеевского, Э.Б. Винберга, А.С. Солодовникова [2]), появилась феноменологически симметричная геометрия в рамках более общей концепции – теории физических структур [19], [17], которая в настоящее время активно развивается Новосибирской (Ю.И. Кулаков, А.А. Симонов и др.), Горно-Алтайской (Г.Г. Михайличенко, В.А. Кыров и др.) и Московской (Ю.С. Владимиров, А.В. Карнаухов и др.) научными школами. Метрические (К. Менгер, L.M. Blumenthal [53]) и групповые (Г. Гельмгольц [11], Ф. Клейн [15], А. Пуанкаре [51]) задания геометрии оказались эквивалентными, что установлено Г.Г. Михайличенко и отмечено G.P. Wene в их работах [37] и [60]. Действительно, *феноменологически симметричные геометрии* являются *геометриями максимальной подвижности*, наделены групповой симметрией, лежащей в основе "Эрлангенской программы" Ф. Клейна [15].

Заметим, что в работах по геометрии расстояний (см., например, L.M. Blumenthal [53]) феноменологическая симметрия задавалась известными уравнениями связи в отличие от принципа феноменологической симметрии теории Ю.И. Кулакова [21], в котором предполагалось только их существование.

Феноменологически симметричные геометрии ранга $m = n + 2$ (см. монографию Михайличенко Г.Г. [47], §1) строятся на гладком sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$. Точки этого многообразия удобно, в целях сокращения записи, обозначать строчными буквами латинского алфавита: i, j, k и т.д. Например, в частности, при $s = 1, n = 2$ текущая точка $i \in \mathfrak{M}_2$ задается локальными координатами x_i, y_i . В основе построения геометрии лежит отображение $f : \mathfrak{S}_f \rightarrow R^s$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$, сопоставляющее

паре точек s действительных чисел. Отображение f , как функция пары точек, называется *метрической функцией*. Эта функция, в отличие от обычной метрики, удовлетворяет только естественным математическим требованиям гладкости, невырожденности и определенности почти всюду в $\mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$. В частном случае, при $s = 2, n = 1$, эта функция двухкомпонентная — вектор-функция, а геометрия, задаваемая ею, называется *двуметрической*.

Одним из определяющих свойств *метрической функции* является ее инвариантность относительно некоторой группы Ли преобразований [48] исходного многообразия. Действительно, по этой функции, решая соответствующее *функциональное уравнение* в рамках аналитического подхода, можно найти локальную группу движений, относительно которой она является двухточечным инвариантом.

В числе важнейших понятий теории отметим *ранг феноменологической симметрии*: это то конечное число точек пространства, для которых все взаимные "расстояния" связаны некоторым уравнением.

В работе "О фактах, лежащих в основании геометрии" [11] Г. Гельмгольц предположил, что двухточечная (метрическая) функция двумерной геометрии не может быть произвольной, если твердое тело в своем движении имеет три степени свободы. Но в таком случае между шестью взаимными расстояниями для четырех точек i, j, k, l должна существовать функциональная связь. Поэтому естественно было предположить, что и феноменологическая симметрия двумерной геометрии невозможна при произвольной метрической функции. Этот факт был установлен Г.Г. Михайличенко (см. [35], [57]). Заметим еще, что задачу определения всех двумерных геометрий, в которых положение фигуры задается тремя условиями, впервые четко сформулировал А. Пуанкаре в работе "Об основных гипотезах геометрии" [51].

В качестве примера приведем плоскость Евклида. Известно, что в ПДСК (x, y) квадрат расстояния $\rho(i, j)$ между двумя ее точками $i = (x_i, y_i)$ и $j = (x_j, y_j)$ задается метрической функцией

$$f(i, j) = \rho^2(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2.$$

Возьмем четыре точки i, j, k, l и запишем шесть значений метрической функции: $f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(j, k), f(j, l), f(k, l)$. Хорошо известно [3], что они функционально связаны, обращая в нуль определитель Кэли-Менгера пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(i, j) & f(i, k) & f(i, l) \\ 1 & f(i, j) & 0 & f(j, k) & f(j, l) \\ 1 & f(i, k) & f(j, k) & 0 & f(k, l) \\ 1 & f(i, l) & f(j, l) & f(k, l) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Геометрический смысл этой связи состоит в том, что трехмерный объем тетраэдра с вершинами, лежащими на двумерной плоскости, равен нулю. По терминологии Ю.И. Кулакова [18] она выражает феноменологическую симметрию ранга 4 плоскости Евклида.

По метрической функции плоскости Евклида можно найти группу движений (см. § 1.4 первой главы), для которой она является двухточечным инвариантом.

Цель работы состоит в исследовании аналитическими методами проблем классификации, решения функциональных уравнений для нахождения полных групп движений и всех их невырожденных двухточечных инвариантов некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий, а также определения явных выражений групп движений некоторых феноменологически симметричных трехмерных геометрий.

Основные результаты диссертации:

1. Разработаны аналитические методы решения функциональных уравнений на множество всех движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и симплицальной плоскостей, устанавливающие полноту групп движений этих геометрий без дополнительного условия о совпадении функций, задающих движение в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ разных точек i и j .
2. Установлена связь метрической функции и системы всех невырожденных двухточечных инвариантов групп движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и симплицальной плоскостей.
3. Найдены явные выражения групп движений симплицальной II типа и псевдогельмгольцевой, гельмгольцевой и симплицальной III типа, симплицальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий.
4. Разработан аналитический метод классификации, примененный к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий, существенно использующий исследование строения и ранга соответствующей функциональной матрицы, а также возникающих из нее систем функционально-дифференциальных соотношений и дифференциальных уравнений.

Методы исследований. Результаты диссертации получены применением методов теории функциональных и дифференциальных уравнений, теории групп Ли преобразований, математического анализа.

Научная новизна. Результаты, полученные в главах 2–4 диссертации являются новыми и снабжены строгими доказательствами. В главе 2 автором разработан аналитический метод решения соответствующих функциональных уравнений для нахождения полных групп движе-

ний плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и симплицальной плоскостей (см. содержание доказательств теорем 2.3.1, 2.4.1, 2.4.2, 2.5.1) и всех их невырожденных двухточечных инвариантов (теоремы 2.6.2, 2.6.3, 2.6.4, 2.6.5). В главе 3 автором с помощью экспоненциального отображения найдены однопараметрические подгруппы, соответствующие базисным операторам алгебр Ли групп движений симплицальной II типа и псевдогельмгольцевой, гельмгольцевой и симплицальной III типа, симплицальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий, а затем их композицией были найдены явные выражения групп движений (теоремы 3.3.1, 3.4.1, 3.5.1) этих геометрий. В главе 4 автором разработан аналитический метод классификации, примененный к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий (теоремы 4.1.1, 4.2.1), причем, в отличие от построений Л.М. Блюментала [53], вид функциональной связи между "расстояниями" заранее не задается.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Результаты диссертационного исследования носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами в области геометрии, теории функций и отображений, теории конечномерных непрерывных групп преобразований. Большая часть результатов связана с новой проблематикой и может служить основой для дальнейших исследований вопросов классификации других феноменологически симметричных геометрий (например, трехмерных триметрических ранга 3, трехмерных ранга 5, четырехмерных ранга 6 и т.д.), при определении полных групп движений и всех их невырожденных двухточечных инвариантов. Материалы диссертации могут быть использованы при организации спецкурсов по дополнительным вопросам математического анализа, дифференциальной геометрии, предназначенных для магистров и аспирантов выс-

ших учебных заведений.

Достоверность полученных в диссертации результатов обеспечивается использованием общепринятых в математике методов исследования, а также согласованностью с научными данными, представленными в работах других авторов этого направления.

Личный вклад автора. Основные результаты, представленные в диссертации, получены автором лично под руководством д.ф.-м.н., профессора Г.Г. Михайличенко.

Апробация работы. Все результаты работы обсуждались на семинарах: по теории физических структур в Горно-Алтайском государственном университете (руководитель: д.ф.-м.н., профессор Г.Г. Михайличенко); кафедры математики, физики и информатики Горно-Алтайского государственного университета (руководитель: д.ф.-м.н., доцент А.В. Тетенев); кафедры теории функций Томского государственного университета (руководитель: д.ф.-м.н., профессор С.П. Гулько); кафедры геометрии Томского государственного университета (руководитель: д.ф.-м.н., доцент Н.Р. Щербаков); кафедры математического анализа Алтайского государственного университета (руководитель: д.ф.-м.н., профессор Е.Д. Родионов); лаборатории обратных задач математической физики Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (руководитель: д.ф.-м.н. Ю.Е. Аниконов); отдела анализа и геометрии Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (руководитель: академик РАН Ю.Г. Решетняк); отдела по геометрии, топологии и их приложениям Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (руководитель: академик РАН И.А. Тайманов).

Результаты диссертации были представлены на Международной конференции "Студент и научно-технический прогресс" (Математика. Новосибирск, 27 – 30 апреля 2008); Всероссийской научно-практической

конференции "Математическое образование в регионах России" (Барнаул, 21 ноября 2008); Международной молодежной конференции "Современные методы в механике: Математика и ее применение в задачах механики"(Томск, 19 – 20 сентября 2012); Международном школа-семинаре "Ломоносовские чтения на Алтае": Анализ, геометрия и топология (Барнаул, 20 –23 ноября 2012 г); Международной конференции "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования"(Барнаул, 11-14 ноября 2014, 20-24 октября 2015, 14-17 ноября 2017, 13-16 ноября 2018); Международной конференции "Дни геометрии в Новосибирске"(Новосибирск, 21-24 сентября 2016, 20-23 сентября 2017, 19-22 сентября 2018).

Методы решения функциональных уравнений, разработанные автором и представленные в диссертационном исследовании, использовались при выполнении работ по гранту РФФИ № 12-01-90806 – мол_рф_нр "Исследование построения классификации двуметрических двумерных геометрий" (01.07.2012 – 29.12.2012).

Публикации. По теме диссертации подготовлено и опубликовано 16 печатных и электронных изданий [1*] — [16*], из которых 7 статей — в научных журналах и изданиях, включенных в перечень ВАК российских рецензируемых научных журналов и изданий для опубликования основных научных результатов диссертаций [1*] — [7*], из них 3 статьи представлены в изданиях, входящих в международные реферативные базы (Web of Science, SCOPUS) [4*] — [6*], 9 работ — в тезисах докладов и в материалах международных конференций [8*]—[16*]. Использованные в диссертации результаты, опубликованные с Г.Г. Михайличенко в совместных изданиях [5*], [12*]— [14*], с В.А. Кыровым в совместных изданиях [6*], [7*], [12*], [14*] — [16*], с Р.М. Мурадовым в совместном издании [12*] получены автором единолично.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из списка обозначений, Введения, четырех глав, Заключения и списка литературы. Диссертация разбита на главы, которые, в свою очередь, подразделяются на параграфы. Все теоремы имеют тройную нумерацию: первое число – номер главы, второе – номер параграфа, третье – номер утверждения в текущем параграфе. Список литературы содержит 76 наименований. Общий объем диссертации составляет 157 страниц.

Перейдем к краткому изложению содержания работы. Будем использовать номера аксиом, определений, формул, задач и теорем, введенные в основном тексте диссертационной работы.

Содержание диссертации.

Во Введении обосновывается актуальность темы исследования; изложены основные результаты диссертации; отражены данные об апробации. Также приведены сведения о публикации результатов диссертации.

Первая глава носит подготовительный характер и необходима для общего знакомства с феноменологической и групповой симметриями в геометрии. В ней по работам Г.Г. Михайличенко ([37], [38], [58]) даются точные формулировки исходных аксиом и определений, а также теорем о феноменологической и групповой симметриях в геометрии.

Во второй главе диссертации излагается суть аналитического метода решения функциональных уравнений для нахождения полных групп движений трех гельмгольцевых (плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей) и симплицальной двумерных геометрий, а также всех их невырожденных двухточечных инвариантов.

§§ 2.1, 2.2 являются вводным для §§ 2.3–2.5 второй главы. В классификации двумерных феноменологически симметричных геометрий, по-

строенной Г.Г. Михайличенко присутствуют три гельмгольцевые и симплициальная двумерные геометрии, задаваемые метрическими (двухточечными) функциями

$$f(i, j) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \quad (2.14)$$

$$f(i, j) = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\beta \operatorname{Ar}(\operatorname{c}) \operatorname{th} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \quad (2.12)$$

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 \exp \left(2 \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \quad (2.13)$$

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n, \quad (2.60)$$

где $\gamma > 0$; $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$ – параметры семейства; $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq n$. Двумерная геометрия с метрической функцией (2.14) была названа плоскостью Гельмгольца, так как окружностью в ней является логарифмическая спираль, о чем кратко упоминает Гельмгольц в своей работе [11]. Метрические функции (2.12) и (2.13) задают псевдогельмгольцеву и дуальногельмгольцеву плоскости, а метрическая функция (2.60) – симплициальную плоскость, причем условием $m \neq n$ исключается плоскость Минковского.

Основной результат второй главы представлен в §§ 2.3 – 2.6.

В §§ 2.3 – 2.5 представлены разработанные автором аналитические методы решения соответствующих функциональных уравнений на множество всех движений

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y) \quad (2.18)$$

для плоскости Гельмгольца [1*]:

$$\begin{aligned} & ((\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2) \exp \left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)} \right) = \\ & = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $\gamma > 0$ и, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$;

для псевдогельмгольцевой плоскости $[1^*]$:

$$\begin{aligned} & ((\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2) \exp \left(2\beta Ar(c)th \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)} \right) = \\ & = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\beta Ar(c)th \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$;

для дуальногельмгольцевой плоскости $[1^*]$:

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^2 \exp \left(2 \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)} \right) = (x_i - x_j)^2 \exp \left(2 \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right); \quad (2.49)$$

для симплицальной плоскости $[3^*]$:

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^m (\sigma(i) - \sigma(j))^n = (x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n, \quad (2.61)$$

где $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0, n \neq 0, m \neq n$.

Суть аналитических методов решения подобного вида функциональных уравнений состоит в их последовательном дифференцировании по координатам входящих точек и получении систем алгебраических уравнений относительно некоторых выражений, а также в установлении связей между параметрами группы. Установлено, что функции λ , σ , описывающие множество движений, для каждой из двумерных геометрий (плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и симплицальной плоскостей) в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ разных точек i и j имеют один и тот же вид. Проведенные доказательства, в которых отсутствуют всякие дополнительные условия, позволяют утверждать, что найденные группы движений полны.

Основной результат **§ 2.6** состоит в установлении полноты множества двухточечных инвариантов групп движений для трех гельмгольцевых и симплицальной двумерных геометрий, представленный в следующих теоремах:

Теорема 2.6.1. ([4*]). *Каждый невырожденный двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$*

$$x' = ax - by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.73)$$

где $(a^2 + b^2) \exp \left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right) = 1$, γ – положительная константа (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией (2.14) плоскости Гельмгольца, задающей на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.

Теорема 2.6.2. ([4*]). *Каждый невырожденный двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$*

$$x' = ax + by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.80)$$

где $(a^2 - b^2) \exp \left(2\beta \operatorname{Ar}(c) \operatorname{th} \frac{b}{a} \right) = 1$, β – положительная константа, отличная от единицы (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией (2.12) псевдогельмгольцевой плоскости, задающей на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.

Теорема 2.6.3. ([4*]). *Каждый невырожденный двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$*

$$x' = ax + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.86)$$

где $a^2 \exp(2b/a) = 1$, совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией (2.13) дуальногельмгольцевой плоскости, задающей на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.

Теорема 2.6.4. ([4*]). *Каждый невырожденный двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$*

$$x' = ax + c, \quad y' = by + d, \quad (2.92)$$

где $a^m b^n = 1$ ($m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq n$), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией (2.60) симплициальной плоскости, задающей на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.

Третья глава диссертации посвящена нахождению явных выражений локальных групп движений для симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой, гельмгольцевой и симплициальной III типа, симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой геометрий, являющихся геометриями локальной максимальной подвижности, задаваемыми на многообразии $\mathfrak{M}_3$ соответственно следующими метрическими (двухточечными) функциями:

$$f(i, j) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \exp(w_i + w_j); \quad (3.13)$$

$$f(i, j) = \frac{(y_i - y_j)^\beta}{x_i - x_j} \exp(w_i + w_j), \quad (3.21)$$

где $\beta = (\delta - 1)/(\delta + 1)$, причем $-1 < \beta < 1$ и $\beta \neq 0$;

$$\tilde{f}(i, j) = \frac{(\bar{z}_i - \bar{z}_j)^\alpha}{(z_i - z_j)} \exp(u_i + u_j), \quad (3.22)$$

где $\tilde{f} = f^{\frac{1}{i\gamma-1}}$, $w = u(i\gamma - 1)$, $\alpha = \frac{\gamma - i}{\gamma + i}$, $z = x + iy$, $i^2 = -1$;

$$\tilde{f}(i, j) = \frac{\bar{z}_i - \bar{z}_j}{z_i - z_j} \exp(u_i + u_j), \quad (3.23)$$

где $\tilde{f} = e^{-2if}$, $-2iw = u$, $z = x + iy$, $i^2 = -1$;

$$\tilde{f}(i, j) = \frac{\bar{z}_i - \bar{z}_j}{z_i - z_j} + v_i + v_j, \quad (3.24)$$

где $\tilde{f} = 1 - 2\varepsilon f$, $-2\varepsilon w = v$, $z = x + \varepsilon y$, $\varepsilon^2 = 0$;

$$\tilde{f}(i, j) = \frac{\bar{z}_i - \bar{z}_j}{z_i - z_j} - 2\varepsilon \ln \left[\overline{(z_i - z_j)}(z_i - z_j) \right] + v_i + v_j, \quad (3.25)$$

где $\tilde{f} = 1 - 2\varepsilon \ln f$, $-2\varepsilon w = v$, $z = x + \varepsilon y$, $\varepsilon^2 = 0$.

Явный вид шести базисных операторов алгебр Ли групп движений соответственно имеет следующий вид:

для симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой геометрий:

$$\partial_x, \partial_y, 2x\partial_x + \partial_w, -2y\partial_y + \partial_w, x^2\partial_x + x\partial_w, -y^2\partial_y + y\partial_w, \quad (3.31)$$

$$\partial_x, \partial_y, 2x\partial_x + \partial_w, -2y\partial_y + \beta\partial_w, x^2\partial_x + x\partial_w, -y^2\partial_y + \beta y\partial_w, \quad (3.35)$$

где $-1 < \beta < 1$ и $\beta \neq 0$;

для гельмгольцевой и симплициальной III типа геометрий:

$$\partial_z, \partial_{\bar{z}}, 2z\partial_z + \partial_u, -2\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \alpha\partial_u, z^2\partial_z + z\partial_u, -\bar{z}^2\partial_{\bar{z}} + \alpha\bar{z}\partial_u, \quad (3.36)$$

где $\gamma > 0$, $-iw = u(\gamma + i)$, $\alpha = (\gamma - i)/(\gamma + i)$,

$$\partial_z, \partial_{\bar{z}}, 2z\partial_z + \partial_u, -2\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \partial_u, z^2\partial_z + z\partial_u, -\bar{z}^2\partial_{\bar{z}} + \bar{z}\partial_u, \quad (3.37)$$

где $iw = 2u$;

для симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой геометрий:

$$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, -2x\partial_y + \partial_w, -x^2\partial_y + x\partial_w, -x^2\partial_x - 2xy\partial_y + y\partial_w, \quad (3.30)$$

$$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y - \partial_w, -2x\partial_y + \partial_w, -x^2\partial_y + x\partial_w, -x^2\partial_x - 2xy\partial_y + (y + 2x)\partial_w. \quad (3.32)$$

Основные результаты этой главы представлены в §§3.3—3.5 (теоремы 3.3.1, 3.4.1, 3.5.1), опубликованные автором в работах [6*], [7*], [12*]—[16*].

Теорема 3.3.1. ([6*]). *Группы движений симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой трехмерных геометрий с функциями (3.13)*

и (3.21) являются результатом действий группы $SL_2(R) \otimes SL_2(R)$ в пространстве R^3 , имея соответственно следующий вид:

$$x' = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}, \quad y' = \frac{a_2y + b_2}{c_2y + d_2}, \quad w' = w + \ln \frac{c_2y + d_2}{c_1x + d_1}, \quad (3.40)$$

$$x' = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}, \quad y' = \frac{a_2y + b_2}{c_2y + d_2}, \quad w' = w + \beta \ln(c_2y + d_2) - \ln(c_1x + d_1), \quad (3.41)$$

где $a_1d_1 - b_1c_1 = a_2d_2 - b_2c_2 = 1$, $a_1, d_1, b_1, c_1, a_2, d_2, b_2, c_2 - \text{const} \in R$, $-1 < \beta < 1$ и $\beta \neq 0$.

Теорема 3.4.1. ([6*, 7*]). Группы движений гельмгольцевой и симплицальной III типа трехмерных геометрий с функциями (3.22) и (3.23) являются результатом действия группы Ли $SL_2(C)$ в пространстве R^3 , имея соответственно следующий вид:

для гельмгольцевой трехмерной геометрии

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad u' = u + \alpha \ln \overline{(cz + d)} - \ln(cz + d), \quad (3.53)$$

где $u = w/(i\gamma - 1)$, $\alpha = (\gamma - i)/(\gamma + i)$,

для симплицальной трехмерной геометрии III типа

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad u' = u + \ln \frac{\overline{cz + d}}{cz + d}, \quad (3.54)$$

где $u = -2iw$, причем $ad - bc = 1$, $a, b, c, d = \text{const} \in C$, $z = x + iy \in C$, $i^2 = -1$.

Теорема 3.5.1. ([6*]). Группы движений симплицальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий с функциями (3.24) и (3.25) являются результатом действия группы Ли $SL_2(D)$ в пространстве R^3 , имея соответственно следующий вид:

для симплицальной трехмерной геометрии I типа

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad v' = v - 1 + \frac{\overline{(cz + d)}}{(cz + d)}, \quad (3.63)$$

для дуальногельмгольцевой трехмерной геометрии

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad v' = v - 1 + \frac{\overline{(cz + d)}}{(cz + d)} - 2\varepsilon \ln \overline{(cz + d)}(cz + d), \quad (3.64)$$

где $ad - bc = 1$, $a, b, c, d = \text{const} \in D$, $z = x + \varepsilon y$, $v = -2\varepsilon w$, $\varepsilon^2 = 0$.

В доказательствах теорем 3.3.1, 3.4.1, 3.5.1 с помощью экспоненциального отображения сначала были найдены однопараметрические подгруппы, соответствующие шести базисным операторам алгебр Ли групп движений (3.31) и (3.35), (3.36) и (3.37), (3.30) и (3.32) для симплицальной II типа и псевдогельмгольцевой, гельмгольцевой и симплицальной III типа, симплицальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий, а затем их композицией были найдены явные выражения групп движений (3.40) и (3.41), (3.53) и (3.54), (3.63) и (3.64).

Четвертая глава диссертации посвящена разработке аналитического метода классификации феноменологически симметричных геометрий (существенно использующего исследование строения и ранга соответствующей функциональной матрицы, а также следующих из неё систем функционально-дифференциальных соотношений и дифференциальных уравнений) и его применению к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий. Для каждой из них найдены группы движений решением соответствующих систем функциональных уравнений на множество движений, и все невырожденные двухточечные инварианты этих групп.

Краткое изложение содержания §§ 4.1–4.5.

§ 4.1. Пусть имеется гладкое двумерное многообразие $\mathfrak{M}_2$, а также функция $f : \mathfrak{S}_f \rightarrow R^2$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$, сопоставляющая каждой паре точек $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ два вещественных числа $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j)) \in R^2$. Двухкомпонентную двухточечную функцию f будем называть *метрической вектор-функцией*, не требуя, однако, от ее компонент выполнения

аксиом обычной (см., например, Коломогорова А.Н. [16]) метрики, а геометрию, задаваемую ею на многообразии $\mathfrak{M}_2$, — *двуметрической двумерной геометрией*. Окрестность точки $i \in \mathfrak{M}_2$ будем обозначать через $U(i)$, окрестность пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ через $U(\langle i, j \rangle)$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множества $\mathfrak{M}_2$ на себя.

Если x, y — локальные координаты гладкого двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$, то для вектор-функции $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$ можно записать ее локальное координатное представление:

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j) = (f^1(x_i, y_i, x_j, y_j), f^2(x_i, y_i, x_j, y_j)), \quad (4.1)$$

где x_i, y_i и x_j, y_j — локальные координаты точек i и j пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$.

В отношении вектор-функции f будем предполагать выполнение следующих аксиом:

Аксиома 4.1.1. Область определения $\mathfrak{S}_f$ вектор-функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ множество.

Аксиома 4.1.2. Вектор-функция f в области своего определения имеет класс гладкости не менее второго.

Аксиома 4.1.3. Для открытого и плотного в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ множества пар $\langle i, j \rangle$ локальное координатное представление (4.1) вектор-функции $f(i, j)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\frac{\partial(f^1(i, j), f^2(i, j))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f^1(i, j), f^2(i, j))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0. \quad (4.2)$$

На основе метрической функции f строится отображение F , сопоставляющее тройке $\langle i, j, k \rangle$ из $\mathfrak{M}_2^3$ точку $z = (f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k))$, принадлежащую некоторому открытому под-

множеству $E \subset R^6$, если пары $\langle i, j \rangle, \langle i, k \rangle, \langle j, k \rangle \in \mathfrak{S}_f$. То есть

$$\mathfrak{M}_2^3 \supseteq \mathfrak{S}_F \ni \langle i, j, k \rangle \xrightarrow{F} (f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) \in E \subset R^6, \quad (4.3)$$

где $\mathfrak{S}_F$ – есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2^3$ множество, являющееся областью определения построенного отображения F .

Пусть, далее, имеется гладкая функция $\Phi : E \rightarrow R^2$, где $E \subset R^6$, которая сопоставляет точке $z \in E \subseteq R^6$ пару чисел $(\Phi_1(z), \Phi_2(z)) \in R^2$.

Аксиома 4.1.4. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждой тройки $\langle i, j, k \rangle$ которого и некоторой ее окрестности $U(\langle i, j, k \rangle)$ найдется такая гладкая класса C^2 функция $\Phi : E \rightarrow R^2$, определенная в некоторой области $E \subset R^6$, содержащей точку $z = F(\langle i, j, k \rangle)$, что в ней $\text{rang} \Phi = 2$ и множество $F(U(\langle i, j, k \rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть

$$\Phi(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) = 0, \quad (4.4)$$

где $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, для всех троек из $U(\langle i, j, k \rangle)$.

Функциональная матрица построенного выше отображения F (4.3) имеет вид

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial x_i} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial y_i} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial x_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial y_j} & \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial y_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial y_j} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial y_j} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial x_k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial y_k} \end{array} \right) \quad (4.6)$$

Основным результатом §4.1 являются лемма и теорема о ранге отображения F :

Лемма 4.1.1. ($[2^*]$). Если вектор-функция $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$ удовлетворяет аксиомам 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, то ранг матрицы (4.6) не менее 4.

Теорема 4.1.1. ($[2^*]$). **1.** Если ранг отображения F равен 4 на открытом и плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве, то метрическая вектор-функция $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, удовлетворяющая аксиомам 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, задает на гладком многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3 (то есть удовлетворяет аксиоме 4.1.4). **2.** Система аксиом 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 и 4.1.4 совместна, то есть, возможно, существует модель соответствующей аксиоматической теории — набор вектор-функций $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, для которых выполнены все четыре аксиомы.

§ 4.2 посвящен исследованию строения и ранга функциональной матрицы отображения F , а также ранга следующих из нее систем функционально-дифференциальных соотношений вида

$$\left. \begin{aligned} & A_2^1(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - A_2^2(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ & + A_2^1(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - A_2^2(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ & A_1^1(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - A_1^2(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ & + A_1^1(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - A_1^2(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

где $\alpha = 1, 2$, и систем дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} = 0, \\ & \lambda(i)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma(i)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda(j)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma(j)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ & \lambda_x(i)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma_x(i)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda_x(j)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma_x(j)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

В частности, доказаны:

Лемма 4.2.1. $([2^*])$. Ранг системы функционально-дифференциальных соотношений (4.10) равен 2.

Лемма 4.2.2. $([2^*])$. Ранг касательного отображения для отображения (4.1) остается максимальным (то есть равным 2) только тогда, когда ранг матрицы системы уравнений (4.20) не более двух.

Применение аналитического метода классификации к двуметрическим феноменологически симметричным двумерным геометриям привело к трем решениям:

$$1. \quad f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i - y_j, \quad (4.31)$$

$$2. \quad f^1(i, j) = (x_i - x_j)y_i, \quad f^2(i, j) = (x_i - x_j)y_j, \quad (4.32)$$

$$3. \quad f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j. \quad (4.33)$$

В § 4.3 при сопоставлении с классификацией двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий, построенной Г.Г. Михайличенко групповым методом, отличным от аналитического, установлена эквивалентность или неэквивалентность выражений (4.31), (4.32), (4.33) решением трех систем функциональных уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\varphi(i) - \varphi(j))\tau(i) &= \psi^1(x_i - x_j, y_i - y_j), \\ (\varphi(i) - \varphi(j))\tau(j) &= \psi^2(x_i - x_j, y_i - y_j), \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} (\varphi(i) - \varphi(j))\tau(i) &= \psi^1(x_i - x_j, y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j), \\ (\varphi(i) - \varphi(j))\tau(j) &= \psi^2(x_i - x_j, y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j), \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(i) - \varphi(j) &= \psi^1(x_i - x_j, y_i - y_j), \\ \tau(i)e^{-(\varphi(i) - \varphi(j))} - \tau(j) &= \psi^2(x_i - x_j, y_i - y_j) \end{aligned} \right\}$$

относительно функций φ, τ и ψ для трех возможных пар соответственно: 1) **1** и **2**, 2) **2** и **3**, 3) **1** и **3**. Функции (4.31) и (4.32) не эквивалентны, а функции (4.32) и (4.33) эквивалентны с точностью до обратимых замены координат $(\varphi(x, y), \tau(x, y)) = (ye^{-x}, e^x) \rightarrow (x, y)$ и масштабного

преобразования $(\psi^1(f^1, f^2), \psi^2(f^1, f^2)) = (f^2 \exp f^1, f^2) \rightarrow (f^1, f^2)$, в которых $f^1 = x_i - x_j$, $f^2 = y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j$. Из этих двух результатов естественно следует третий, что метрические функции (4.31) и (4.33) не эквивалентны.

Таким образом, решение задачи об эквивалентности или неэквивалентности выражений (4.31), (4.32), (4.33) подтверждает полноту классификационной теоремы Г.Г. Михайличенко для двуметрических феноменологически симметричных геометрий.

В § 4.4 для найденных в § 4.2 метрических функций решаются задачи определения полных групп движений и всех их невырожденных двухточечных инвариантов. Установлено, что группы движений геометрий, задаваемых эквивалентными метрическими функциями (4.32) и (4.33), подобны.

В Заключение кратко перечислены основные результаты настоящей работы и указаны перспективы будущих исследований в данном направлении.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Г.Г. Михайличенко за постановку задач, научное руководство и помощь в работе; искренне благодарит д.ф.-м.н., член-корреспондента РАН А.И. Панина за постановку задачи, связанной с исследованием строения групп движений третьей главы; выражает глубокую признательность д.ф.-м.н., зав. кафедрой теории функции ТГУ, профессору С.П. Гулько и всем участникам научного семинара кафедры за активное обсуждение результатов настоящей работы; глубоко и искренне признателен к.ф.-м.н., доценту М.С. Бухтяку за внимание и полезные обсуждения результатов исследования; искренне благодарит к.ф.-м.н., доцента В.А. Кырова за ценные замечания и постоянную поддержку.

Глава 1

Основные определения

Первая глава носит подготовительный характер и необходима для общего знакомства с феноменологической и групповой симметриями в геометрии. В ней по работам Г.Г. Михайличенко ([37], [38], [58]) даются строгие формулировки исходных аксиом и определений, а также теорем о феноменологической и групповой симметриях и связи между ними в геометрии. В §1.4 на примере плоскости Евклида поясняются групповая и феноменологическая симметрии, а также их эквивалентность. В заключительном §1.5 проводится обзор имеющихся к настоящему времени методов классификации феноменологически симметричных геометрий и формулируется задача о разработке аналитического метода классификации ранее известных двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий, решение которой представлено в четвертой главе.

1.1 Феноменологическая симметрия в геометрии

Следуя работам Г.Г. Михайличенко [37], [38], [58] перейдем к точным формулировкам.

Пусть имеется множество $\mathfrak{M}_{sn}$, наделенное структурой гладкого sn -мерного многообразия класса C^2 , где s и n — натуральные числа, точки

которого здесь и далее будем обозначать строчными буквами латинского алфавита, а также функция $f : \mathfrak{S}_f \rightarrow R^s$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$, сопоставляющая каждой паре точек $\langle i, j \rangle$ из области определения $\mathfrak{S}_f$ совокупность некоторых s вещественных чисел $f(i, j) = (f^1(i, j), \dots, f^s(i, j)) \in R^s$. Двухточечную функцию f будем называть *метрической функцией*, не требуя, однако, от ее компонент выполнения аксиом обычной (см, например, [16]) метрики.

Замечание 1.1.1. В общем случае метрическая функция f не всякой паре из $\mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$ сопоставляет s чисел, но в последующем изложении в явной записи функции $f(i, j)$ будем подразумевать, что пара $\langle i, j \rangle$ принадлежит области определения $\mathfrak{S}_f$.

Далее обозначим через $U(i)$ окрестность точки $i \in \mathfrak{M}_{sn}$, через $U(\langle i, j \rangle)$ — окрестность упорядоченной пары точек $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множества $\mathfrak{M}_{sn}$ на себя.

Для некоторого кортежа $\langle k_1, \dots, k_n \rangle \in \mathfrak{M}_{sn}^n = \mathfrak{M}_{sn} \times \dots \times \mathfrak{M}_{sn}$ длины n введем функции $g_n = g_n(k_1, \dots, k_n)$ и $q_n = q_n(k_1, \dots, k_n)$, сопоставляющие точке $i \in \mathfrak{M}_{sn}$ точки $(f(i, k_1), \dots, f(i, k_n)) \in R^{sn}$ и $(f(k_1, i), \dots, f(k_n, i)) \in R^{sn}$ соответственно, если $\langle i, k_1 \rangle, \dots, \langle i, k_n \rangle \in \mathfrak{S}_f$ и $\langle k_1, i \rangle, \dots, \langle k_n, i \rangle \in \mathfrak{S}_f$. Заметим, что области определения введенных функций g_n и q_n могут не совпадать друг с другом и с самим множеством $\mathfrak{M}_{sn}$.

В отношении метрической функции $f = (f^1, \dots, f^s)$ будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

Аксиома 1.1.1. Область определения $\mathfrak{S}_f$ метрической функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$ множество.

Аксиома 1.1.2. Метрическая функция f в области своего опреде-

ления есть гладкая функция класса C^2 .

Аксиома 1.1.3. В $\mathfrak{M}_{sn}^n$ плотно множество таких кортежей длины n , для которых отображения g_n и q_n имеют максимальный ранг, равный sn , в точках плотного в $\mathfrak{M}_{sn}$ множества.

Определение 1.1.1. Гладкую функцию $f = (f^1, \dots, f^s)$, для которой выполняется аксиома 1.1.3, будем называть *невыврожденной*.

Заметим, что ограничения в аксиомах 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 открытыми и плотными множествами связано с тем, что исходные множества могут содержать исключительные подмножества меньшей размерности, где эти аксиомы не выполняются.

На основе метрической функции f построим отображение $F : \mathfrak{M}_{sn}^m \rightarrow R^{sm(m-1)/2}$, сопоставляющее кортежу $\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle$ длины $m = n + 2$ из $\mathfrak{M}_{sn}^m = \mathfrak{M}_{sn} \times \dots \times \mathfrak{M}_{sn}$ точку $z = (f(i, j), f(i, k), \dots, f(v, w)) \in R^{sm(m-1)/2}$, координаты которой в $R^{sm(m-1)/2}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью $sm(m-1)/2$ чисел для следующих пар его точек: $\langle i, j \rangle, \langle i, k \rangle, \dots, \langle i, w \rangle, \langle j, k \rangle, \dots, \langle v, w \rangle$ если все эти пары принадлежат $\mathfrak{S}_f$. Область определения отображения F обозначим через $\mathfrak{S}_F$. Очевидно, что область $\mathfrak{S}_F$ есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_{sn}^m$ множество.

Определение 1.1.2. Будем говорить, что невырожденная метрическая функция $f = (f^1, \dots, f^s)$ задает на sn -мерном многообразии *феноменологически симметричную геометрию ранга $m = n + 2$* , если, кроме аксиом 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, дополнительно выполняется следующая аксиома:

Аксиома 1.1.4. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждого кортежа $\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle$ длины $m = n + 2$ которого и некоторой его окрестности $U(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle)$ найдется такая гладкая класса C^2 функ-

ция $\Phi : E \rightarrow R^s$, определенная в некоторой области $E \subset R^{sm(m-1)/2}$, содержащей точку $z = F(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle)$, что в ней $\text{rang} \Phi = s$ и множество $F(U(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть

$$\Phi(z) = \Phi(f(i, j), f(i, k), \dots, f(v, w)) = 0 \quad (1.1)$$

для всех кортежей из $U(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle)$.

Аксиома 1.1.4 составляет содержание принципа феноменологической симметрии. Эта аксиома выражает требование, чтобы $sm(m-1)/2$ значений двухточечной функции f между точками любого кортежа длины $m = n + 2$ из $U(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle)$ были функционально связаны, удовлетворяя системе s уравнений (1.1). Условие $\text{rang} \Phi = s$ означает, что уравнения $\Phi = 0$ (то есть $\Phi_1 = 0, \dots, \Phi_s = 0$) функционально независимы.

Приведенные выше построения поясняет рис.1.1

Если $x^1, \dots, x^{sn}$ — локальные координаты sn -мерного гладкого многообразия $\mathfrak{M}_{sn}$, то для метрической функции $f = (f^1, \dots, f^s)$ в некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ каждой пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ можно выписать ее локальное координатное представление:

$$f(i, j) = f(x_i, x_j) = f(x_i^1, \dots, x_i^{sn}, x_j^1, \dots, x_j^{sn}), \quad (1.2)$$

где $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^{sn})$, $x_j = (x_j^1, \dots, x_j^{sn})$.

Замечание 1.1.2. Поскольку в соответствии с аксиомой 1.1.3 ранги отображений, соответствующих функциям g_n и q_n , равные sn максимальны, координаты x_i и x_j входят в представление (1.2) существенным образом. Последнее означает, что никакая локально-обратимая гладкая замена координат не приведет к уменьшению их числа в этом представ-

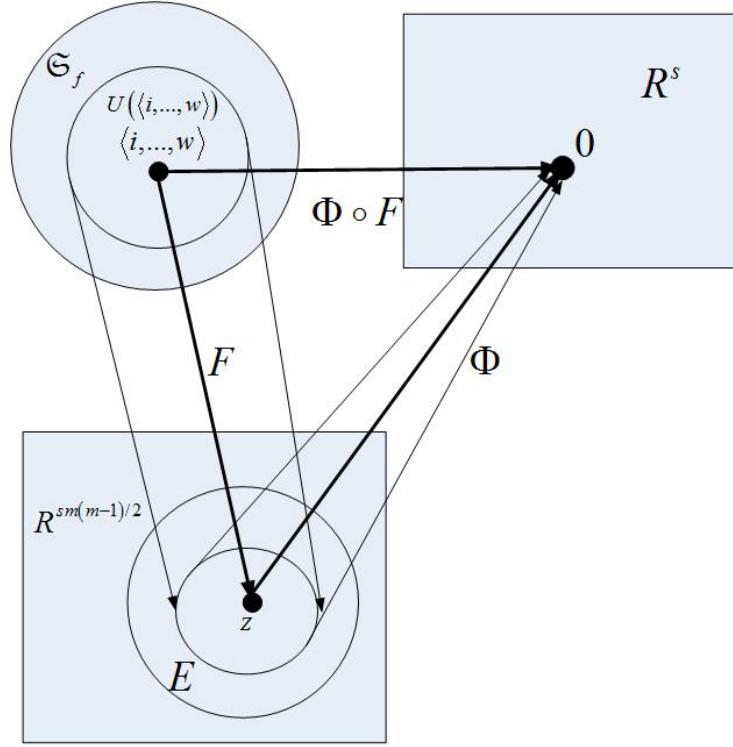


Рис. 1.1: Диаграмма отображений для s -метрических феноменологически симметричных sn -мерных геометрий ранга $m = n + 2$

лении, то есть не существует такой локальной системы координат, в которой оно может быть записано в виде

$$f(i, j) = f(x_i^1, \dots, x_i^{n'}, x_j^1, \dots, x_j^{n''}),$$

где или $n' < sn$ или $n'' < sn$. Действительно, если, например, $n' < sn$, то для любого кортежа $\langle j_1, \dots, j_n \rangle \in (U(j))^n$ длины n и для любой точки из $U(i)$ ранг отображения функции $g_n = g_n(j_1, \dots, j_n)$ будет заведомо меньше sn , что противоречит аксиоме 1.1.3. Заметим, однако, что существенная зависимость представления (1.2) от локальных координат $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^{sn})$ и $x_j = (x_j^1, \dots, x_j^{sn})$ в общем случае не гарантирует выполнения аксиомы 1.1.3.

Используя выражение (1.2), запишем локальное координатное представление построенного выше отображения F :

$$f(i, j) = f(x_i, x_j), \quad f(i, k) = f(x_i, x_k), \quad \dots, \quad f(v, w) = f(x_v, x_w) \quad (1.3)$$

функциональная матрица для компонент которой (в клеточной записи)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f(i,j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f(i,j)}{\partial x_j} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(i,k)}{\partial x_i} & 0 & \frac{\partial f(i,k)}{\partial x_k} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial f(v,w)}{\partial x_v} & \frac{\partial f(v,w)}{\partial x_w} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

имеет $sm(m-1)/2$ строк и smn столбцов. Здесь через $\partial f/\partial x$ кратко обозначена функциональная матрица для s компонент метрической функции $f = (f^1, \dots, f^s)$ по sn координатам $x = (x^1, \dots, x^{sn})$ точек пары, то есть каждая клетка матрицы (1.4) имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{sn}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^s}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^s}{\partial x^{sn}} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Отображение F задается системой $sm(m-1)/2$ функций $f(i, j)$, $f(i, k), \dots, f(v, w)$, зависящих специальным образом от smn координат $x = (x_i^1, \dots, x_w^{sn})$ всех точек кортежа $\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle$ длины $m = n + 2$.

Поскольку общее число компонент метрической функции f в системе (1.3) не больше общего числа координат, наличие связи (1.1) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольной системы функций (1.3).

Отображение F , согласно ее локальному координатному представлению (1.3), отображает окрестность $U(\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle) \subset \mathfrak{S}_F$ в $R^{sm(m-1)/2}$. Матрицей этого отображения является функциональная матрица (1.4) системы функций (1.3), а его рангом называется ранг этой матрицы.

Теорема 1.1.1. *Для того, чтобы метрическая функция f задавала на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $m = n + 2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $st(m - 1)/2 - s$ на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Полное доказательство теоремы 1.1.1 можно найти в работе Г.Г. Михайличенко [43] и его монографии [44].

1.2 Групповая симметрия в геометрии

Рассмотрим, следуя работам Г.Г. Михайличенко [37], [44] групповые свойства феноменологически симметричной геометрии, введенной в §1.1.

Пусть U и U' – открытые области в многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$, не обязательно связные. Гладкое инъективное отображение

$$\lambda : U \rightarrow U' \tag{1.6}$$

называется *локальным движением*, если оно сохраняет метрическую функцию $f = (f^1, \dots, f^s)$. Последнее означает, что для любой пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$, такой что $i, j \in U$, и соответствующей пары $\langle \lambda(i), \lambda(j) \rangle$, если она принадлежит $\mathfrak{S}_f$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(i, j), \tag{1.7}$$

выполняющееся для каждой из компонент $f^1, \dots, f^s$ метрической функции f , в котором $\lambda(i) = \lambda(x_i^1, \dots, x_i^{sn})$, $\lambda(j) = \lambda(x_j^1, \dots, x_j^{sn})$.

Множество всех движений (1.6) есть группа Ли преобразований, для которой метрическая функция f согласно равенству (1.7) является двухточечным инвариантом. Если метрическая функция f задана явно, например, в своем координатном представлении (1.2), то равенство

(1.7) является *функциональным уравнением*, решая которое можно найти группу локальных движений (1.6). Нам же о метрической функции известно только то, что она невырождена и удовлетворяет некоторой системе s уравнений (1.1). Но этого оказывается достаточно для того, чтобы установить существование $sn(n+1)/2$ -параметрической локальной группы ее движений. Для большей ясности последующего изложения воспроизведем в наших обозначениях определение локальной группы Ли преобразований, следуя работе Л.С. Понтрягина "Непрерывные группы" (см. [50], стр. 435).

Пусть G^r – r -мерная локальная группа Ли и U – некоторая область многообразия $\mathfrak{M}_{sn}$. Допустим, что каждому элементу $a \in G^r$ поставлено в соответствие непрерывно зависящее от a инъективное отображение $\lambda_a : U \rightarrow U'$ области U в некоторую область U' многообразия $\mathfrak{M}_{sn}$, относящее каждой точке $i \in U$ некоторую точку $i' \in U'$, то есть $i' = \lambda_a(i) = \lambda(i, a)$. Будем говорить, что локальная группа Ли G^r в области $U \subset \mathfrak{M}_{sn}$ задает локальное гладкое действие, то есть r -мерную локальную группу Ли преобразований $G(U, G^r)$, если выполнены следующие три условия:

1. Единице e группы G^r соответствует тождественное преобразование $i' = \lambda(i, e) = i$ области U на себя и $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$, то есть произведению $ab \in G^r$ соответствует композиция преобразований: сначала λ_a и затем λ_b (возможен и другой порядок: $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ba)$).

2. Преобразование λ_a является тождеством лишь при условии, что a есть единица e группы G^r .

3. В координатной форме $\lambda(i, a)$ есть гладкая класса C^2 функция точки $i \in U$ и элемента $a \in G^r$.

Условие **2** есть не что иное, как требование эффективности только что введенной группы преобразований ([12], С.107–108; [13], С.10). Эле-

менты группы $G^r(\lambda)$ задают, в общем случае $a \neq e$, нетождественные преобразования.

Таким образом, в области U задано эффективное гладкое действие группы G^r , причем условия **1**, **2**, **3** выполняются для некоторой зависящей от U окрестности единичного элемента $e \in G^r$.

В последующем изложении удобно считать, что область $U \subset \mathfrak{M}_{sn}$ не обязательно связна, например, может состоять из двух связных областей [7]: $U = U_1 \cup U_2$, причем $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Определение 1.2.1. Будем говорить, что метрическая функция $f = (f^1, \dots, f^s)$ задает на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ геометрию, *наделенную групповой симметрией* степени $sn(n+1)/2$, если, кроме аксиом 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 дополнительно выполняется следующая аксиома:

Аксиома 1.2.1. Существует открытое и плотное в $\mathfrak{M}_{sn}$ множество, для каждой точки i которого задано эффективное гладкое действие $sn(n+1)/2$ -мерной локальной группы Ли в некоторой окрестности $U(i)$, такое, что действия ее в окрестностях $U(i), U(j)$ двух точек i, j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$ и что функция $f(i, j)$ по каждой из своих s компонент является двухточечным инвариантом соответствующей группы преобразований окрестности $U(i) \times U(j)$.

Группа преобразований, о которой говорится в аксиоме 1.2.1, определяет локальную подвижность жестких фигур в sn -мерном пространстве $\mathfrak{M}_{sn}$, аналогичную подвижности твердых тел в евклидовом пространстве. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть, так как, хотя локальные действия группы $G^{sn(n+1)/2}$ определены согласно аксиоме 1.2.1 в некоторой окрестности каждой точки открытого и плотного в $\mathfrak{M}_{sn}$ множества, может оказаться, что на всем этом множестве действует только единичный элемент группы. Множество пар $\langle i, j \rangle$,

для которых метрическая функция f определена и является двухточечным инвариантом локальной группы локальных преобразований многообразия $\mathfrak{M}_{sn}$, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{M}_{sn} \times \mathfrak{M}_{sn}$. Будем также говорить, что метрическая функция f допускает $sn(n+1)/2$ -мерную локальную группу локальных движений.

Теорема 1.2.1. *Для того, чтобы метрическая функция f задавала на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n+1)/2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $st(m-1)/2 - s$, где $m = n+2$, на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.*

Полное доказательство теоремы 1.2.1 приведено в монографии Г.Г. Михайличенко [44] и его работе [43].

1.3 Эквивалентность групповой и феноменологической симметрий в геометрии

Метрическая функция f задает геометрию пространства. По этой функции можно найти множество всех движений, относительно которой она будет являться двухточечным инвариантом. С одной стороны, геометрия наделена групповой симметрией, относительно которых она является теорией инвариантов определенной группы преобразований, что лежит в основе "Эрлангенской программы" Ф. Клейна 1872 года [15]. С другой стороны, эта геометрия феноменологически симметрична, что выражается некоторой функциональной связью между всеми взаимными "расстояниями" для определенного числа точек пространства, на которую обратил особое внимание Ю.И. Кулаков [18], сделав ее основным принципом своей теории физических структур [21].

В монографии "Полиметрические геометрии" [44] Г.Г. Михайличенко

сформулирована теорема об эквивалентности групповой и феноменологической симметрий в геометрии, задаваемой на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ метрической функцией $f = (f^1, \dots, f^s)$, которая является следствием теорем 1.1.1 и 1.2.1 настоящей главы, так как в них совпадают необходимые и достаточные условия о ранге отображения F .

Теорема 1.3.1. *Для того, чтобы метрическая функция $f = (f^1, \dots, f^s)$ задавала на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $t = n + 2$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на $\mathfrak{M}_{sn}$ геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n + 1)/2$.*

В монографии [44] в рамках общего доказательства эквивалентности феноменологической и групповой симметрий сформулирована и доказана также теорема о размерности локальной группы локальных движений.

Теорема 1.3.2. *Размерность локальной группы локальных движений, допускаемых метрической функцией $f = (f^1, \dots, f^s)$, задающей на sn -мерном многообразии $\mathfrak{M}_{sn}$ феноменологически симметричную геометрию ранга $t = n + 2$, или, что то же самое, геометрию, наделенную групповой симметрией степени $sn(n + 1)/2$, не превышает этой степени.*

Эквивалентность феноменологической и групповой симметрий позволила провести полную классификацию некоторых геометрий, а также исследования в отношении локальных групп Ли преобразований (см. монографию Г.Г. Михайличенко [44] и работы В.А. Кырова [25], [26]).

Феноменологическая симметрия ранга $t = n + 2$, выражаемая уравнениями (1.1) из § 1.1, легко устанавливается по его явному виду или по функциональной матрице (1.4) § 1.1, ранг которой определен тео-

ремой 1.1.1 для $sm(m-1)/2$ функций, специальным образом зависящих от smn координат $x = (x_i^1, \dots, x_w^{sn})$ всех точек кортежа $\langle i, j, k, \dots, v, w \rangle$ длины $m = n + 2$. Ранг этой матрицы согласно теореме 1.1.1 из §1.1 равен $sm(m-1)/2 - s$, что свидетельствует о наличии s -независимых функциональных связей, задаваемых уравнениями (1.1) и выражающих феноменологическую симметрию в геометрии.

Групповая симметрия степени $sn(n+1)/2$ является следствием феноменологической симметрии в соответствии с теоремой 1.3.1 настоящего параграфа. Решением функционального уравнения (1.7) § 1.2 находится локальная группа локальных движений без всяких дополнительных условий, которая определяет групповую симметрию степени $sn(n+1)/2$. Так же следует отметить, что, решая соответствующее функциональное уравнение при известной группе движений, можно однозначно восстановить метрическую функцию f как двухточечный инвариант с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ [44].

Таким образом, феноменологически симметричные геометрии — это геометрии максимальной подвижности, то есть геометрии Клейна с функциональной связью между всеми взаимными "расстояниями" для произвольных $n + 2$ точек. В пространстве с такой геометрией жесткие фигуры и твердые тела при своем движении имеют не более $sn(n+1)/2$ степеней свободы.

1.4 Пример: плоскость Евклида

Для иллюстрации феноменологической и групповой симметрий в геометрии, а также связи между ними, рассмотрим плоскость Евклида. В декартовой прямоугольной системе координат (x, y) квадрат расстояния $\rho(i, j)$ между любыми двумя ее точками $i = (x_i, y_i)$ и $j = (x_j, y_j)$

задается метрической функцией

$$f(i, j) = \rho^2(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2. \quad (1.8)$$

Возьмем четыре произвольные точки i, j, k, l и запишем для них шесть значений функции (1.8): $f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(j, k), f(j, l), f(k, l)$. Известно [3], что шесть взаимных расстояний между любыми четырьмя точками евклидовой плоскости функционально связаны, обращая в нуль определитель Кэли-Менгера пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(i, j) & f(i, k) & f(i, l) \\ 1 & f(i, j) & 0 & f(j, k) & f(j, l) \\ 1 & f(i, k) & f(j, k) & 0 & f(k, l) \\ 1 & f(i, l) & f(j, l) & f(k, l) & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.9)$$

Задача 1.4.1. Установить, что для плоскости Евклида с метрической функцией (1.8) феноменологическая симметрия действительно выражается уравнением (1.9).

Решение. Используя известное правило перемножения квадратных матриц и их определителей, представим уравнение (1.9) в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_i & y_i & x_i^2 + y_i^2 & 1 & 0 \\ x_j & y_j & x_j^2 + y_j^2 & 1 & 0 \\ x_k & y_k & x_k^2 + y_k^2 & 1 & 0 \\ x_l & y_l & x_l^2 + y_l^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & -2x_i & -2x_j & -2x_k & -2x_l \\ 0 & -2y_i & -2y_j & -2y_k & -2y_l \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_i^2 + y_i^2 & x_j^2 + y_j^2 & x_k^2 + y_k^2 & x_l^2 + y_l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (1.10)$$

так как левые части уравнений (1.9) и (1.10) совпадают для метрической

функции (1.8). Убедимся в этом, перемножив, например, в левой части уравнения (1.10) вторую строку первого определителя на третий столбец второго: $-2x_i x_j - 2y_i y_j + x_i^2 + y_i^2 + x_j^2 + y_j^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = f(i, j)$. Оба перемножаемых определителя, имея нулевой столбец и нулевую строку, заведомо равны нулю, и их произведение, совпадающее с определителем Кэли-Менгера в левой части уравнения (1.9), также равно нулю. Это и доказывает справедливость уравнения (1.9), которое является тождеством по восьми координатам $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l$ четырех точек i, j, k, l .

Геометрический смысл соотношения (1.9) состоит в том, что объем тетраэдра с вершинами, лежащими на плоскости, равен нулю. В соответствии с терминологией Ю.И. Кулакова [18] соотношение (1.9), справедливое для любой четверки $\langle i, j, k, l \rangle$, выражает феноменологическую симметрию евклидовой плоскости ранга 4.

По метрической функции (1.8) можно найти множество движений плоскости Евклида, то есть таких гладких и обратимых ее преобразований

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y), \quad (1.11)$$

удовлетворяющих условию $\partial(\lambda, \sigma)/\partial(x, y) \neq 0$, относительно которых эта функция сохраняется: $f(i', j') = f(i, j)$. Действительно, если преобразование (1.11) является движением, то для его функций λ и σ получаем функциональное уравнение

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2,$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$, $\sigma(i) = \sigma(x_i, y_i)$. Сводя это уравнение к системе функционально-дифференциальных соотношений, можно найти все его решения [46]:

$$\lambda(x, y) = ax - \varepsilon by + c, \quad \sigma(x, y) = bx + \varepsilon ay + d, \quad (1.12)$$

где $\varepsilon = \pm 1$; $a^2 + b^2 = 1$, c, d – произвольные постоянные.

Множество всех движений (1.11) с функциями (1.12) является группой, определяющей групповую симметрию плоскости Евклида, в которую входят как собственные движения с $\varepsilon = 1$, так и несобственные с $\varepsilon = -1$. Все собственные движения составляют связную локальную группу преобразований, которую можно записать в следующем виде:

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi + c, \quad y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi + d. \quad (1.13)$$

Аддитивные параметры c, d задают параллельный перенос вдоль координатных осей, а угловой параметр φ – поворот относительно начала координат в плоскости Евклида.

С другой стороны, трехпараметрическая группа преобразований (1.13) координатной плоскости (x, y) задает на ней по Ф.Клейну [15] евклидову геометрию. В частности, метрическая функция $f(i, j)$ может быть найдена решением функционального уравнения

$$f(x'_i, y'_i, x'_j, y'_j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$$

как двухточечный инвариант группы движений (1.13). Общее решение этого уравнения совпадает с метрической функцией (1.8) с точностью до преобразования, задаваемого произвольной гладкой функцией ψ одной переменной:

$$f(i, j) = \psi((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2).$$

Полученный результат на примере плоскости Евклида устанавливает эквивалентность групповой и феноменологической симметрий, что подтверждает теорему 1.3.1.

Другими примерами связи феноменологической и групповой симметрий могут служить плоскость Минковского, плоскость Лобачевского, симплектическая плоскость и т.д.

1.5 Методы классификации феноменологически симметричных геометрий и анализ полученных результатов

Одной из наиболее важных задач при исследовании феноменологически симметричных геометрий является их классификация. Это объясняется тем, что сами функции (1.2), задающие такие геометрии, и уравнения (1.1), выражающие их феноменологическую симметрию, могут иметь содержательную физическую интерпретацию.

К настоящему времени построены полные классификации одномерных, двумерных и трехмерных феноменологически симметричных геометрий соответствующих рангов 3, 4 и 5, а также двуметрических, триметрических и четырехметрических феноменологически симметричных геометрий минимального ранга, равного 3 (см. работы Г.Г. Михайличенко [45], [46], В.Х. Лева [31], В.А. Кырова [24]). Другие классификации еще не построены, так как не найдены новые более эффективные методы решения подобных задач.

Основными же методами классификации феноменологически симметричных геометрий являются групповой и аналитический методы, которые были предложены Г.Г. Михайличенко в теории физических структур (см. работы [44], [45] и [34]).

Основу группового метода классификации составляет, установленная Г.Г. Михайличенко эквивалентность групповой и феноменологической симметрий в геометрии (см. работы [37], [43]), суть которой была изложена в § 1.3.

Групповой метод классификации феноменологически симметричных геометрий состоит в определении всех соответствующих локальных групп Ли преобразований многообразия и их алгебр Ли, между кото-

рыми имеется взаимно однозначное соответствие (см. работы [36], [39]). В данном методе метрические функции феноменологически симметричных геометрий являются невырожденными двухточечными инвариантами соответствующих групп преобразований исходного многообразия. Задача классификации таких геометрий предполагает предварительную полную классификацию групп преобразований с определенным числом параметров (см. работы [36], [42]). Однако с ростом размерности многообразия, числа компонент метрической функции и ранга феноменологической симметрии предварительное проведение классификации групп преобразований становится технически очень сложным. Например, не удастся построить классификацию шестипараметрических групп преобразований трехмерного многообразия.

Аналитический метод классификации состоит в получении функционально-дифференциальных соотношений и систем дифференциальных уравнений из анализа строения и ранга соответствующей функциональной матрицы. Решения систем дифференциальных уравнений делятся на невырожденные, согласующиеся с системой исходных аксиом и вырожденные — им не удовлетворяющие. Невырожденные решения есть метрические функции, задающие на гладком многообразии феноменологически симметричные геометрии (геометрии максимальной подвижности), которые определяются с точностью до обратимых замены локальных координат в многообразии и масштабного преобразования $\psi(f) \rightarrow f$. Таким образом, основа аналитического метода исследования состоит в применении методов классического математического анализа к специфическим задачам, возникающим при классификации феноменологически симметричных геометрий и исследовании их свойств.

Гибкое сочетание аналитического и группового методов было применено В.Х. Левом при воспроизведении классификации двумерных и

построении классификации трехмерных феноменологически симметричных геометрий [31].

В настоящее время В.А. Кыровым разрабатывается новый метод классификации феноменологически симметричных геометрий, опирающийся на представление о вложении (см. работы [27], [28]), которую поясним следующим примером. Двумерная феноменологически симметричная геометрия ранга 4, задаваемая на гладком двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ метрической функцией $g(i, j) = g(x_i, y_i, x_j, y_j)$, содержится в некоторой трехмерной феноменологически симметричной геометрии ранга 5, задаваемой на гладком трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрической функцией $f(i, j) = f(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j) = \chi(g(x_i, y_i, x_j, y_j), z_i, z_j)$. Справедливость гипотезы подтверждается сопоставлением классификаций двумерных и трехмерных феноменологически симметричных геометрий (см. работы Г.Г. Михайличенко [46] и В.Х. Лева [31]). В частности, метрическая функция трехмерного пространства Евклида $f(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$ содержит метрическую функцию плоскости Евклида $g(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$, то есть $f(i, j) = g(i, j) + (z_i - z_j)^2$.

Вопрос о необходимости применения разных методов классификации феноменологически симметричных геометрий является существенным, поскольку, во-первых, не во всех случаях при построении таких классификаций можно ограничиться только одним методом; во-вторых, применение разных методов в проведении классификации таких геометрий позволяет судить о полноте полученных ранее результатов. Например, классификации двумерных феноменологически симметричных геометрий, а также двуметрических и триметрических геометрий, были построены групповым методом, а трехмерные феноменологически симметричные геометрии методом, предложенным В.Х. Левом. С другой сто-

роны, классификация двумерных геометрий была позже воспроизведена В.Х. Левом [31] методом, отличным от группового. Эти соображения естественно привели автора к задаче уточнения или подтверждения классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 3, которая ранее была построена групповым методом (см. монографию Г.Г. Михайличенко [46]). Разработка аналитического метода классификации и его применение к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий было осуществлено автором настоящего исследования (см. главу 4) и опубликовано в работах [2*], [11*].

Глава 2

Аналитические методы определения групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий

Вторая глава диссертации посвящена разработке аналитических методов решения функциональных уравнений для нахождения полных локальных групп движений трех гельмгольцевых и симплицальной двумерных геометрий, а также всех их невырожденных двухточечных инвариантов. В диссертации Г.Г. Михайличенко [40], только для одной из них, а именно дуальногельмгольцевой двумерной геометрии, проведено доказательство, в котором было использовано сильное дополнительное условие о совпадении функций, задающих движение в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ разных точек i и j . Это условие не позволяет утверждать, что найденная для этой геометрии локальная группа движений полна, то есть содержит всевозможные движения. Разработанный автором аналитический метод решения функциональных уравнений на множество движений, свободный от указанного условия, позволяет установить в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ совпадающие действия одной и той же группы, а также

полноту найденных групп движений. Исследования в отношении двумерных гельмгольцевых геометрий также проводились В.А. Кыровым. В своей работе [23] он без доказательства приводит группы их движений, которые использует для построения дифференциальной геометрии двумерных гельмгольцевых многообразий.

2.1 Феноменологически симметричные двумерные геометрии и их классификация

В соответствие с § 1.1 главы 1 определим феноменологически симметричную двумерную геометрию ($s = 1, n = 2$).

Имеется гладкое двумерное многообразие $\mathfrak{M}_2$, открытое и плотное подмногообразие $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$, а также гладкая функция $f : \mathfrak{S}_f \rightarrow R$, сопоставляющая каждой паре точек $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ некоторое вещественное число $f(i, j) \in R$, отображение $F : \mathfrak{M}_2^4 \rightarrow R^6$, и гладкая класса C^2 функция $\Phi : E \rightarrow R$, определенная в некоторой области $E \subset R^6$, содержащей точку $z = F(\langle i, j, k, l \rangle)$, что в ней $\text{grad}\Phi \neq 0$ и множество $F(U(\langle i, j, k, l \rangle))$, где $U(\langle i, j, k, l \rangle)$ – окрестность четверки $\langle i, j, k, l \rangle$, является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть имеет место функциональная связь:

$$\Phi(f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(j, k), f(j, l), f(k, l)) = 0 \quad (2.1)$$

для всех четверок из $U(\langle i, j, k, l \rangle)$.

Двухточечную функцию f , как и выше (см. § 1.1 главы 1), будем называть *метрической функцией*, не требуя, однако, выполнения для нее аксиом обычной (см., например, Колмогорова А.Н. [16]) метрики.

Определение 2.1.1. Гладкую функцию f , для которой выполняется аксиома 1.1.3 при $s = 1, n = 2$ будем называть *невыврожденной*.

Данные построения поясняются рис. 2.1 и рис. 2.2.

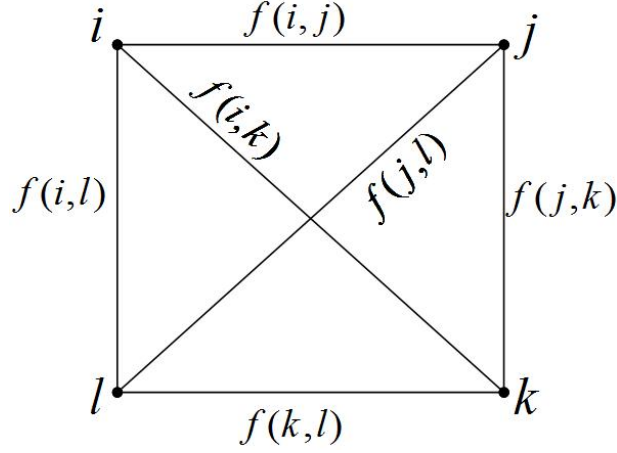


Рис. 2.1: Схема построения отображения F

Согласно аксиоме 1.1.4 из § 1.1 главы 1 множество значений композиции $\Phi \circ F$ функций Φ и F в R содержит единственную точку – *ноль*.

Если (x, y) – локальные координаты в двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$, то для метрической функции f в некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ каждой пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ можно записать ее локальное координатное представление:

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (2.2)$$

где, например, x_i, y_i – координаты точки $i \in \mathfrak{M}_2$.

В координатном представлении условие невырожденности метрической функции (2.2) выражается следующими неравенствами:

$$\frac{\partial(f(i, k), f(i, l))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f(k, j), f(l, j))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0 \quad (2.3)$$

для открытого и плотного в $\mathfrak{M}_2^3$ множества троек $\langle i, k, l \rangle$ и $\langle k, l, j \rangle$.

Используя выражение (2.2), запишем локальное координатное представление построенного выше отображения F :

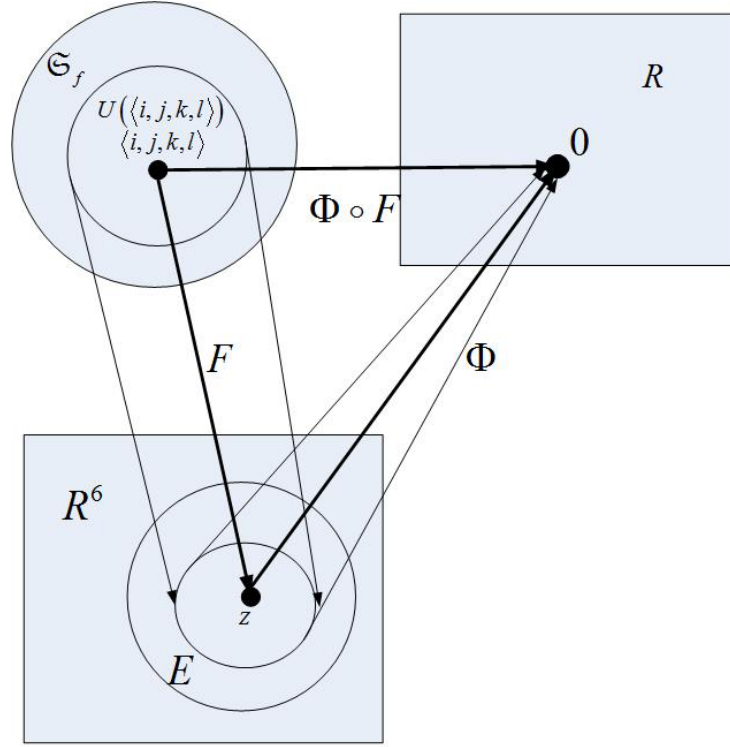


Рис. 2.2: Диаграмма отображений для феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 4

$$\left. \begin{aligned} f(i, j) &= f(x_i, y_i, x_j, y_j), \\ f(i, k) &= f(x_i, y_i, x_k, y_k), \\ f(i, l) &= f(x_i, y_i, x_l, y_l), \\ f(j, k) &= f(x_j, y_j, x_k, y_k), \\ f(j, l) &= f(x_j, y_j, x_l, y_l), \\ f(k, l) &= f(x_k, y_k, x_l, y_l) \end{aligned} \right\}, \quad (2.4)$$

функциональная матрица которой имеет шесть строк и восемь столбцов. Поскольку число функций в системе (2.4) меньше числа координат точек кортежа $\langle i, j, k, l \rangle$, наличие связи (2.1) является нетривиальным фактом.

Согласно Теореме 1.1.1 §1.1, доказательство которой содержится в монографии [46], ранг функциональной матрицы отображения F в двумерном случае равен 5.

Плоскость Евклида с метрической функцией (1.8) и функциональ-

ной связью (1.9), выражающей ее феноменологическую симметрию, которая была приведена в качестве примера в § 1.4, является одной из таких геометрий. Далее, следуя работе [35] и монографиям [44], [46], приведем классификацию феноменологически симметричных двумерных геометрий, построенную Г.Г. Михайличенко.

Теорема 2.1.1. *С точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ и в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y) невырожденная метрическая функция f , задающая на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ феноменологически симметричную геометрию ранга четыре со связью (2.1), может быть представлена одним из следующих одиннадцати канонических выражений:*

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \quad (2.5)$$

$$f(i, j) = \sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j, \quad (2.6)$$

$$f(i, j) = \operatorname{sh} y_i \operatorname{sh} y_j \cos(x_i - x_j) - \operatorname{ch} y_i \operatorname{ch} y_j, \quad (2.7)$$

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2, \quad (2.8)$$

$$f(i, j) = \operatorname{ch} y_i \operatorname{ch} y_j \cos(x_i - x_j) - \operatorname{sh} y_i \operatorname{sh} y_j, \quad (2.9)$$

$$f(i, j) = x_i y_j - x_j y_i, \quad (2.10)$$

$$f(i, j) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \quad (2.11)$$

$$f(i, j) = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\beta \operatorname{Ar}(\operatorname{c}) \operatorname{th} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \quad (2.12)$$

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 \exp \left(2 \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \quad (2.13)$$

$$f(i, j) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \quad (2.14)$$

$$f(i, j) = \frac{(x_i - x_j)^2 + \varepsilon_i y_i^2 + \varepsilon_j y_j^2}{y_i y_j}, \quad (2.15)$$

где $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$; $\gamma > 0$; $\varepsilon_i = 0, \pm 1$; $\varepsilon_j = 0, \pm 1$, причем не обязательно $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.

В приведенной классификации шесть выражений (2.5)–(2.10) определяют метрические функции хорошо известных двумерных геометрий: (2.5) – плоскости Евклида; (2.6) – двумерной сферы в трехмерном евклидовом пространстве; (2.7) – плоскости Лобачевского как двумерного двухполостного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве; (2.8) – плоскости Минковского; (2.9) – двумерного однополостного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве; (2.10) – симплектической плоскости.

Существование четырех метрических функций (2.11)–(2.14), задающих двумерные феноменологически симметричные геометрии ранга 4, впервые было установлено Г.Г. Михайличенко. Двумерная геометрия с метрической функцией (2.14) была названа плоскостью Гельмгольца, так как окружностью в ней является логарифмическая спираль, о чем кратко упоминает Гельмгольц в своей работе [11]. Метрическая функция (2.12) задает псевдогельмгольцеву плоскость, а метрическая функция (2.13) – дуальногельмгольцеву плоскость.

Профессор А.М. Широков (кафедра геометрии Казанского государственного университета) обратил внимание Г.Г. Михайличенко на то, что три метрические функции (2.12), (2.13), (2.14) можно записать единообразно, используя три типа комплексных чисел:

$$f(i, j) = (z_i - z_j) \overline{(z_i - z_j)} \exp 2\gamma \arg(z_i - z_j),$$

где $z = x + ey$, $\bar{z} = x - ey$, причем $e^2 = +1$, $\gamma > 0$ и дополнительно $\gamma \neq 1$ для выражения (2.12); $e^2 = 0$, $\gamma = 1$ для выражения (2.13); $e^2 = -1$, $\gamma > 0$ для выражения (2.14). Таким образом, все три возможных типа комплексных чисел на плоскости, а именно: двойные ($e^2 = +1$),

дуальные ($e^2 = 0$) и обычные ($e^2 = -1$), естественно вписались в полную классификацию двумерных феноменологически симметричных геометрий ранга 4.

Метрическая функция (2.11) задает так называемую симплициальную плоскость, название которой было подсказано автору классификации (2.5) – (2.15) известным геометром Р.И. Пименовым, в исследованиях которого такое выражение встречалось [49]. Последнее выражение (2.15) определяет метрическую функцию, задающую феноменологически симметричную геометрию на несвязном двумерном многообразии, на связных компонентах которого будет либо симплектическая плоскость ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0$), либо плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = +1$), либо двумерный однополостной гиперboloид ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = -1$).

Полное доказательство теоремы 2.1.1 можно найти в монографиях [44], [46].

Феноменологическую симметрию этих одиннадцати геометрий (2.5)–(2.15) можно установить по рангу функциональной матрицы для шести функций $f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(j, k), f(j, l), f(k, l)$, специальным образом зависящих от восьми переменных – координат $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l$ четырех точек кортежа $\langle i, j, k, l \rangle$, который, как показывают программы Matlab, Maple равен 5, что свидетельствует о наличии функциональной связи. Что же касается самого уравнения (2.1), то в явном виде оно найдено для всех двумерных геометрий [46], кроме гельмгольцевых, задаваемых метрическими функциями (2.12), (2.13) и (2.14).

2.2 Функциональное уравнение для определения полной группы движений

Пусть метрическая функция

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (2.16)$$

удовлетворяющая условиям аксиом 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 из §1.1. при $s = 1$, $n = 2$, задает геометрию на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$.

Гладкое локально обратимое преобразование, то есть локальный диффеоморфизм, многообразия $\mathfrak{M}_2$

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y), \quad (2.17)$$

удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial(\lambda(x, y), \sigma(x, y))}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad (2.18)$$

называется *движением*, если оно сохраняет метрическую функцию (2.16):

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (2.19)$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$, $\sigma(i) = \sigma(x_i, y_i)$.

Равенство (2.19) при известном координатном представлении (2.16) есть *функциональное уравнение* на множество движений. Решая это уравнение, находим все возможные движения, совокупность которых является группой преобразований многообразия.

Запишем определение 1.2.1 из § 1.2 главы 1 для двумерной геометрии.

Определение 2.2.1. Будем говорить, что метрическая функция f задает на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ геометрию, *наделенную групповой симметрией* степени 3, если, кроме аксиом 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 из

§ 1.1 главы 1 при $s = 1, n = 2$, дополнительно выполняется следующая аксиома:

Аксиома 2.2.1. Существует открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2$ множество, для каждой точки i которого задано эффективное гладкое действие трехмерной локальной группы Ли в некоторой окрестности $U(i)$, такое, что действия ее в окрестностях $U(i), U(j)$ двух точек i, j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$ и что метрическая функция $f(i, j)$ является двухточечным инвариантом соответствующей группы преобразований окрестности $U(i) \times U(j)$.

Группа преобразований, о которой говорится в аксиоме 2.2.1, определяет локальную подвижность жестких фигур в двумерном пространстве $\mathfrak{M}_2$, аналогичную подвижности твердых тел в плоскости Евклида. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть, так как, хотя локальные действия группы G^3 определены согласно аксиоме 2.2.1 в некоторой окрестности каждой точки открытого и плотного в $\mathfrak{M}_2$ множества, может оказаться, что на всем этом множестве действует только единичный элемент группы. Множество пар $\langle i, j \rangle$, для которых метрическая функция f определена и является двухточечным инвариантом группы локальных преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$, очевидно, открыто и плотно в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$. Будем также говорить, что метрическая функция допускает трехмерную локальную группу Ли локальных движений.

Степень групповой симметрии двумерной геометрии, задаваемой метрической функцией (2.16) устанавливается по числу независимых и непрерывных параметров группы движений. Если эта степень равна 3, то согласно теореме 1.2.1 из § 1.2 главы 1 при $s = 1, n = 2$ метрическая функция (2.16) на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ задает феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.

2.3 Решение функционального уравнения для определения полной группы движений плоскости Гельмгольца

В приведенной выше классификации двумерных феноменологически симметричных геометрий ранга 4 (см. теорему 2.1.1) присутствует плоскость Гельмгольца, задаваемая на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ метрической функцией (2.14). Явный вид уравнения (2.1), напоминаем, для нее не известен, однако его существование подтверждается рангом функциональной матрицы, который равен 5.

Целью настоящего параграфа является разработка аналитического метода решения функционального уравнения (2.19) в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ разных точек i и j относительно обратимых преобразований (2.17) для нахождения множества всех движений плоскости Гельмгольца. Напомним, что группа движений плоскости Гельмгольца была приведена без доказательства Г.Г. Михайличенко в диссертации (1990 г.) [40] и использовалась В.А. Кыровым в исследованиях по построению дифференциальной геометрии двумерного гельмгольцевого многообразия [23].

По теореме 1.2.1 из § 1.2 главы 1 при $s = 1$, $n = 2$ плоскость Гельмгольца наделена групповой симметрией степени 3. Убедимся в этом.

Запишем для нее функциональное уравнение (2.19) на множество движений:

$$\begin{aligned} ((\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2) \exp \left(2\gamma \arctg \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)} \right) = \\ = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $\gamma > 0$ – параметр семейства.

Изложим аналитический метод решения функционального уравнения (2.20), опубликованный автором исследования в работе [1*], содержание которого представлено в рамках доказательства теоремы, сформулированной Г.Г. Михайличенко в его диссертации [40] без доказательства.

Теорема 2.3.1. *Множество всех движений плоскости Гельмгольца есть трехпараметрическая группа ее преобразований*

$$x' = ax - by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.21)$$

где $(a^2 + b^2) \exp \left(2\gamma \arctg \frac{b}{a} \right) = 1$; $\gamma > 0$ – параметр семейства.

Проведем доказательство теоремы 2.3.1 без дополнительного условия о совпадении функций λ , σ , входящих в функциональное уравнение (2.20) и описывающих множество движений, в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ разных точек i и j .

Доказательство. ([1*]). Продифференцируем уравнение (2.20) по координатам x_j, y_j точки j и разделим почленно на него соотношения, полученные в результате дифференцирования:

$$\left. \begin{aligned} & (\lambda_x(j) + \gamma\sigma_x(j)) \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} + \\ & + (\sigma_x(j) - \gamma\lambda_x(j)) \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{(x_i - x_j) - \gamma(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \\ & (\lambda_y(j) + \gamma\sigma_y(j)) \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} + \\ & + (\sigma_y(j) - \gamma\lambda_y(j)) \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{(x_i - x_j)\gamma + (y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

В полученных равенствах введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \lambda_x(j) &= \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial x_j}, \quad \lambda_y(j) = \frac{\partial \lambda(x_j, y_j)}{\partial y_j}, \\ \sigma_x(j) &= \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial x_j}, \quad \sigma_y(j) = \frac{\partial \sigma(x_j, y_j)}{\partial y_j}. \end{aligned}$$

Равенства (2.22) рассмотрим как систему алгебраических уравнений относительно дробей

$$\frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2}, \quad \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2}.$$

Определитель этой системы

$$\Delta(j) = \begin{vmatrix} \lambda_x(j) + \gamma\sigma_x(j) & \sigma_x(j) - \gamma\lambda_x(j) \\ \lambda_y(j) + \gamma\sigma_y(j) & \sigma_y(j) - \gamma\lambda_y(j) \end{vmatrix} = (1 + \gamma^2) \frac{\partial(\lambda(j), \sigma(j))}{\partial(x_j, y_j)}$$

согласно условию (2.18) отличен от нуля, и поэтому система может быть решена методом Крамера:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \\ & \frac{\sigma_y(j) - \gamma\lambda_y(j) - \gamma(\sigma_x(j) - \gamma\lambda_x(j))}{\Delta(j)} \times \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - \\ & - \frac{\gamma(\sigma_y(j) - \gamma\lambda_y(j)) + \sigma_x(j) - \gamma\lambda_x(j)}{\Delta(j)} \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \\ & \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \\ & \frac{\gamma(\lambda_x(j) + \gamma\sigma_x(j)) - \lambda_y(j) - \gamma\sigma_y(j)}{\Delta(j)} \times \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} + \\ & + \frac{\gamma(\lambda_y(j) + \gamma\sigma_y(j)) + \lambda_x(j) + \gamma\sigma_x(j)}{\Delta(j)} \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Запишем эти решения в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} &= \frac{au}{u^2 + \vartheta^2} + \frac{g\vartheta}{u^2 + \vartheta^2}, \\ \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} &= \frac{bu}{u^2 + \vartheta^2} + \frac{h\vartheta}{u^2 + \vartheta^2}, \end{aligned} \right\}, \quad (2.24)$$

введя обозначения разностей переменных

$$u = x_i - x_j, \quad \vartheta = y_i - y_j \quad (2.25)$$

и коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_y(j) - \gamma\lambda_y(j) - \gamma(\sigma_x(j) - \gamma\lambda_x(j))}{\Delta(j)} &= a, \\ \frac{\gamma(\lambda_x(j) + \gamma\sigma_x(j)) - \lambda_y(j) - \gamma\sigma_y(j)}{\Delta(j)} &= b, \\ -\frac{\gamma(\sigma_y(j) - \gamma\lambda_y(j)) + \sigma_x(j) - \gamma\lambda_x(j)}{\Delta(j)} &= g, \\ \frac{\gamma(\lambda_y(j) + \gamma\sigma_y(j)) + \lambda_x(j) + \gamma\sigma_x(j)}{\Delta(j)} &= h. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Согласно этим обозначениям, переменные u, ϑ независимы, а коэффициенты a, b, g, h зависят от координат точки j . Из выражений (2.26) получаем:

$$ha - bg = \frac{1 + \gamma^2}{\Delta(j)} \neq 0.$$

Из (2.24) найдем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} &= \frac{(au + g\vartheta)^2 + (bu + h\vartheta)^2}{(u^2 + \vartheta^2)^2}, \\ \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)} &= \frac{bu + h\vartheta}{au + g\vartheta}, \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

которые подставим в исходное функциональное уравнение (2.20):

$$\exp\left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{bu + h\vartheta}{au + g\vartheta}\right) = \frac{(au + g\vartheta)^2 + (bu + h\vartheta)^2}{u^2 + \vartheta^2} \exp\left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{\vartheta}{u}\right),$$

откуда после простых преобразований получаем тождество

$$\begin{aligned} 2\gamma \operatorname{arctg} \frac{bu^2 + (h - a)u\vartheta - g\vartheta^2}{u^2 + (g + b)u\vartheta + h\vartheta^2} &= \\ = \ln \frac{(a^2 + b^2)u^2 + 2(ag + bh)u\vartheta + (g^2 + h^2)\vartheta^2}{u^2 + \vartheta^2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Тождество (2.28) продифференцируем по переменной u :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(2(bh + ga)u\vartheta^2 + (bg - ha + b^2 + a^2)u^2\vartheta + (h^2 - ha + g^2 + bg)\vartheta^3)}{(a^2 + b^2)u^4 + 2(bh + ga)(u\vartheta^3 + \vartheta u^3) + (a^2 + b^2 + g^2 + h^2)u^2\vartheta^2 + (g^2 + h^2)\vartheta^4} &= \\ = \frac{(ag + bh)\vartheta^3 + (a^2 + b^2 - g^2 - h^2)u\vartheta^2 - (ag + bh)u^2\vartheta}{(a^2 + b^2)u^4 + 2(bh + ga)(u\vartheta^3 + \vartheta u^3) + (a^2 + b^2 + g^2 + h^2)u^2\vartheta^2 + (g^2 + h^2)\vartheta^4}, \end{aligned}$$

после чего убираем общий знаменатель и приводим подобные слагаемые:

$$(2\gamma(bh + ga) - (a^2 + b^2 - g^2 - h^2))u\vartheta^2 + ((bg - ha + b^2 + a^2)\gamma + (ag + bh))\vartheta u^2 + (\gamma(h^2 - ha + g^2 + bg) - (ag + bh))\vartheta^3 = 0. \quad (2.29)$$

Следствием тождества (2.29) являются связи между коэффициентами выражений (2.27):

$$\begin{aligned} 2\gamma(bh + ga) - (a^2 + b^2 - g^2 - h^2) &= 0, \\ (bg - ha + b^2 + a^2)\gamma + (ag + bh) &= 0, \\ \gamma(h^2 - ha + g^2 + bg) - (ag + bh) &= 0, \end{aligned}$$

которые выполняются одновременно с неравенством $ha - bg \neq 0$. Вычитая из второй связи третью и подставляя результат в первую, приходим к следующему соотношению:

$$bh + ag = 0. \quad (2.30)$$

Тогда из первой связи, с учетом (2.30), получаем

$$a^2 + b^2 - g^2 - h^2 = 0. \quad (2.31)$$

Если сложить вторую связь с третьей, то с учетом $ha - bg \neq 0$ получим

$$a^2 + b^2 + g^2 + h^2 = 2(ha - bg) \neq 0. \quad (2.32)$$

Складывая (2.31) и (2.32) устанавливаем, что

$$a^2 + b^2 \neq 0. \quad (2.33)$$

Учитывая связь (2.31), неравенство (2.33) и обозначения разностей переменных u , ϑ (2.25), первое из выражений (2.27) приводим к следующему виду:

$$\frac{1}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 + (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{a^2 + b^2}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

с учетом чего из (2.24) получаем

$$\left. \begin{aligned} \lambda(i) - \lambda(j) &= \frac{a}{a^2 + b^2}(x_i - x_j) - \frac{b}{a^2 + b^2}(y_i - y_j), \\ \sigma(i) - \sigma(j) &= \frac{b}{a^2 + b^2}(x_i - x_j) + \frac{a}{a^2 + b^2}(y_i - y_j). \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Дифференцируя результаты (2.34) по координатам точки i , разделим переменные:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x(i) &= \frac{a(j)}{a(j)^2 + b(j)^2} = \text{const} = \tilde{a}, \\ \sigma_x(i) &= \frac{b(j)}{a(j)^2 + b(j)^2} = \text{const} = \tilde{b}. \end{aligned} \right\}$$

Введение новых констант $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ с последующим их переобозначением символами a, b позволяет в выражениях (2.34) осуществлять дополнительное разделение переменных:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(i) - ax_i + by_i &= \lambda(j) - ax_j + by_j = \text{const} = c, \\ \sigma(i) - bx_i - ay_i &= \sigma(j) - bx_j - ay_j = \text{const} = d, \end{aligned} \right\},$$

то есть

$$\lambda(x, y) = ax - by + c, \quad \sigma(x, y) = bx + ay + d. \quad (2.35)$$

Дополнительная связь на константы a, b , входящие в выражения (2.35), возникает при их подстановке в исходное функциональное уравнение (2.20):

$$(a^2 + b^2) \exp \left(2\gamma \arctg \frac{b}{a} \right) = 1, \quad (2.36)$$

где $\gamma > 0$ – параметр семейства.

Функции (2.35) со связью параметров (2.36), имеющие один и тот же вид в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ разных точек i и j , как общее решение функционального уравнения (2.20), по уравнениям (2.17) определяют трехпараметрическое множество всех движений (2.21) плоскости Гельмгольца. Это множество является полной локальной группой движений по их композиции, так как выполняются все аксиомы локальной группы преобразований [50]. $\square$

Таким образом, плоскость Гельмгольца, действительно, наделена групповой симметрией степени 3. Отметим также, что проведенное доказательство теоремы 2.3.1 устанавливает полноту полученной аналитическим методом группы движений плоскости Гельмгольца.

2.4 Решение функциональных уравнений для определения полных групп движений псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей

В данном параграфе для двух оставшихся гельмгольцевых геометрий, задаваемых метрическими функциями (2.12), (2.13) (см. теорему 2.1.2 § 2.1), решается функциональное уравнение (2.19) и находятся все движения.

Для начала рассмотрим псевдогельмгольцеву плоскость, задаваемую на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ метрической функцией (2.12). Запишем для нее функциональное уравнение (2.19) на множество движений:

$$\begin{aligned} & ((\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2) \exp \left(2\beta Ar(c)th \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)} \right) = \\ & = ((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\beta Ar(c)th \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right), \end{aligned} \quad (2.37)$$

где $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$ – параметр семейства. В экспоненте выбирается функция $Arth$, если аргумент по модулю меньше единицы и функция $Arcth$, если он по модулю больше единицы.

Напомним, что группа движений псевдогельмгольцевой плоскости была приведена без доказательства Г.Г. Михайличенко в диссертации [40] и использовалась В.А. Кыровым в его исследованиях по построению дифференциальной геометрии двумерного псевдогельмгольцевого многообразия [23].

Изложим аналитический метод решения функционального уравнения (2.37), опубликованный автором исследования в работе [1*].

Теорема 2.4.1. *Множество всех движений псевдогельмгольцевой плоскости есть трехпараметрическая группа ее преобразований*

$$x' = ax + by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.38)$$

где $(a^2 - b^2) \exp \left(2\beta \operatorname{Ar}(c) \operatorname{th} \frac{b}{a} \right) = 1$; $\beta > 0$ и $\beta \neq 1$ – параметр семейства.

Как и в случае плоскости Гельмгольца, доказательство теоремы 2.4.1 проведем без сильного дополнительного условия о совпадении функций λ , σ , входящих в функциональное уравнение (2.37) и описывающих множество движений, в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ разных точек i и j .

Доказательство. ([1*]). Дифференцируя уравнение (2.37) по координатам точки j и деля на него почленно результаты дифференцирования, получаем два равенства:

$$\left. \begin{aligned} & (\lambda_x(j) + \beta\sigma_x(j)) \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} - \\ & - (\sigma_x(j) + \beta\lambda_x(j)) \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{(x_i - x_j) - \beta(y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2}, \\ & (\lambda_y(j) + \beta\sigma_y(j)) \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} - \\ & - (\sigma_y(j) + \beta\lambda_y(j)) \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{\beta(x_i - x_j) - (y_i - y_j)}{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2}, \end{aligned} \right\}, \quad (2.39)$$

которые рассмотрим как систему алгебраических уравнений относительно дробей

$$\frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2}, \quad \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2}.$$

Поскольку определитель системы (2.39)

$$\Delta(j) = \begin{vmatrix} \lambda_x(j) + \beta\sigma_x(j) & -(\sigma_x(j) + \beta\lambda_x(j)) \\ \lambda_y(j) + \beta\sigma_y(j) & -(\sigma_y(j) + \beta\lambda_y(j)) \end{vmatrix} = (\beta^2 - 1) \frac{\partial(\lambda(j), \sigma(j))}{\partial(x_j, y_j)}$$

вследствие $\beta \neq 1$ и условия (2.18) отличен от нуля, она может быть решена методом Крамера:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \\ & = \frac{\beta(\sigma_x(j) + \beta\lambda_x(j)) - (\sigma_y(j) + \beta\lambda_y(j))}{\Delta(j)} \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2} + \\ & + \frac{\beta(\sigma_y(j) + \beta\lambda_y(j)) - (\sigma_x(j) + \beta\lambda_x(j))}{\Delta(j)} \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2}, \\ & \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \\ & = \frac{\beta(\lambda_x(j) + \beta\sigma_x(j)) - (\lambda_y(j) + \beta\sigma_y(j))}{\Delta(j)} \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2} + \\ & + \frac{\beta(\lambda_y(j) + \beta\sigma_y(j)) - (\lambda_x(j) + \beta\sigma_x(j))}{\Delta(j)} \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

Запишем решения (2.40) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} &= \frac{au}{u^2 - v^2} + \frac{g\vartheta}{u^2 - v^2}, \\ \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} &= \frac{bu}{u^2 - v^2} + \frac{h\vartheta}{u^2 - v^2}, \end{aligned} \right\}, \quad (2.41)$$

используя обозначения переменных (2.25) и вводя новые обозначения коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta(\sigma_x(j) + \beta\lambda_x(j)) - (\sigma_y(j) + \beta\lambda_y(j))}{\Delta(j)} &= a, \\ \frac{\beta(\lambda_x(j) + \beta\sigma_x(j)) - (\lambda_y(j) + \beta\sigma_y(j))}{\Delta(j)} &= b, \\ \frac{\beta(\sigma_y(j) + \beta\lambda_y(j)) - (\sigma_x(j) + \beta\lambda_x(j))}{\Delta(j)} &= g, \\ \frac{\beta(\lambda_y(j) + \beta\sigma_y(j)) - (\lambda_x(j) + \beta\sigma_x(j))}{\Delta(j)} &= h, \end{aligned} \right\}, \quad (2.42)$$

зависящие от координат точки j . Из выражений (2.42) получаем, что

$ha - bg \neq 0$. Из решений (2.41) найдем выражения

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} &= \frac{(au + g\vartheta)^2 - (bu + h\vartheta)^2}{(u^2 - \vartheta^2)^2}, \\ \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)} &= \frac{bu + h\vartheta}{au + g\vartheta}, \end{aligned} \right\}, \quad (2.43)$$

которые подставим в исходное функциональное уравнение (2.37):

$$\begin{aligned} 2\beta ar(c)th \frac{bu^2 + (h - a)u\vartheta - g\vartheta^2}{au^2 + (g - b)u\vartheta - h\vartheta^2} = \\ = \ln \frac{(a^2 - b^2)u^2 + 2(ag - bh)u\vartheta + (g^2 - h^2)\vartheta^2}{u^2 - \vartheta^2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Тождество (2.44) продифференцируем по переменной u :

$$\begin{aligned} \frac{2\beta((b(g - b) - a(h - a))u^2\vartheta + (2ag - 2bh)u\vartheta^2 + (g(g - b) - h(h - a))\vartheta^3)}{(a^2 - b^2)u^4 + 2(ag - bh)u^3\vartheta + (g^2 - h^2)\vartheta^2u^2 - (a^2 - b^2)u^2\vartheta^2 - 2(ag - bh)u\vartheta^3 - (g^2 - h^2)\vartheta^3} = \\ = \frac{-2(ag - bh)\vartheta u^2 - 2(a^2 - b^2 + g^2 - h^2)u\vartheta^2 - 2(ag - bh)\vartheta^3}{(a^2 - b^2)u^4 + 2(ag - bh)u^3\vartheta + (g^2 - h^2)\vartheta^2u^2 - (a^2 - b^2)u^2\vartheta^2 - 2(ag - bh)u\vartheta^3 - (g^2 - h^2)\vartheta^3}, \end{aligned}$$

после чего умножим на общий знаменатель и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} (2\beta(bg - b^2 - ah + a^2) + 2(ag - bh))u^2\vartheta + \\ + 2((ag - bh)2\beta + (a^2 - b^2 + g^2 - h^2))\vartheta^2u + \\ + (2\beta(g^2 - bg - h^2 + ha) + 2(ag - bh))\vartheta^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Следствием тождества (2.45) являются следующие связи на коэффициенты выражений (2.43)

$$\begin{aligned} 2\beta(bg - b^2 - ah + a^2) + 2(ag - bh) &= 0, \\ (ag - bh)2\beta + (a^2 - b^2 + g^2 - h^2) &= 0, \\ 2\beta(g^2 - bg - h^2 + ha) + 2(ag - bh) &= 0. \end{aligned}$$

С учетом неравенства $ha - bg \neq 0$ эти связи приводятся к виду

$$ag - bh = 0, \quad a^2 - b^2 + g^2 - h^2 = 0, \quad a^2 - b^2 = h^2 - g^2 = ha - bg \neq 0.$$

Подставив вторую из них в первое выражение (2.43), получим равенство

$$\frac{1}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2 - (\sigma(i) - \sigma(j))^2} = \frac{a^2 - b^2}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

с учетом чего из (2.41) находим

$$\left. \begin{aligned} \lambda(i) - \lambda(j) &= \frac{a}{a^2 - b^2}(x_i - x_j) + \frac{b}{a^2 - b^2}(y_i - y_j), \\ \sigma(i) - \sigma(j) &= \frac{b}{a^2 - b^2}(x_i - x_j) + \frac{a}{a^2 - b^2}(y_i - y_j). \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

Дифференцируя результаты (2.46) по координатам точки i , разделяем переменные:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x(i) &= \frac{a(j)}{a(j)^2 - b(j)^2} = \text{const} = \tilde{a}, \\ \sigma_x(i) &= \frac{b(j)}{a(j)^2 - b(j)^2} = \text{const} = \tilde{b}. \end{aligned} \right\}$$

Введение новых констант $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ с последующим их переобозначением символами a, b позволяет записать результат разделения переменных в (2.46) в следующем виде:

$$\lambda(x, y) = ax + by + c, \quad \sigma(x, y) = bx + ay + d. \quad (2.47)$$

Дополнительная связь на константы выражений (2.47) возникает при их подстановке в исходное функциональное уравнение (2.37):

$$(a^2 - b^2) \exp \left(2\beta \operatorname{Ar}(c) \operatorname{th} \frac{b}{a} \right) = 1, \quad (2.48)$$

где β – положительная константа, отличная от единицы (параметр семейства). Напомним, что при этом выбирается функция Arth , если аргумент по модулю меньше единицы и выбирается функция Arcth , если он по модулю больше единицы.

Функции (2.47) со связью параметров (2.48), имеющие один и тот же вид в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ разных точек i и j , как общее решение функционального уравнения (2.37), по уравнениям (2.17) определяют трехпараметрическое множество всех движений (2.38) псевдогильбертовой плоскости. Это множество является полной локальной группой

по композиции движений, причем выполняются все аксиомы локальной группы преобразований [50], как и в случае плоскости Гельмгольца. $\square$

Далее запишем функциональное уравнение для дуальногелльмгольцевой плоскости, которая задается на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ метрической функцией (2.13) (см. теорему 2.1.2):

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^2 \exp \left(2 \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)} \right) = (x_i - x_j)^2 \exp \left(2 \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right). \quad (2.49)$$

Напомним, что группа движений дуальногелльмгольцевой плоскости была приведена Г.Г. Михайличенко в его диссертации [40] с нестрогим доказательством и использовалась В.А. Кыровым в его исследованиях по построению дифференциальной геометрии двумерного дуальногелльмгольцевого многообразия [23].

Изложим аналитический метод решения функционального уравнения (2.49), опубликованный автором исследования в работе [1*], содержание которого представлено в рамках доказательства теоремы, сформулированной Г.Г. Михайличенко в его диссертации [40], в доказательстве которой им было введено сильное дополнительное условие о совпадении функций λ , σ , входящих в функциональное уравнение (2.49) и описывающих множество движений, в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ разных точек i и j .

Теорема 2.4.2. *Множество всех движений дуальногелльмгольцевой плоскости есть трехпараметрическая группа ее преобразований*

$$x' = ax + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.50)$$

где $a^2 \exp(2b/a) = 1$.

Проведем доказательство теоремы 2.4.2 без дополнительного условия, о котором говорилось выше, на функции λ и σ .

Доказательство. ([1*]). Воспользуемся представленным выше методом для решения функционального уравнения (2.49). Дифференцируя его по координатам точки j и деля на него результаты дифференцирования, получаем два равенства:

$$\left. \begin{aligned} & (\lambda_x(j) + \sigma_x(j)) \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} - \lambda_x(j) \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} = \\ &= \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2} - \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2}, \\ & (\lambda_y(j) + \sigma_y(j)) \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} - \lambda_y(j) \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} = \\ &= \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Рассмотрим равенства (2.51) как систему алгебраических уравнений относительно дробей

$$\frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2}, \quad \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2}.$$

Поскольку определитель системы (2.51)

$$\Delta(j) = \begin{vmatrix} \lambda_x(j) + \sigma_x(j) & -\lambda_x(j) \\ \lambda_y(j) + \sigma_y(j) & -\lambda_y(j) \end{vmatrix} = \frac{\partial(\lambda(j), \sigma(j))}{\partial(x_j, y_j)}$$

вследствие условия (2.18) отличен от нуля, она может быть решена методом Крамера:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} &= \frac{\lambda_x(j) - \lambda_y(j)}{\Delta(j)} \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2} + \frac{\lambda_y(j)}{\Delta(j)} \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2}, \\ \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} &= \frac{\lambda_x(j) + \sigma_x(j) - \lambda_y(j) - \sigma_y(j)}{\Delta(j)} \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2} + \\ &+ \frac{\lambda_y(j) + \sigma_y(j)}{\Delta(j)} \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

Учитывая обозначения переменных (2.25) и вводя новые обозначения для коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda_x(j) - \lambda_y(j)}{\Delta(j)} &= a(j) = a, & \frac{\lambda_x(j) + \sigma_x(j) - \lambda_y(j) - \sigma_y(j)}{\Delta(j)} &= b(j) = b, \\ \frac{\lambda_y(j)}{\Delta(j)} &= g(j) = g, & \frac{\lambda_y(j) + \sigma_y(j)}{\Delta(j)} &= h(j) = h, \end{aligned} \right\},$$

для которых выполняется неравенство $ha - bg \neq 0$, решения (2.52) запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda(i) - \lambda(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} &= \frac{au}{u^2} + \frac{g\vartheta}{u^2}, \\ \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{(\lambda(i) - \lambda(j))^2} &= \frac{bu}{u^2} + \frac{h\vartheta}{u^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Из (2.53) найдем выражения

$$\frac{1}{\lambda(i) - \lambda(j)} = \frac{au + g\vartheta}{u^2}, \quad \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{\lambda(i) - \lambda(j)} = \frac{bu + h\vartheta}{au + g\vartheta}. \quad (2.54)$$

С учетом выражений (2.54) исходное функциональное уравнение (2.49) примет вид

$$2 \frac{u(bu + h\vartheta) - \vartheta(au + g\vartheta)}{u(au + g\vartheta)} = \ln \frac{(au + g\vartheta)^2}{u^2}. \quad (2.55)$$

Равенство (2.55) продифференцируем по переменной u :

$$\begin{aligned} & \frac{(2bu + h\vartheta - a\vartheta)(au^2 + gu\vartheta) - 2bau^3 - 2hau^2\vartheta + 2a^2u^2\vartheta}{u^2(au + g\vartheta)^2} + \\ & + \frac{2agu\vartheta^2 - bgu^2\vartheta - ghuv^2 + agu\vartheta^2 + g^2\vartheta^3}{u^2(au + g\vartheta)^2} = \\ & = \frac{a^2u^3 + agu^2\vartheta - a^2u^3 - 2agu^2\vartheta - g^2u\vartheta^2}{u^2(au + g\vartheta)^2}, \end{aligned}$$

то есть

$$(bg - ah + ag + a^2)u^2\vartheta + (2ag + g^2)u\vartheta^2 + g^2\vartheta^3 = 0,$$

откуда следует

$$bg - ah + ag + a^2 = 0, \quad 2ag + g^2 = 0, \quad g^2 = 0.$$

Поскольку $ha - bg \neq 0$, легко находим, что

$$g = 0, \quad h = a \neq 0. \quad (2.56)$$

С учетом связей (2.56) из (2.53) получаем:

$$\lambda(i) - \lambda(j) = \frac{u}{a(j)}, \quad \sigma(i) - \sigma(j) = \frac{b(j)u}{a(j)^2} + \frac{\vartheta}{a(j)}. \quad (2.57)$$

Дифференцируя результаты (2.57) по координате x_i , с учетом того, что $u = x_i - x_j$, разделяем переменные:

$$\lambda_x(i) = \frac{1}{a(j)} = \text{const} = \tilde{a}, \quad \sigma_x(i) = \frac{b(j)}{a(j)^2} = \text{const} = \tilde{b}.$$

Введение констант $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ с последующим их переобозначением символами a , b позволяет в выражениях (2.57) осуществить дополнительное разделение переменных, после чего получаем

$$\lambda(x, y) = ax + c, \quad \sigma(x, y) = bx + ay + d. \quad (2.58)$$

Дополнительная связь на коэффициенты выражений (2.58) возникает при их подстановке в исходное функциональное уравнение (2.49):

$$a^2 \exp(2b/a) = 1. \quad (2.59)$$

Функции (2.58) со связью (2.59), имеющие один и тот же вид в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ разных точек i и j , как общее решение функционального уравнения (2.49), по уравнениям (2.17) определяют трехпараметрическое множество всех движений (2.50) дуальногельмгольцевой плоскости. Это множество является полной локальной группой по композиции движений, так как выполняются все аксиомы локальной группы преобразований [50], как и в случаях рассмотренных выше гельмгольцевой и псевдогельмгольцевой геометрий. $\square$

Таким образом, подобно плоскости Гельмгольца, дуальногельмгольцева плоскость наделена групповой симметрией степени 3. Согласно теореме 1.2.1 из §1.2 главы 1 метрические функции этих геометрий задают на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ феноменологически симметричные двумерные геометрии ранга 4. Также как и в случае плоскости Гельмгольца стоит отметить, что проведенные доказательства теорем 2.4.1 и 2.4.2 подтверждают полноту полученных аналитическим ме-

тодом групп движений псевдогельмгольцевой и дуальногельмгольцевой плоскостей.

2.5 Решение функционального уравнения для определения полной группы движений обобщенной симплициальной плоскости

В приведенной выше классификации двумерных феноменологически симметричных геометрий ранга 4 (см. теорему 2.1.2) присутствует симплициальная плоскость, задаваемая на двумерном многообразии $\mathfrak{M}_2$ метрической функцией (2.12). Запишем ее, следуя работе [35] в обобщенном виде:

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n \quad (2.60)$$

где $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0, n \neq 0, m \neq n$, причем условие $m \neq n$ исключает плоскость Минковского. Отметим, что группа движений симплициальной плоскости была приведена Г.Г. Михайличенко в диссертации (1990 г) [40] без доказательства.

По теореме 1.2.1 из §1.2 главы 1 симплициальная плоскость как и в случае геометрий гельмгольцевого типа наделена групповой симметрией степени 3. Убедимся в этом.

Запишем для нее функциональное уравнение (2.19) на множество движений:

$$(\lambda(i) - \lambda(j))^m (\sigma(i) - \sigma(j))^n = (x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n, \quad (2.61)$$

где $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0, n \neq 0, m \neq n$.

Изложим аналитический метод решения функционального уравнения (2.61), опубликованный автором исследования в работе [3*], содержа-

ние которого представлено в рамках доказательства теоремы, сформулированной Г.Г. Михайличенко в его диссертации [40] без доказательства.

Теорема 2.5.1. *Множество всех движений симплицальной плоскости есть трехпараметрическая группа ее преобразований*

$$x' = ax + c, \quad y' = by + d, \quad (2.62)$$

где $a^m b^n = 1$ ($m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0, n \neq 0, m \neq n$).

Доказательство. ([3*]). Воспользуемся примененным выше методом для решения функционального уравнения (2.61). Дифференцируя его по координатам x_j, y_j точки j и деля на него результаты дифференцирования, получим два равенства

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{\lambda(i) - \lambda(j)} \lambda_x(j) + \frac{n}{\sigma(i) - \sigma(j)} \sigma_x(j) &= \frac{m}{x_i - x_j}, \\ \frac{m}{\lambda(i) - \lambda(j)} \lambda_y(j) + \frac{n}{\sigma(i) - \sigma(j)} \sigma_y(j) &= \frac{n}{y_i - y_j}. \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

Рассмотрим равенства (2.63) как систему алгебраических уравнений относительно дробей

$$\frac{1}{\lambda(i) - \lambda(j)}, \quad \frac{1}{\sigma(i) - \sigma(j)}.$$

Поскольку определитель системы (2.63)

$$\Delta(j) = \begin{vmatrix} m\lambda_x(j) & n\sigma_x(j) \\ m\lambda_y(j) & n\sigma_y(j) \end{vmatrix} = mn \frac{\partial(\lambda(j), \sigma(j))}{\partial(x_j, y_j)}$$

вследствие условия (2.18) отличен от нуля, она может быть решена методом Крамера:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda(i) - \lambda(j)} &= \frac{mn}{\Delta(j)} \sigma_y(j) \frac{1}{x_i - x_j} - \frac{n^2}{\Delta(j)} \sigma_x(j) \frac{1}{y_i - y_j}, \\ \frac{1}{\sigma(i) - \sigma(j)} &= -\frac{m^2}{\Delta(j)} \lambda_y(j) \frac{1}{x_i - x_j} + \frac{mn}{\Delta(j)} \lambda_x(j) \frac{1}{y_i - y_j}. \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

Учитывая обозначения переменных (2.25) и вводя новые обозначения для коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} \frac{mn}{\Delta(j)} \sigma_y(j) &= a(j) = a, & -\frac{m^2}{\Delta(j)} \lambda_y(j) &= b(j) = b, \\ -\frac{n^2}{\Delta(j)} \sigma_x(j) &= g(j) = g, & \frac{mn}{\Delta(j)} \lambda_x(j) &= h(j) = h, \end{aligned} \right\},$$

для которых выполняется неравенство $ha - bg \neq 0$, запишем решения (2.63) в виде

$$\left. \begin{aligned} \lambda(i) - \lambda(j) &= \frac{u\vartheta}{gu + a\vartheta}, \\ \sigma(i) - \sigma(j) &= \frac{u\vartheta}{hu + b\vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

Подставим выражения (2.65) в исходное функциональное уравнение (2.61):

$$\frac{u^m \vartheta^m}{(gu + a\vartheta)^m} \frac{u^n \vartheta^n}{(hu + b\vartheta)^n} = u^m \vartheta^n,$$

откуда после некоторых преобразований получаем тождество

$$(gu + a\vartheta)^m (hu + b\vartheta)^n = u^n \vartheta^m. \quad (2.66)$$

Равенство (2.66) продифференцируем по переменной u :

$$\frac{mg(gu + a\vartheta)^m (hu + b\vartheta)^n}{gu + a\vartheta} + \frac{nh(gu + a\vartheta)^m (hu + b\vartheta)^n}{hu + b\vartheta} = \frac{nu^n \vartheta^m}{u},$$

откуда с учетом тождества (2.66) получаем:

$$mghu^2 + (m - n)bgu\vartheta - nab\vartheta^2 = 0. \quad (2.67)$$

Дифференцируя тождество (2.67) по переменным u и ϑ , находим следующие ограничения на коэффициенты выражений (2.65):

$$hg = 0, \quad bg = 0, \quad ab = 0,$$

которые имеют место наряду с неравенством $ha - bg \neq 0$, откуда следует, что

$$g = 0, \quad b = 0, \quad h \neq 0, \quad a \neq 0.$$

При этом значительно упрощаются выражения (2.65) и с учетом, введенных выше, обозначений $u = x_i - x_j$, $v = y_i - y_j$ (2.25) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(i) - \lambda(j) &= \frac{x_i - x_j}{a}, \\ \sigma(i) - \sigma(j) &= \frac{y_i - y_j}{h}, \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

в которых, напомним, $a = a(j) \neq 0$, $h = h(j) \neq 0$.

Дифференцируя результаты (2.68) по координатам точки i , разделяем переменные:

$$\lambda_x(i) = \frac{1}{a(j)} = \text{const} = \tilde{a}, \quad \sigma_y(i) = \frac{1}{h(j)} = \text{const} = \tilde{b}.$$

Введение констант $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ с последующим их переобозначением символами a , b позволяет в выражениях (2.68) осуществить дополнительное разделение переменных:

$$\begin{aligned} \lambda(x_i, y_i) - ax_i &= \lambda(x_j, y_j) - ax_j = \text{const} = c, \\ \sigma(x_i, y_i) - by_i &= \sigma(x_j, y_j) - by_j = \text{const} = d, \end{aligned}$$

то есть

$$\lambda(x, y) = ax + c, \quad \sigma(x, y) = by + d. \quad (2.69)$$

Дополнительная связь на коэффициенты выражений (2.69) возникает при их подстановке в исходное функциональное уравнение (2.61):

$$a^m b^n = 1. \quad (2.70)$$

Функции (2.69) со связью параметров (2.70) как общее решение функционального уравнения (2.61), по уравнениям (2.17) определяют трехпараметрическое множество всех движений (2.62) симплицальной плоскости. Это множество является полной локальной группой по композиции движений, так как выполняются все аксиомы локальной группы преобразований [50], как и в случаях рассмотренных выше гельмгольцевых геометрий. $\square$

Заметим, что при доказательстве теоремы 2.5.1, как и при доказательствах теорем 2.3.1, 2.4.1, 2.4.2, было установлено, что функции λ и σ (2.69), описывающие множество движений, в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ разных точек i и j имеют один и тот же вид. Проведенное доказательство, в котором отсутствуют дополнительные условия, позволяет утверждать, что группа движений (2.69) полна.

2.6 Метрическая функция как двухточечный инвариант группы движений

Пусть задана трехпараметрическая группа движений двумерной геометрии, то есть таких гладких и обратимых преобразований многообразия $\mathfrak{M}_2$:

$$x' = \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3), \quad y' = \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3), \quad (2.71)$$

с $\partial(\lambda, \sigma)/\partial(x, y) \neq 0$, которые сохраняют ее метрическую функцию (2.16):

$$f(x'_i, y'_i, x'_j, y'_j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (2.72)$$

Условие (2.72) при известной группе преобразований (2.71) является *функциональным уравнением относительно метрической функции* (2.16). Решая это уравнение, можно найти с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ все невырожденные двухточечные инварианты группы преобразований (2.71).

Рассмотрим задачу определения всех невырожденных двухточечных инвариантов групп движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и обобщенной симплициальной плоскостей, для которых в предыдущих параграфах 2.3, 2.4, 2.5 были найдены соответствующие полные локальные группы движений (см. теоремы

2.3.1, 2.4.1, 2.4.2, 2.5.1). Очевидно, что метрические функции плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и симплической плоскостей являются двухточечными инвариантами соответствующих групп движений. Однако, возникает вопрос о полноте множества двухточечных инвариантов групп преобразований (2.21), (2.38), (2.50), (2.62) двумерного многообразия.

Задача 2.6.1. Для однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований плоскости Гельмгольца (2.21) найти все невырожденные двухточечные инварианты $f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$.

Результат решения задачи 2.6.1 представим в виде теоремы, содержание и доказательство которой опубликовано автором исследования в работе [4*]:

Теорема 2.6.1. ([4*]) *Каждый невырожденный двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$*

$$x' = ax - by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.73)$$

где $(a^2 + b^2) \exp \left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right) = 1$, γ – положительная константа (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией (2.14) плоскости Гельмгольца, задающей на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.

Доказательство. Запишем уравнение (2.72) на двухточечный инвариант группы преобразований (2.73) двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$:

$$f(ax_i - by_i + c, bx_i + ay_i + d, ax_j - by_j + c, bx_j + ay_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (2.74)$$

Дифференцируя уравнение (2.74) по параметрам c , d и b с учетом того, что параметр a зависит от b , поскольку между ними существует

связь $(a^2 + b^2) \exp \left(2\gamma \arctg \frac{b}{a} \right) = 1$ (γ – положительная константа – параметр семейства), из которой следует $(a - \gamma b) \frac{da}{db} = -(b + \gamma a)$, получим систему дифференциальных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} &= 0, \quad \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} = 0, \\ \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} \left(-x_i \frac{b + \gamma a}{a - \gamma b} - y_i \right) + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} \left(x_i - \frac{b + \gamma a}{a - \gamma b} y_i \right) + \\ + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} \left(-x_j \frac{b + \gamma a}{a - \gamma b} - y_j \right) + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} \left(x_j - \frac{b + \gamma a}{a - \gamma b} y_j \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

где, вблизи покоя, $a - \gamma b \neq 0$, и например, $\frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} = \frac{\partial f(x'_i, y'_i, x'_j, y'_j)}{\partial x'_i}$. В системе дифференциальных соотношений (2.75) параметрам a, b, c, d придадим значения, соответствующие тождественному преобразованию: $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$, в результате чего получим систему трех линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \quad \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} (-\gamma x_i - y_i) + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} (x_i - \gamma y_i) + \\ + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} (-\gamma x_j - y_j) + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} (x_j - \gamma y_j) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

Общее решение первого и второго уравнений системы (2.76) задается, очевидно, следующим выражением:

$$f(i, j) = \Theta(u, \vartheta) = \Theta(x_i - x_j, y_i - y_j), \quad (2.77)$$

где $\Theta(u, \vartheta)$ – функция двух переменных $u = x_i - x_j$ и $\vartheta = y_i - y_j$ класса гладкости C^2 .

Подставим выражение (2.77) в третье уравнение системы (2.76)

$$-\gamma u \frac{\partial \Theta}{\partial u} - \vartheta \frac{\partial \Theta}{\partial u} + u \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} - \gamma \vartheta \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = 0. \quad (2.78)$$

Общее решение уравнения (2.78) есть функция

$$\Theta(u, \vartheta) = \chi \left[(u^2 + \vartheta^2) \exp \left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{\vartheta}{u} \right) \right], \quad (2.79)$$

где χ — функция одной переменной класса гладкости C^2 . По (2.79) и (2.77) находим невырожденный двухточечный инвариант

$$f(i, j) = \chi \left[((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right) \right],$$

с $\chi' \neq 0$, который эквивалентен метрической функции плоскости Гельмгольца (2.14), переходя в нее при гладком преобразовании $\psi(f) \rightarrow f$, где $\psi = \chi^{-1}$ есть обратная к χ функция. $\square$

Задача 2.6.2. Для однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований псевдогельмгольцевой плоскости (2.38) найти все невырожденные двухточечные инварианты $f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$.

Результат решения задачи 2.6.2, также как и в случае задачи 2.6.1 представим в виде теоремы, содержание и доказательство которой опубликовано автором исследования в работе [4*].

Теорема 2.6.2. ([4*]). *Каждый невырожденный двухточечный инвариант однопараметрического семейства трехпараметрической группы преобразований многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$*

$$x' = ax + by + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.80)$$

где $(a^2 - b^2) \exp \left(2\beta \operatorname{Ar}(c) \operatorname{th} \frac{b}{a} \right) = 1$, β — положительная константа, отличная от единицы (параметр семейства), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией (2.12) псевдогельмгольцевой плоскости, задающей на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.

Напомним, что при этом выбирается функция Arth , если аргумент

по модулю меньше единицы и функция $Arcth$, если он по модулю больше единицы.

Доказательство. Запишем уравнение (2.72) на двухточечный инвариант группы преобразований (2.80) двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$:

$$f(ax_i + by_i + c, bx_i + ay_i + d, ax_j + by_j + c, bx_j + ay_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (2.81)$$

Дифференцируя уравнение (2.81) по параметрам c , d и b с учетом того, что параметр a зависит от b , поскольку между ними существует связь $(a^2 - b^2) \exp\left(2\beta Ar(c)th\frac{b}{a}\right) = 1$ (β – положительная константа, отличная от единицы), из которой следует $(a - \beta b)\frac{da}{db} = -(b - \beta a)$, получим систему дифференциальных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} &= 0, \quad \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} = 0, \\ \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} \left(\frac{b - \beta a}{a - \beta b} x_i + y_i \right) + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} \left(x_i + \frac{b - \beta a}{a - \beta b} y_i \right) + \\ + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} \left(\frac{b - \beta a}{a - \beta b} x_j + y_j \right) + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} \left(x_j + \frac{b - \beta a}{a - \beta b} y_j \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

где, вблизи покоя, $a - \beta b \neq 0$, и, например, $\frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} = \frac{\partial f(x'_i, y'_i, x'_j, y'_j)}{\partial x'_i}$. В системе дифференциальных соотношений (2.82) параметрам a, b, c, d придадим значения, соответствующие тождественному преобразованию: $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$, в результате чего получим систему трех линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \quad \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} (-\beta x_i + y_i) + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} (x_i - \beta y_i) + \\ + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} (-\beta x_j + y_j) + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} (x_j - \beta y_j) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

Общее решение $f(i, j) = \Theta(u, v) = \Theta(x_i - x_j, y_i - y_j)$ первого и второго уравнений системы (2.83), как и в случае плоскости Гельмгольца,

подставим в ее третье уравнение

$$(\vartheta - \beta u) \frac{\partial \Theta}{\partial u} + (u - \beta \vartheta) \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = 0, \quad (2.84)$$

где, напомним, $u = x_i - x_j$ и $\vartheta = y_i - y_j$. Общее решение уравнения (2.84) есть функция

$$\Theta(u, \vartheta) = \chi \left[(u^2 - \vartheta^2) \exp \left(2\beta Ar(c) th \frac{\vartheta}{u} \right) \right], \quad (2.85)$$

где χ — функция одной переменной класса гладкости C^2 . По решению (2.85) находим невырожденный двухточечный инвариант

$$f(i, j) = \chi \left[((x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\beta Ar(c) th \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right) \right],$$

с $\chi' \neq 0$, который эквивалентен метрической функции псевдогольмгольцевой плоскости (2.12), переходя в нее при гладком преобразовании $\psi(f) \rightarrow f$, где $\psi = \chi^{-1}$ есть обратная к χ функция. $\square$

Задача 2.6.3. Для трехпараметрической группы преобразований дуальногельмгольцевой плоскости (2.50) найти все невырожденные двухточечные инварианты $f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$.

Результат решения задачи 2.6.3, также как и в случае задач 2.6.1, 2.6.2 представим в виде теоремы, содержание и доказательство которой опубликовано автором исследования в работе [4*].

Теорема 2.6.3. ([4*]) *Каждый невырожденный двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$*

$$x' = ax + c, \quad y' = bx + ay + d, \quad (2.86)$$

где $a^2 \exp(2b/a) = 1$, совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией (2.13) дуальногельмгольцевой плоскости, задающей на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.

Доказательство. Запишем уравнение (2.72) на двухточечный инвариант группы преобразований (2.86) двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$:

$$f(ax_i + c, bx_i + ay_i + d, ax_j + c, bx_j + ay_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (2.87)$$

Дифференцируя уравнение (2.87) по параметрам c , d и b с учетом того, что параметры a и b связаны соотношением $a^2 \exp(2b/a) = 1$, из которого следует равенство $(a - b) \frac{da}{db} = -a$, получим систему дифференциальных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} &= 0, \quad \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} = 0, \\ -\frac{a}{a-b} x_i \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} (x_i - \frac{a}{a-b} y_i) - \\ -\frac{a}{a-b} x_j \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} (x_j - \frac{a}{a-b} y_j) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

где, вблизи покоя, $a - b \neq 0$.

В системе дифференциальных соотношений (2.88) параметрам a, b, c, d придадим значения, соответствующие тождественному преобразованию: $a = 1, b = 0, c = 0, d = 0$, в результате чего получим систему трех линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \quad \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ -x_i \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} (x_i - y_i) - \\ -x_j \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} (x_j - y_j) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

Общее решение $f(i, j) = \Theta(u, \vartheta) = \Theta(x_i - x_j, y_i - y_j)$ первого и второго уравнений системы (2.89), как и в случае плоскости Гельмгольца совпадает с выражением (2.77). Подставим его в третье уравнение системы (2.89):

$$u \frac{\partial \Theta}{\partial u} + (u - \vartheta) \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = 0, \quad (2.90)$$

где, напомним, $u = x_i - x_j$ и $\vartheta = y_i - y_j$. Общее решение уравнения (2.90) есть функция

$$\Theta(u, \vartheta) = \chi \left[u^2 \exp \left(2 \frac{\vartheta}{u} \right) \right], \quad (2.91)$$

где χ — функция одной переменной класса гладкости C^2 . По решению (2.91) и выражению (2.77) находим невырожденный двухточечный инвариант

$$f(i, j) = \chi \left[(x_i - x_j)^2 \exp \left(2 \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right) \right],$$

с $\chi' \neq 0$, который эквивалентен метрической функции дуальногильмгольцевой плоскости (2.13), переходя в нее при гладком преобразовании $\psi(f) \rightarrow f$, где $\psi = \chi^{-1}$ есть обратная к χ функция. $\square$

Задача 2.6.4. Для трехпараметрической группы преобразований симплицальной плоскости (2.71) найти все невырожденные двухточечные инварианты $f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j)$.

Результат решения задачи 2.6.4, также как и в случае задач 2.6.1–2.6.3, представим в виде теоремы, содержание и доказательство которой опубликовано автором исследования в работе [4*].

Теорема 2.6.4. ([4*]). *Каждый невырожденный двухточечный инвариант трехпараметрической группы преобразований многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$*

$$x' = ax + c, \quad y' = by + d, \quad (2.92)$$

где $a^m b^n = 1$ ($m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$, $m \neq n$), совпадает с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрической функцией (2.60) обобщенной симплицальной плоскости, задающей на нем феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 4.

Доказательство. Запишем уравнение (2.72) на двухточечный инвариант группы преобразований (2.92) двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2 \subset R^2$:

$$f(ax_i + c, by_i + d, ax_j + c, by_j + d) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (2.93)$$

Дифференцируя уравнение (2.93) по параметрам c , d и b с учетом того, что параметры a и b связаны соотношением $a^m b^n = 1$, из которого следует равенство $\frac{m}{n} b \frac{da}{db} = -a$, получим следующую систему дифференциальных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} &= 0, & \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} &= 0, \\ -\frac{n}{m} \frac{a}{b} x_i \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} + y_i \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} - \frac{n}{m} \frac{a}{b} x_j \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} + y_j \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

В системе дифференциальных соотношений (2.94) параметрам a, b, c, d придадим значения, соответствующие тождественному преобразованию: $a = 1, b = 1, c = 0, d = 0$, в результате чего получим систему трех линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, & \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \\ \frac{n}{m} x_i \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} - y_i \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{n}{m} x_j \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} - y_j \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

Общее решение $f(i, j) = \Theta(u, \vartheta) = \Theta(x_i - x_j, y_i - y_j)$ первого и второго уравнений системы (2.95), как и в случае трех геометрий Гельмгольца, совпадает с выражением (2.77). Подставим его в третье уравнение системы (2.95):

$$\frac{n}{m} u \frac{\partial \Theta}{\partial u} - \vartheta \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = 0, \quad (2.96)$$

где, напомним, $u = x_i - x_j$ и $\vartheta = y_i - y_j$. Общее решение уравнения (2.96) есть функция

$$\Theta(u, \vartheta) = \chi[u^m \vartheta^n], \quad (2.97)$$

где χ – функция одной переменной класса гладкости C^2 . По решению (2.97) и выражению (2.77) находим невырожденный двухточечный инвариант

$$f(i, j) = \chi[(x_i - x_j)^m (y_i - y_j)^n],$$

с $\chi' \neq 0$, который эквивалентен метрической функции симплициальной плоскости (2.60), переходя в нее при гладком преобразовании $\psi(f) \rightarrow f$, где $\psi = \chi^{-1}$ есть обратная к χ функция. $\square$

Итак, все невырожденные двухточечные инварианты трехпараметрических групп преобразований (2.73), (2.80), (2.86) и (2.92) двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$, найденные в задачах 2.6.1, 2.6.2, 2.6.3 и 2.6.4, совпадают с точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ с метрическими функциями (2.14), (2.12), (2.13) и (2.60). Поэтому они задают на многообразии $\mathfrak{M}_2$ соответствующие феноменологически симметричные двумерные геометрии ранга 4 (плоскость Гельмгольца, псевдогельмгольцеву, дуальногельмгольцеву и симплициальную плоскости), содержащиеся в классификации (2.5) - (2.15) § 2.1. Всё это устанавливает полноту множества найденных двухточечных инвариантов.

Глава 3

Группы движений некоторых феноменологически симметричных трехмерных геометрий

Третья глава диссертации посвящена нахождению явных выражений групп движений для симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой, гельмгольцевой и симплициальной III типа, симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой геометрий, являющихся геометриями локальной максимальной подвижности, задаваемыми на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ соответствующими метрическими (двухточечными) функциями.

3.1 Феноменологически симметричные трехмерные геометрии и их классификация

В настоящем параграфе в соответствии с § 1.1 главы 1 определим феноменологически симметричную трехмерную геометрию.

Пусть имеется гладкое трехмерное многообразие $\mathfrak{M}_3$, а также гладкая класса C^2 функция $f : \mathfrak{S}_f \rightarrow R$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_3 \times \mathfrak{M}_3$, сопоставляющая каждой паре точек $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ некоторое вещественное число $f(i, j) \in R$.

Двухточечную функцию f , как и выше (см. § 1.1 главы 1), будем называть *метрической функцией*, не требуя, однако, выполнения для нее аксиом обычной (см., например, [16]) метрики.

Для метрической функции f будем предполагать выполнение аксиом 1.1.1 – 1.1.3 из §1.1 главы 1 при $s = 1, n = 3$.

Определение 3.1.1. Гладкую функцию f , для которой выполняется аксиома 1.1.3 при $s = 1, n = 3$ будем называть *невырожденной*.

Согласно §1.1 главы 1 для отображения $F : \mathfrak{M}_3^5 \rightarrow R^{10}$ существует гладкая класса C^2 функция $\Phi : E \rightarrow R$, определенная в некоторой области $E \subset R^{10}$, содержащей точку $z = F(\langle i, j, k, l, m \rangle)$, что в ней $\text{grad}\Phi \neq 0$ и множество $F(U(\langle i, j, k, l, m \rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть имеет место функциональная связь:

$$\Phi(f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(i, m), \dots, f(k, l), f(k, m), f(l, m)) = 0 \quad (3.1)$$

для всех пятерок из $U(\langle i, j, k, l, m \rangle)$.

Если (x, y, w) – локальные координаты в трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$, то для метрической функции f в некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ каждой пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ можно записать ее локальное координатное представление:

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, w_i, x_j, y_j, w_j), \quad (3.2)$$

где, например, x_i, y_i, w_i – координаты точки $i \in \mathfrak{M}_3$.

В координатном представлении (3.2) условие невырожденности метрической функции выражается следующими двумя неравенствами:

$$\frac{\partial(f(i, k), f(i, l), f(i, m))}{\partial(x_i, y_i, w_i)} \neq 0; \quad \frac{\partial(f(k, j), f(l, j), f(m, j))}{\partial(x_j, y_j, w_j)} \neq 0 \quad (3.3)$$

для открытых и плотных в $\mathfrak{M}_3^4$ множеств четверок $\langle i, k, l, m \rangle$ и $\langle k, l, m, j \rangle$.

Используя выражение (3.2), запишем локальное координатное пред-

ставление отображения F следующей системой функций:

$$\left. \begin{aligned} f(i, j) &= f(x_i, y_i, w_i, x_j, y_j, w_j), \\ f(i, k) &= f(x_i, y_i, w_i, x_k, y_k, w_k), \\ f(i, l) &= f(x_i, y_i, w_i, x_l, y_l, w_l), \\ f(i, m) &= f(x_i, y_i, w_i, x_m, y_m, w_m), \\ f(j, k) &= f(x_j, y_j, w_j, x_k, y_k, w_k), \\ f(j, l) &= f(x_j, y_j, w_j, x_l, y_l, w_l), \\ f(j, m) &= f(x_j, y_j, w_j, x_m, y_m, w_m), \\ f(k, l) &= f(x_k, y_k, w_k, x_l, y_l, w_l), \\ f(k, m) &= f(x_k, y_k, w_k, x_m, y_m, w_m), \\ f(l, m) &= f(x_l, y_l, w_l, x_m, y_m, w_m) \end{aligned} \right\}, \quad (3.4)$$

функциональная матрица которой имеет десять строк и пятнадцать столбцов. Поскольку число функций в системе (3.4) меньше числа координат точек кортежа $\langle i, j, k, l, m \rangle$, наличие связи (3.1) является нетривиальным фактом.

Отображение F , согласно его локальному координатному представлению (3.4), отображает окрестность $U(\langle i, j, k, l, m \rangle) \subset \mathfrak{S}_F$ в R^{10} . Матрицей этого отображения является функциональная матрица системы десяти функций (3.4) от пятнадцати переменных – координат всех точек пятерки $\langle i, j, k, l, m \rangle$, а его рангом называется ранг этой матрицы, который согласно теореме 1.1.1 из §1.1 главы 1 в трехмерном случае равен 9.

В работах [31], [32] В.Х. Лев построил первую классификацию феноменологически симметричных трехмерных геометрий, воспроизведенную в монографиях [46], [47] и позже уточненную В.А. Кыровым [30] (см. ниже):

Теорема 3.1.1. *С точностью до гладкого преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ и в надлежаще выбранной системе локальных координат (x, y, w) невы-*

рожденная метрическая функция f , задающая на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ феноменологически симметричную геометрию ранга пять со связью (3.1), может быть представлена одним из следующих шестнадцати канонических выражений:

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (w_i - w_j)^2, \quad (3.5)$$

$$f(i, j) = \sin w_i \sin w_j [\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j] + \cos w_i \cos w_j, \quad (3.6)$$

$$f(i, j) = \operatorname{sh} w_i \operatorname{sh} w_j [\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j] - \operatorname{ch} w_i \operatorname{ch} w_j, \quad (3.7)$$

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 - (w_i - w_j)^2, \quad (3.8)$$

$$f(i, j) = \operatorname{ch} w_i \operatorname{ch} w_j [\sin y_i \sin y_j \cos(x_i - x_j) + \cos y_i \cos y_j] - \operatorname{sh} w_i \operatorname{sh} w_j, \quad (3.9)$$

$$f(i, j) = \operatorname{ch} w_i \operatorname{ch} w_j [\operatorname{ch} y_i \operatorname{ch} y_j \cos(x_i - x_j) - \operatorname{sh} y_i \operatorname{sh} y_j] - \operatorname{sh} w_i \operatorname{sh} w_j, \quad (3.10)$$

$$f(i, j) = x_i y_j - x_j y_i + w_i - w_j, \quad (3.11)$$

$$f(i, j) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + w_i + w_j, \quad (3.12)$$

$$f(i, j) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \exp(w_i + w_j), \quad (3.13)$$

$$f(i, j) = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2] \exp(w_i + w_j), \quad (3.14)$$

$$f(i, j) = [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] \exp(w_i + w_j), \quad (3.15)$$

$$f(i, j) = [(x_i - x_j)^2 - (y_i - y_j)^2] \exp \left(2\delta \operatorname{Ar}(\operatorname{c}) \operatorname{th} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + w_i + w_j \right), \quad (3.16)$$

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 \exp \left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + w_i + w_j \right), \quad (3.17)$$

$$f(i, j) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \exp \left(2\gamma \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + w_i + w_j \right), \quad (3.18)$$

$$f(i, j) = \frac{(x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2 + \varepsilon_i w_i^2 + \varepsilon_j w_j^2}{w_i w_j}, \quad (3.19)$$

$$f(i, j) = \operatorname{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + w_i + w_j. \quad (3.20)$$

где $\delta > 0$ и $\delta \neq 1$; $\gamma > 0$; $\varepsilon_i = 0, \pm 1$; $\varepsilon_j = 0, \pm 1$, причем не обязательно $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.

В приведенной классификации первые пятнадцать геометрий (3.5) – (3.19), найденные В.Х. Левом, были дополнены геометрией с метрической функцией (3.20) В.А. Кыровым [30]. Метрические функции (3.5) – (3.11) задают хорошо известные трехмерные геометрии: (3.5) – пространство Евклида как естественное расширение плоскости Евклида (2.6); (3.6) – трехмерную сферу в четырехмерном евклидовом пространстве; (3.7) – пространство Лобачевского как трехмерный двухполостный гиперболоид в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве сигнатуры $\langle + + + - \rangle$; (3.8) – пространство Минковского как естественное расширение плоскости Минковского (2.9); (3.9) – трехмерный однополостной гиперболоид I в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве той же сигнатуры $\langle + + + - \rangle$; (3.10) – трехмерный однополостной гиперболоид II в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве, но другой сигнатуры $\langle + + - - \rangle$; (3.11) – симплектическое пространство как естественное расширение симплектической плоскости (2.11) на нечетную размерность, равную трем.

Следующие семь геометрий, задаваемые функциями (3.12) – (3.18), никогда геометриями ранее не изучались и только недавно некоторые из них были исследованы В.А. Кыровым [29]: (3.12) – симплицальное пространство I как аддитивное трехмерное феноменологически симметричное расширение симплицальной плоскости с метрической функцией (2.12); (3.13) – симплицальное пространство II как мультипликативное трехмерное феноменологически симметричное расширение симплицальной плоскости (2.12); (3.14) – особое трехмерное феноменологически симметричное расширение плоскости Минковского (2.9); (3.15) – осо-

бое трехмерное феноменологически симметричное расширение плоскости Евклида (2.6); (3.16) – псевдогельмгольцево пространство как трехмерное феноменологически симметричное расширение псевдогельмгольцевой плоскости (2.13); (3.17) – дуальногельмгольцево пространство как трехмерное феноменологически симметричное расширение дуальногельмгольцевой плоскости (2.14); (3.18) – пространство Гельмгольца (собственно гельмгольцева трехмерная геометрия) как феноменологически симметричное расширение плоскости Гельмгольца (2.15). Метрическая функция (3.19) задает феноменологически симметричную геометрию на несвязном трехмерном многообразии, на связных компонентах которого будет либо расширения (3.14), (3.15), либо сферы (3.7), (3.9), (3.10) в четырехмерных псевдоевклидовых пространствах. Последняя функция (3.20) задает симплицальную III типа трехмерную геометрию.

Феноменологическую симметрию всех шестнадцати геометрий (3.5)–(3.20) можно установить по рангу функциональной матрицы для десяти функций $f(i, j), f(i, k), f(i, l), f(i, m), f(j, k), f(j, l), f(j, m), f(k, l), f(k, m), f(l, m)$, специальным образом зависящих от пятнадцати переменных – координат $x_i, y_i, w_i, x_j, y_j, w_j, x_k, y_k, w_k, x_l, y_l, w_l, x_m, y_m, w_m$ пяти точек кортежа $\langle i, j, k, l, m \rangle$, который, как показывают вычисления с помощью программ Matlab, Maple, равен 9, что свидетельствует о наличии функциональной связи (3.1). Что же касается самого уравнения (3.1), то в явном виде оно найдено почти для всех трехмерных геометрий (см. [47], [5*], [13*]), кроме трех гельмгольцевых, задаваемых метрическими функциями (3.16), (3.17), (3.18) и двух симплицальных геометрий, задаваемых метрическими функциями (3.12) и (3.20).

Используя замену координат $x \rightarrow x+y, y \rightarrow x-y, w \rightarrow -w/(1+\delta)$ и преобразование $f \rightarrow 4f^{-(1+\delta)}$, перепишем метрическую функцию (3.16)

псевдогельмгольцевой трехмерной геометрии в следующем виде:

$$f(i, j) = \frac{(y_i - y_j)^\beta}{x_i - x_j} \exp(w_i + w_j), \quad (3.21)$$

где $\beta = (\delta - 1)/(\delta + 1)$, причем $-1 < \beta < 1$ и $\beta \neq 0$.

В совместной работе автора с В.А. Кыровым [6*] были также предложены другие формы записи метрических функций с использованием комплексных чисел для собственно гельмгольцевой и симплициальной III типа трехмерных геометрий, с использованием дуальных чисел для симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий.

Функции (3.18), (3.20) можно переписать, используя комплексные обозначения:

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy, \operatorname{arctg}(v) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iv}{1 - iv}, v^a = e^{a \operatorname{Ln} v}, i^2 = -1.$$

Тогда для собственно гельмгольцевой геометрии имеем

$$\tilde{f}(i, j) = \frac{(\bar{z}_i - \bar{z}_j)^\alpha}{z_i - z_j} \exp(u_i + u_j), \quad (3.22)$$

где $\tilde{f} = f^{\frac{1}{i\gamma-1}}$, $w = u(i\gamma-1)$, $\alpha = \frac{\gamma-i}{\gamma+i}$, а для симплициальной геометрии III типа —

$$\tilde{f}(i, j) = \frac{\bar{z}_i - \bar{z}_j}{z_i - z_j} \exp(u_i + u_j), \quad (3.23)$$

где $\tilde{f} = e^{-2if}$, $-2iw = u$. Заметим, что по своему общему строению функции (3.13) и (3.23), (3.21) и (3.22) совпадают.

Аналогично можно переписать функции (3.12) и (3.17), используя дуальные числа. Напомним, что дуальное число — это число вида $z = x + \varepsilon y$, $\varepsilon^2 = 0$, а $\bar{z} = x - \varepsilon y$ — сопряженное дуальное число, $z\bar{z} = x^2$, $\bar{z}/z = 1 - 2\varepsilon y/x$, $z/\bar{z} = 1 + 2\varepsilon y/x$. Тогда для симплициальной геометрии I типа имеем

$$\tilde{f}(i, j) = \frac{\bar{z}_i - \bar{z}_j}{z_i - z_j} + v_i + v_j, \quad (3.24)$$

где $\tilde{f} = 1 - 2\varepsilon f$, $-2\varepsilon w = v$, а для дуальногелмгольцевой геометрии —

$$\tilde{f}(i, j) = \frac{\bar{z}_i - \bar{z}_j}{z_i - z_j} - 2\varepsilon \ln \left[\overline{(z_i - z_j)}(z_i - z_j) \right] + v_i + v_j, \quad (3.25)$$

где $\tilde{f} = 1 - 2\varepsilon \ln f$, $-2\varepsilon w = v$.

3.2 Алгебры Ли групп движений симплициальных и гелмгольцевых трехмерных геометрий

Пусть группа Ли G действует эффективно и дифференцируемо в области $U \subset R^3$ [5]. Это означает, что задано дифференцируемое отображение

$$\lambda : U \times G \rightarrow U', \quad (3.26)$$

где $U' \subset R^3$ — также открытая область.

Определение 3.2.1. Действие λ_a , определяемое произвольным элементом $a \in G$, называется *локальным движением* в геометрии с метрической функцией f из списка (3.5) — (3.20), если для любых точек $i, j \in U$, таких что $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$, $\langle \lambda_a(i), \lambda_a(j) \rangle \in \mathfrak{S}_f$, выполняется равенство

$$f(\lambda_a(i), \lambda_a(j)) = f(i, j), \quad (3.27)$$

причем $\mathfrak{S}_f \subseteq R^3 \times R^3$ — область определения функции f .

Множество всех движений (3.26) есть группа Ли преобразований, для которой метрическая функция f согласно равенству (3.27) является двухточечным инвариантом. Алгебра Ли этой группы преобразований состоит из операторов

$$X = X_1 \partial_x + X_2 \partial_y + X_3 \partial_w, \quad (3.28)$$

где $X_\mu = X_\mu(x, y, w)$ — дифференцируемая функция в U , $\mu = 1, 2, 3$.

Через операторы (3.28) записывается условие локальной инвариантности

функции f [48]:

$$X(i)f(i, j) + X(j)f(i, j) = 0, \quad (3.29)$$

которое выполняется в окрестностях $U(i) \subset U$ и $U(j) \subset U$ точек i и j .

Для функции f из списка (3.5) – (3.21) равенство (3.29) является функциональным уравнением на коэффициенты X_1, X_2, X_3 , решая которое, можно найти базисные операторы алгебры Ли группы движений соответствующей геометрии. Приведем базисные операторы алгебр Ли групп движений для симплицальных и гельмгольцевых трехмерных геометрий в виде теоремы, доказательство которой дано в работе [22].

Теорема 3.2.1. *Базис алгебр Ли групп движений геометрий максимальной подвижности с функциями (3.12), (3.13), (3.17), (3.18), (3.20), (3.21) составляют операторы $X^1, X^2, X^3, X^4, X^5, X^6$, которые в координатной окрестности U имеют соответственно следующий вид: для (3.12):*

$$\partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, -2x\partial_y + \partial_w, -x^2\partial_y + x\partial_w, -x^2\partial_x - 2xy\partial_y + y\partial_w; \quad (3.30)$$

для (3.13):

$$\partial_x, \partial_y, 2x\partial_x + \partial_w, -2y\partial_y + \partial_w, x^2\partial_x + x\partial_w, -y^2\partial_y + y\partial_w; \quad (3.31)$$

для (3.17):

$$\begin{aligned} &\partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y - \partial_w, -2x\partial_y + \partial_w, \\ &-x^2\partial_y + x\partial_w, -x^2\partial_x - 2xy\partial_y + (y + 2x)\partial_w; \end{aligned} \quad (3.32)$$

для (3.18):

$$\left\{ \begin{aligned} &\partial_x, \partial_y, -(y + \gamma x)\partial_x + (x - \gamma y)\partial_y, \\ &(\gamma y - x)\partial_x - (y + \gamma x)\partial_y + (1 + \gamma^2)\partial_w, \\ &(-x^2 + y^2 + 2\gamma xy)\partial_x - (\gamma(x^2 - y^2) + 2xy)\partial_y + 2(1 + \gamma^2)x\partial_w, \\ &(\gamma(-x^2 + y^2) - 2xy)\partial_x + (x^2 - y^2 - 2\gamma xy)\partial_y + 2(1 + \gamma^2)y\partial_w; \end{aligned} \right. \quad (3.33)$$

для (3.20):

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y, y\partial_x - x\partial_y + \frac{1}{2}\partial_w, \\ 2xy\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y + x\partial_w, (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y - y\partial_w; \end{array} \right. \quad (3.34)$$

для (3.21):

$$\partial_x, \partial_y, 2x\partial_x + \partial_w, -2y\partial_y + \beta\partial_w, x^2\partial_x + x\partial_w, -y^2\partial_y + \beta y\partial_w, \quad (3.35)$$

где $\gamma > 0$, $-1 < \beta < 1$ и $\beta \neq 0$.

Представим базисные операторы (3.33) и (3.34) в комплексном виде.

Для этого воспользуемся равенствами

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy, \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y).$$

Тогда от действительных базисных операторов (3.33) переходим к комплексным: $Z^1 = (X^1 - iX^2)/2$, $Z^2 = (X^1 + iX^2)/2$, $Z^3 = (iX^4 - X^3)/(\gamma - i)$, $Z^4 = (X^3 + iX^4)/(\gamma + i)$, $Z^5 = (iX^5 - X^6)/2(\gamma - i)$, $Z^6 = (iX^5 + X^6)/2(\gamma + i)$, которые имеют вид

$$\partial_z, \partial_{\bar{z}}, 2z\partial_z + \partial_u, -2\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \alpha\partial_u, z^2\partial_z + z\partial_u, -\bar{z}^2\partial_{\bar{z}} + \alpha\bar{z}\partial_u, \quad (3.36)$$

где $-iw = u(\gamma + i)$, $\alpha = (\gamma - i)/(\gamma + i)$.

Аналогично от действительного базиса (3.34) переходим к комплексному:

$Z^1 = (X^1 - iX^2)/2$, $Z^2 = (X^1 + iX^2)/2$, $Z^3 = X^3 + iX^4$, $Z^4 = -X^3 + iX^4$, $Z^5 = (X^6 + iX^5)/2$, $Z^6 = (iX^5 - X^6)/2$, который запишем в виде

$$\partial_z, \partial_{\bar{z}}, 2z\partial_z + \partial_u, -2\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \partial_u, z^2\partial_z + z\partial_u, -\bar{z}^2\partial_{\bar{z}} + \bar{z}\partial_u, \quad (3.37)$$

где $i\omega = 2u$.

Заметим, что выражения базисных операторов алгебры Ли (3.36) гильмгольцевой геометрии переходят соответственно в выражения базисных операторов алгебры Ли (3.37) симплициальной III типа геометрии при $\alpha = 1$.

3.3 Группы движений симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой трехмерных геометрий

В приведенной выше классификации трехмерных феноменологически симметричных геометрий, являющихся геометриями локальной максимальной подвижности (см. теорему 3.1.1) присутствуют симплициальная II типа и псевдогельмгольцевая геометрии, задаваемые на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрическими (двухточечными) функциями (3.13) и (3.16). Явный вид уравнения (3.1) для псевдогельмгольцевой трехмерной геометрии неизвестен, однако его существование подтверждается рангом функциональной матрицы, который равен 9. Для симплициальной II типа трехмерной (3.13) геометрии явный вид уравнения (3.1) был найден в работе [5*] и имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} f(i, j)f(k, m)f(l, m) + f(k, l)f(i, m)f(j, m) & f(i, j)f(k, l) & 1 \\ f(i, k)f(j, m)f(l, m) + f(j, l)f(i, m)f(k, m) & f(i, k)f(j, l) & 1 \\ f(j, k)f(i, m)f(l, m) + f(i, l)f(j, m)f(k, m) & f(j, k)f(i, l) & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.38)$$

Целью данного параграфа является нахождение групп движений симплициальной II типа и псевдогельмгольцевой трехмерных геометрий. Согласно теоремам 1.3.1 и 1.3.2 эти геометрии наделены групповой симметрией степени 6.

Метод нахождения групп движений состоит в применении экспоненциального отображения

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \text{Exp}(tX) \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

где $t \in R$ – параметр, X – оператор алгебры Ли группы движений, а

$$\text{Exp}(tX) = 1 + tX + \frac{t^2 X^2}{2!} + \dots,$$

которое позволяет найти однопараметрические подгруппы, соответствующие базисным операторам алгебр Ли групп движений. Явные выражения группы движений находятся композицией ее однопараметрических подгрупп.

Найдем явные выражения групп движений для симплицальной II типа и псевдогельмгольцевой трехмерных геометрий, опубликованные в работах [6*, 16*] и представленные в следующей теореме.

Теорема 3.3.1. ([6*]). *Группы движений симплицальной II типа и псевдогельмгольцевой трехмерных геометрий с функциями (3.13) и (3.21) являются результатом действий группы $SL_2(R) \otimes SL_2(R)$ в пространстве R^3 , имея соответственно следующий вид:*

$$x' = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}, \quad y' = \frac{a_2y + b_2}{c_2y + d_2}, \quad w' = w + \ln \frac{c_2y + d_2}{c_1x + d_1}, \quad (3.40)$$

$$x' = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}, \quad y' = \frac{a_2y + b_2}{c_2y + d_2}, \quad w' = w + \beta \ln(c_2y + d_2) - \ln(c_1x + d_1), \quad (3.41)$$

где $a_1d_1 - b_1c_1 = a_2d_2 - b_2c_2 = 1$, $a_1, d_1, b_1, c_1, a_2, d_2, b_2, c_2 - const \in R$, $-1 < \beta < 1$ и $\beta \neq 0$.

Доказательство. Запишем экспоненциальное отображение (3.39) для базисных операторов алгебры Ли (3.31) симплицальной II типа трехмерной геометрии.

В результате экспоненциального отображения для базисного оператора $X^1 = \partial_x$ получим явные выражения для первой однопараметрической подгруппы:

$$\begin{aligned} x' &= \text{Exp}(t_1 X^1)(x) = x + t_1 \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{t_1^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} x \right) \right) + \dots = x + t_1, \\ y' &= \text{Exp}(t_1 X^1)(y) = y + t_1 \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{t_1^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} y \right) \right) + \dots = y, \\ w' &= \text{Exp}(t_1 X^1)(w) = w + t_1 \frac{\partial}{\partial x} w + \frac{t_1^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} w \right) \right) + \dots = w. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Применяя экспоненциальное отображение для второго базисного оператора $X^2 = \partial_y$, получим явные выражения для второй однопараметрической подгруппы:

$$\begin{aligned} x' &= \text{Exp}(t_2 X^2)(x) = x + t_2 \frac{\partial}{\partial y} x + \frac{t_2^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} x \right) \right) + \dots = x, \\ y' &= \text{Exp}(t_2 X^2)(y) = y + t_2 \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{t_2^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} y \right) \right) + \dots = y + t_2, \\ w' &= \text{Exp}(t_2 X^2)(w) = w + t_2 \frac{\partial}{\partial y} w + \frac{t_2^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} w \right) \right) + \dots = w. \end{aligned} \quad (3.43)$$

В результате применения экспоненциального отображения для третьего базисного оператора $X^3 = 2x\partial_x + \partial_w$ получим явные выражения для третьей однопараметрической подгруппы:

$$\begin{aligned} x' &= \text{Exp}(t_3 X^3)(x) = x + t_3 \left(2x \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial w} x \right) + \frac{t_3^2}{2!} \left(2x \frac{\partial}{\partial x} \left(2x \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial w} x \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(2x \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial w} x \right) \right) + \dots = x(1 + 2xt_3 + 4x \frac{t_3^2}{2!} + 8x \frac{t_3^3}{3!} + \dots) = e^{2t_3} x, \\ y' &= \text{Exp}(t_3 X^3)(y) = y + t_3 \left(2x \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial w} y \right) + \frac{t_3^2}{2!} \left(2x \frac{\partial}{\partial x} \left(2x \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial w} y \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(2x \frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial w} y \right) \right) + \dots = y, \\ w' &= \text{Exp}(t_3 X^3)(w) = w + t_3 \left(2x \frac{\partial}{\partial x} w + \frac{\partial}{\partial w} w \right) + \frac{t_3^2}{2!} \left(2x \frac{\partial}{\partial x} \left(2x \frac{\partial}{\partial x} w + \frac{\partial}{\partial w} w \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(2x \frac{\partial}{\partial x} w + \frac{\partial}{\partial w} w \right) \right) + \dots = w + t_3. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Применяя экспоненциальное отображение для остальных базисных операторов X^4 , X^5 , X^6 , получим явные выражения однопараметрических подгрупп.

Для оператора $X^4 = -2y\partial_y + \partial_w$:

$$\begin{aligned} x' &= \text{Exp}(t_4 X^4)(x) = x + t_4 \left(-2y \frac{\partial}{\partial y} x + \frac{\partial}{\partial w} x \right) + \\ &+ \frac{t_4^2}{2!} \left(-2y \frac{\partial}{\partial y} \left(-2y \frac{\partial}{\partial y} x + \frac{\partial}{\partial w} x \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(-2y \frac{\partial}{\partial y} x + \frac{\partial}{\partial w} x \right) \right) + \dots = x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y' &= \text{Exp}(t_4 X^4)(y) = y + t_4(-2y \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial w} y) + \\
&+ \frac{t_4^2}{2!}(-2y \frac{\partial}{\partial y}(-2y \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial w} y) + \frac{\partial}{\partial w}(-2y \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial w} y)) + \dots = \\
&= y(1 - 2t_4 + 4\frac{t_4^2}{2!} - 8\frac{t_4^3}{3!} + \dots) = ye^{-2t_4}, \\
w' &= \text{Exp}(t_4 X^4)(w) = w + t_4(-2y \frac{\partial}{\partial y} w + \frac{\partial}{\partial w} w) + \\
&+ \frac{t_4^2}{2!}(-2y \frac{\partial}{\partial y}(-2y \frac{\partial}{\partial y} w + \frac{\partial}{\partial w} w) + \frac{\partial}{\partial w}(-2y \frac{\partial}{\partial y} w + \frac{\partial}{\partial w} w)) + \dots = w + t_4;
\end{aligned} \tag{3.45}$$

для оператора $X^5 = x^2 \partial_x + x \partial_w$:

$$\begin{aligned}
x' &= \text{Exp}(t_5 X^5)(x) = x + t_5(x^2 \frac{\partial}{\partial y} x + x \frac{\partial}{\partial w} x) + \\
&+ \frac{t_5^2}{2!}(x^2 \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \frac{\partial}{\partial y} x + x \frac{\partial}{\partial w} x) + x \frac{\partial}{\partial w}(x^2 \frac{\partial}{\partial y} x + x \frac{\partial}{\partial w} x)) + \dots = \\
&= x + t_5 x^2 + \frac{t_5^2}{2!} 2x^3 + \frac{t_5^3}{3!} 6x^4 + \dots = \frac{x}{1 - t_5 x}, \\
y' &= \text{Exp}(t_5 X^5)(y) = y + t_5(x^2 \frac{\partial}{\partial y} y + x \frac{\partial}{\partial w} y) + \\
&+ \frac{t_5^2}{2!}(x^2 \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \frac{\partial}{\partial y} y + x \frac{\partial}{\partial w} y) + x \frac{\partial}{\partial w}(x^2 \frac{\partial}{\partial y} y + x \frac{\partial}{\partial w} y)) + \dots = y, \\
w' &= \text{Exp}(t_5 X^5)(w) = w + t_5(x^2 \frac{\partial}{\partial y} w + x \frac{\partial}{\partial w} w) + \\
&+ \frac{t_5^2}{2!}(x^2 \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \frac{\partial}{\partial y} w + x \frac{\partial}{\partial w} w) + x \frac{\partial}{\partial w}(x^2 \frac{\partial}{\partial y} w + x \frac{\partial}{\partial w} w)) + \dots = \\
&= w + t_5 x + \frac{t_5^2}{2!} x^2 + \frac{t_5^3}{3!} 2x^3 + \frac{t_5^4}{4!} 6x^4 + \dots = w - \ln(1 - t_5 x);
\end{aligned} \tag{3.46}$$

для оператора $X^6 = -y^2 \partial_y + y \partial_w$:

$$\begin{aligned}
x' &= \text{Exp}(t_6 X^6)(x) = x + t_6(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} x + y \frac{\partial}{\partial w} x) + \\
&+ \frac{t_6^2}{2!}(y^2 \frac{\partial}{\partial y}(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} x + y \frac{\partial}{\partial w} x) + y \frac{\partial}{\partial w}(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} x + y \frac{\partial}{\partial w} x)) + \dots = x, \\
y' &= \text{Exp}(t_6 X^6)(y) = y + t_6(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} y + y \frac{\partial}{\partial w} y) + \\
&+ \frac{t_6^2}{2!}(y^2 \frac{\partial}{\partial y}(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} y + y \frac{\partial}{\partial w} y) + y \frac{\partial}{\partial w}(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} y + y \frac{\partial}{\partial w} y)) + \dots =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y(1 - t_6 y + t_6^2 y^2 - t_6^3 y^3 + t_6^4 y^4 - \dots) = \frac{y}{1 + t_6 y}, \\
w' &= \text{Exp}(t_6 X^6)(w) = w + t_6(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} w + y \frac{\partial}{\partial w} w) + \\
&+ \frac{t_6^2}{2!}(y^2 \frac{\partial}{\partial y}(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} w + y \frac{\partial}{\partial w} w) + y \frac{\partial}{\partial w}(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} w + y \frac{\partial}{\partial w} w)) + \dots = \\
&= w + t_6 y - \frac{t_6^2 y^2}{2!} + \frac{2t_6^3 y^3}{3!} - \frac{6t_6^4 y^4}{4!} + \dots = w + \ln(1 + t_6 y).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Вычисляя композицию найденных выше шести однопараметрических подгрупп, получим следующие явные выражения для группы движений симплицальной II типа геометрии, задаваемой на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрической функцией (3.13):

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x e^{t_3} + t_1 e^{t_3}}{-x t_5 e^{t_3} + e^{-t_3}(1 - t_1 t_5 e^{2t_3})}, \\
y' &= \frac{y e^{-t_4} + t_2 e^{-t_4}}{y t_6 e^{-t_4} + e^{t_4}(1 + t_2 t_6 e^{-2t_4})}, \\
w' &= w + \ln \frac{y t_6 e^{-t_4} + e^{t_4}(1 + t_2 t_6 e^{-2t_4})}{-x t_5 e^{t_3} + e^{-t_3}(1 - t_1 t_5 e^{2t_3})}.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Вводя переобозначение параметров $a_1 = e^{t_3}$, $b_1 = t_1 e^{t_3}$, $c_1 = -t_5 e^{t_3}$, $d_1 = e^{-t_3}(1 - t_1 t_5 e^{2t_3})$, $a_2 = e^{-t_4}$, $b_2 = t_2 e^{-t_4}$, $c_2 = t_6 e^{-t_4}$, $d_2 = e^{t_4}(1 + t_2 t_6 e^{-2t_4})$, перепишем выражения (3.48):

$$x' = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}, \quad y' = \frac{a_2 y + b_2}{c_2 y + d_2}, \quad w' = w + \ln \frac{c_2 y + d_2}{c_1 x + d_1},$$

в которых $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1$, $a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1$, то есть группа движений симплицальной II типа трехмерной геометрии действительно имеет вид (3.40).

Отметим, что группа движений симплицальной II типа трехмерной геометрии была также найдена как решение функционального уравнения $f(i', j') = f(i, j)$, то есть уравнения

$$\frac{y'_i - y'_j}{x'_i - x'_j} \exp(w'_i + w'_j) = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \exp(w_i + w_j),$$

где $x' = \lambda(x, y, w)$, $y' = \sigma(x, y, w)$, $w' = \tau(x, y, w)$, методом разработанным автором во второй главе данной диссертации. Явный вид группы движений для симплицальной II типа трехмерной геометрии, найденный решением этого функционального уравнения, представлен в совместной с Г.Г. Михайличенко работе автора [5*], в которой отмечено, что эта группа движений есть результат действия группы $SL_2(R) \otimes SL_2(R)$ в R^3 .

Аналогично находится группа движений (3.41) псевдогельмгольцевой геометрии, задаваемой на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрической функцией (3.21). Заметим, что явные выражения однопараметрических подгрупп для операторов $X^1 = \partial_x$, $X^2 = \partial_x$, $X^3 = 2x\partial_x + \partial_w$, $X^5 = x^2\partial_x + x\partial_w$ совпадают с найденными выше выражениями соответственно (3.42) – (3.44), (3.46).

Применяя экспоненциальное отображение (3.39) для базисных операторов X^4 и X^6 , получим явные выражения однопараметрических подгрупп.

Для оператора $X^4 = -2y\partial_y + \beta\partial_w$:

$$\begin{aligned}
 x' &= \text{Exp}(t_4 X^4)(x) = x + t_4(-2y \frac{\partial}{\partial y} x + \beta \frac{\partial}{\partial w} x) + \\
 &+ \frac{t_4^2}{2!}(-2y \frac{\partial}{\partial y}(-2y \frac{\partial}{\partial y} x + \beta \frac{\partial}{\partial w} x) + \frac{\partial}{\partial w}(-2y \frac{\partial}{\partial y} x + \beta \frac{\partial}{\partial w} x)) + \dots = x, \\
 y' &= \text{Exp}(t_4 X^4)(y) = y + t_4(-2y \frac{\partial}{\partial y} y + \beta \frac{\partial}{\partial w} y) + \\
 &+ \frac{t_4^2}{2!}(-2y \frac{\partial}{\partial y}(-2y \frac{\partial}{\partial y} y + \beta \frac{\partial}{\partial w} y) + \frac{\partial}{\partial w}(-2y \frac{\partial}{\partial y} y + \beta \frac{\partial}{\partial w} y)) + \dots = \\
 &= y(1 - 2yt_4 + 4y \frac{t_4^2}{2!} - 8y \frac{t_4^3}{3!} + \dots) = ye^{-2t_4}, \\
 w' &= \text{Exp}(t_4 X^4)(w) = w + t_4(-2y \frac{\partial}{\partial y} w + \beta \frac{\partial}{\partial w} w) + \\
 &+ \frac{t_4^2}{2!}(-2y \frac{\partial}{\partial y}(-2y \frac{\partial}{\partial y} w + \beta \frac{\partial}{\partial w} w) + \frac{\partial}{\partial w}(-2y \frac{\partial}{\partial y} w + \beta \frac{\partial}{\partial w} w)) + \dots = w + \beta t_4;
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

для оператора $X^6 = -y^2\partial_y + \beta y\partial_w$:

$$\begin{aligned}
x' &= \text{Exp}(t_6 X^6)(x) = x + t_6(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} x + \beta y \frac{\partial}{\partial w} x) + \\
&+ \frac{t_6^2}{2!}(y^2 \frac{\partial}{\partial y}(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} x + \beta y \frac{\partial}{\partial w} x) + y \frac{\partial}{\partial w}(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} x + \beta y \frac{\partial}{\partial w} x)) + \dots = x, \\
y' &= \text{Exp}(t_6 X^6)(y) = y + t_6(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} y + \beta y \frac{\partial}{\partial w} y) + \\
&+ \frac{t_6^2}{2!}(y^2 \frac{\partial}{\partial y}(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} y + \beta y \frac{\partial}{\partial w} y) + y \frac{\partial}{\partial w}(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} y + \beta y \frac{\partial}{\partial w} y)) + \dots = \\
&= y(1 - t_6 y + t_6^2 y^2 - t_6^3 y^3 + t_6^4 y^4 - \dots) = \frac{y}{1 + t_6 y}, \\
w' &= \text{Exp}(t_6 X^6)(w) = w + t_6(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} w + \beta y \frac{\partial}{\partial w} w) + \\
&+ \frac{t_6^2}{2!}(y^2 \frac{\partial}{\partial y}(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} w + \beta y \frac{\partial}{\partial w} w) + y \frac{\partial}{\partial w}(-y^2 \frac{\partial}{\partial y} w + \beta y \frac{\partial}{\partial w} w)) + \dots = \\
&= w + \beta(t_6 y - \frac{t_6^2 y^2}{2!} + \frac{2t_6^3 y^3}{3!} - \frac{6t_6^4 y^4}{4!} + \dots) = w + \beta \ln(1 + t_6 y).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Вычисляя композицию шести однопараметрических подгрупп, получим следующие явные выражения для группы движений псевдогильмгольцевой геометрии, задаваемой на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрической функцией (3.21):

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{xe^{t_3} + t_1 e^{t_3}}{-xt_5 e^{t_3} x + e^{-t_3}(1 - t_1 t_5 e^{2t_3})}, \\
y' &= \frac{ye^{-t_4} + t_2 e^{-t_4}}{yt_6 e^{-t_4} + e^{t_4}(1 + t_2 t_6 e^{-2t_4})}, \\
w' &= w + \beta \ln(yt_6 e^{-t_4} + e^{t_4}(1 + t_2 t_6 e^{-2t_4})) - \\
&- \ln(-xt_5 e^{t_3} + e^{-t_3}(1 - t_1 t_5 e^{2t_3})).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Вводя переобозначение параметров $a_1 = e^{t_3}$, $b_1 = t_1 e^{t_3}$, $c_1 = -t_5 e^{t_3}$, $d_1 = e^{-t_3}(1 - t_1 t_5 e^{2t_3})$, $a_2 = e^{-t_4}$, $b_2 = t_2 e^{-t_4}$, $c_2 = t_6 e^{-t_4}$, $d_2 = e^{t_4}(1 + t_2 t_6 e^{-2t_4})$, перепишем выражения (3.51):

$$x' = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}, \quad y' = \frac{a_2 y + b_2}{c_2 y + d_2}, \quad w' = w + \beta \ln(c_2 y + d_2) - \ln(c_1 x + d_1),$$

в которых $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1$, $a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1$, то есть группа движений псевдогельмгольцевой трехмерной геометрии действительно имеет вид (3.41). $\square$

3.4 Группы движений гельмгольцевой и симплициальной III типа трехмерных геометрий

В приведенной выше классификации трехмерных феноменологически симметричных геометрий (см. теорему 3.1.1) присутствуют гельмгольцева и симплициальная III типа геометрии, задаваемые на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрическими (двухточечными) функциями (3.18) и (3.20). Напомним, что метрические функции этих геометрий можно переписать в комплексной форме соответственно в виде (3.22) и (3.23). Явный вид уравнения (3.1) для них неизвестен, однако его существование подтверждается рангом соответствующей функциональной матрицы, который равен 9.

Целью данного параграфа является нахождение групп движений гельмгольцевой и симплициальной III типа трехмерных геометрий. Согласно теоремам 1.3.1 и 1.3.2 эти геометрии наделены групповой симметрией степени 6.

Метод нахождения групп движений гельмгольцевой и симплициальной III типа трехмерных геометрий состоит в применении комплексного экспоненциального отображения [7*]:

$$\begin{pmatrix} z' \\ \bar{z}' \\ u' \end{pmatrix} = \text{Exp}(tZ) \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \\ u \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

где $t \in C$ – комплексный параметр, Z – комплексный оператор алгебры

Ли группы движений, являющийся линейной комбинацией операторов (3.36) или (3.37), а

$$\text{Exp}(tZ) = 1 + tZ + \frac{t^2 Z^2}{2!} + \dots,$$

которое позволяет найти однопараметрические подгруппы, соответствующие базисным операторам алгебр Ли. Композицией таких подгрупп находятся локальные группы движений.

Приступим к нахождению явных выражений групп движений для гельмгольцевой и симплицальной III типа трехмерных геометрий, опубликованных автором в работах [6*, 7*], [14*]—[16*].

Теорема 3.4.1. ([6*, 7*]). *Группы движений гельмгольцевой и симплицальной III типа трехмерных геометрий с функциями (3.22) и (3.23) являются результатом действия группы Ли $SL_2(C)$ в пространстве R^3 , имея соответственно следующий вид:*

для гельмгольцевой трехмерной геометрии

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad u' = u + \alpha \ln \overline{(cz + d)} - \ln (cz + d), \quad (3.53)$$

$$\text{где } u = \frac{w}{i\gamma - 1}, \quad \alpha = \frac{\gamma - i}{\gamma + i},$$

а для симплицальной трехмерной геометрии III типа

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad u' = u + \ln \frac{\overline{cz + d}}{cz + d}, \quad (3.54)$$

где $u = -2iw$, причем $ad - bc = 1$, $a, b, c, d = \text{const} \in C$, $z = x + iy \in C$, $i^2 = -1$.

Доказательство. Запишем экспоненциальное отображение (3.52) для базисных операторов алгебры Ли (3.36) гельмгольцевой трехмерной геометрии.

В результате экспоненциального отображения (3.52) для базисного оператора $Z^1 = \partial_z$, получим явные выражения первой однопараметри-

ческой подгруппы:

$$\begin{aligned}
z' &= \text{Exp}(t_1 Z^1)(z) = z + t_1 \frac{\partial}{\partial z} z + \frac{t_1^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} z \right) \right) + \dots = z + t_1, \\
\bar{z}' &= \text{Exp}(t_1 Z^1)(\bar{z}) = \bar{z} + t_1 \frac{\partial}{\partial z} \bar{z} + \frac{t_1^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \bar{z} \right) \right) + \dots = \bar{z}, \\
u' &= \text{Exp}(t_1 Z^1)(u) = u + t_1 \frac{\partial}{\partial z} u + \frac{t_1^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} u \right) \right) + \dots = u.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Применяя экспоненциальное отображение для второго базисного оператора $Z^2 = \partial_{\bar{z}}$, получим явные выражения второй однопараметрической подгруппы:

$$\begin{aligned}
z' &= \text{Exp}(t_2 Z^2)(z) = z + t_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z + \frac{t_2^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} z \right) \right) + \dots = z, \\
\bar{z}' &= \text{Exp}(t_2 Z^2)(\bar{z}) = \bar{z} + t_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} + \frac{t_2^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} \right) \right) + \dots = \bar{z} + t_2, \\
u' &= \text{Exp}(t_2 Z^2)(u) = u + t_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} u + \frac{t_2^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u \right) \right) + \dots = u.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

В результате применения экспоненциального отображения для третьего базисного оператора $Z^3 = 2z\partial_z + \partial_u$ получим явные выражения третьей однопараметрической подгруппы:

$$\begin{aligned}
z' &= \text{Exp}(t_3 Z^3)(z) = z + t_3 \left(2z \frac{\partial}{\partial z} z + \frac{\partial}{\partial u} z \right) + \frac{t_3^2}{2!} \left(2z \frac{\partial}{\partial z} \left(2z \frac{\partial}{\partial z} z + \frac{\partial}{\partial u} z \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(2z \frac{\partial}{\partial z} z + \frac{\partial}{\partial u} z \right) \right) + \dots = z(1 + 2zt_3 + 4z \frac{t_3^2}{2!} + 8z \frac{t_3^3}{3!} + \dots) = e^{2t_3} z, \\
\bar{z}' &= \text{Exp}(t_3 Z^3)(\bar{z}) = \bar{z} + t_3 \left(2z \frac{\partial}{\partial z} \bar{z} + \frac{\partial}{\partial u} \bar{z} \right) + \frac{t_3^2}{2!} \left(2z \frac{\partial}{\partial z} \left(2z \frac{\partial}{\partial z} \bar{z} + \frac{\partial}{\partial u} \bar{z} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(2z \frac{\partial}{\partial z} \bar{z} + \frac{\partial}{\partial u} \bar{z} \right) \right) + \dots = \bar{z}, \\
u' &= \text{Exp}(t_3 Z^3)(u) = u + t_3 \left(2z \frac{\partial}{\partial z} u + \frac{\partial}{\partial u} u \right) + \frac{t_3^2}{2!} \left(2z \frac{\partial}{\partial z} \left(2z \frac{\partial}{\partial z} u + \frac{\partial}{\partial u} u \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(2z \frac{\partial}{\partial z} u + \frac{\partial}{\partial u} u \right) \right) + \dots = u + t_3.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Применяя экспоненциальное отображение для базисных операторов Z^4 , Z^5 , Z^6 , получим явные выражения соответствующих однопараметрических подгрупп:

для оператора $Z^4 = -2\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \alpha\partial_u$:

$$\begin{aligned}
z' &= \text{Exp}(t_4 Z^4)(z) = z + t_4(-2\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}z + \alpha\frac{\partial}{\partial u}z) + \\
&+ \frac{t_4^2}{2!}(-2\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(-2\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}z + \alpha\frac{\partial}{\partial u}z) + \alpha\frac{\partial}{\partial u}(-2\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}z + \alpha\frac{\partial}{\partial u}z)) + \dots = z, \\
\bar{z}' &= \text{Exp}(t_4 Z^4)(\bar{z}) = \bar{z} + t_4(-2\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\bar{z} + \alpha\frac{\partial}{\partial u}\bar{z}) + \\
&+ \frac{t_4^2}{2!}(-2\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(-2\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\bar{z} + \alpha\frac{\partial}{\partial u}\bar{z}) + \alpha\frac{\partial}{\partial u}(-2\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\bar{z} + \alpha\frac{\partial}{\partial u}\bar{z})) + \dots = \\
&= \bar{z}(1 - 2\bar{z}t_4 + 4\bar{z}\frac{t_4^2}{2!} - 8\bar{z}\frac{t_4^3}{3!} + \dots) = \bar{z}e^{-2t_4}, \\
u' &= \text{Exp}(t_4 Z^4)(u) = u + t_4(-2\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}u + \alpha\frac{\partial}{\partial u}u) + \\
&+ \frac{t_4^2}{2!}(-2\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(-2\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}u + \alpha\frac{\partial}{\partial u}u) + \alpha\frac{\partial}{\partial u}(-2\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}u + \alpha\frac{\partial}{\partial u}u)) + \dots = u + \alpha t_4;
\end{aligned} \tag{3.58}$$

для оператора $Z^5 = z^2\partial_z + z\partial_u$:

$$\begin{aligned}
z' &= \text{Exp}(t_5 Z^5)(z) = z + t_5(z^2\frac{\partial}{\partial z}z + z\frac{\partial}{\partial u}z) + \\
&+ \frac{t_5^2}{2!}(z^2\frac{\partial}{\partial z}(z^2\frac{\partial}{\partial z}z + z\frac{\partial}{\partial u}z) + z\frac{\partial}{\partial u}(z^2\frac{\partial}{\partial z}z + z\frac{\partial}{\partial u}z)) + \dots = \\
&= z + t_5 z^2 + \frac{t_5^2}{2!}2z^3 + \frac{t_5^3}{3!}6z^4 + \dots = \frac{z}{1 - t_5 z}, \\
\bar{z}' &= \text{Exp}(t_5 Z^5)(\bar{z}) = \bar{z} + t_5(z^2\frac{\partial}{\partial z}\bar{z} + z\frac{\partial}{\partial u}\bar{z}) + \\
&+ \frac{t_5^2}{2!}(z^2\frac{\partial}{\partial z}(z^2\frac{\partial}{\partial z}\bar{z} + z\frac{\partial}{\partial u}\bar{z}) + z\frac{\partial}{\partial u}(z^2\frac{\partial}{\partial z}\bar{z} + z\frac{\partial}{\partial u}\bar{z})) + \dots = \bar{z}, \\
u' &= \text{Exp}(t_5 Z^5)(u) = u + t_5(z^2\frac{\partial}{\partial z}u + z\frac{\partial}{\partial u}u) + \\
&+ \frac{t_5^2}{2!}(z^2\frac{\partial}{\partial z}(z^2\frac{\partial}{\partial z}u + z\frac{\partial}{\partial u}u) + z\frac{\partial}{\partial u}(z^2\frac{\partial}{\partial z}u + z\frac{\partial}{\partial u}u)) + \dots = \\
&= u + t_5 z + \frac{t_5^2}{2!}z^2 + \frac{t_5^3}{3!}2z^3 + \frac{t_5^4}{4!}6z^4 + \dots = u - \ln(1 - t_5 z);
\end{aligned} \tag{3.59}$$

для оператора $Z^6 = -\bar{z}^2\partial_{\bar{z}} + \alpha\bar{z}\partial_u$:

$$\begin{aligned}
z' &= \text{Exp}(t_6 Z^6)(z) = z + t_6(-\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}z + \alpha\bar{z}\frac{\partial}{\partial u}z) + \\
&+ \frac{t_6^2}{2!}(\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(-\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}z + \alpha\bar{z}\frac{\partial}{\partial u}z) + \alpha\bar{z}\frac{\partial}{\partial u}(-\bar{z}^2\frac{\partial}{\partial\bar{z}}z + \alpha\bar{z}\frac{\partial}{\partial u}x)) + \dots = z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{z}' &= \text{Exp}(t_6 Z^6)(\bar{z}) = \bar{z} + t_6 \left(-\bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} + \alpha \bar{z} \frac{\partial}{\partial u} \bar{z} \right) + \\
&+ \frac{t_6^2}{2!} \left(\bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(-\bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} + \alpha \bar{z} \frac{\partial}{\partial u} \bar{z} \right) + \alpha \bar{z} \frac{\partial}{\partial u} \left(-\bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} + \alpha \bar{z} \frac{\partial}{\partial u} \bar{z} \right) \right) + \dots = \\
&= \bar{z} (1 - t_6 \bar{z} + t_6^2 \bar{z}^2 - t_6^3 \bar{z}^3 + t_6^4 \bar{z}^4 - \dots) = \frac{\bar{z}}{1 + t_6 \bar{z}}, \\
u' &= \text{Exp}(t_6 Z^6)(u) = u + t_6 \left(-\bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} u + \alpha \bar{z} \frac{\partial}{\partial u} u \right) + \\
&+ \frac{t_6^2}{2!} \left(\bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(-\bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} u + \alpha \bar{z} \frac{\partial}{\partial u} u \right) + \alpha \bar{z} \frac{\partial}{\partial u} \left(-\bar{z}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} u + \alpha \bar{z} \frac{\partial}{\partial u} u \right) \right) + \dots = \\
&= u + t_6 \bar{z} - \frac{t_6^2 \bar{z}^2}{2!} + \frac{2t_6^3 \bar{z}^3}{3!} - \frac{6t_6^4 \bar{z}^4}{4!} + \dots = u + \alpha \ln(1 + t_6 \bar{z}).
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Вычисляя композицию найденных выше шести однопараметрических подгрупп, получим следующие явные выражения группы движений гельмгольцевой геометрии, задаваемой на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрической функцией (3.22):

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{ze^{t_3} + t_1 e^{t_3}}{-zt_5 e^{t_3} + e^{-t_3}(1 - t_1 t_5 e^{2t_3})}, \\
\bar{z}' &= \frac{\bar{z}e^{-t_4} + t_2 e^{-t_4}}{\bar{z}t_6 e^{-t_4} + e^{t_4}(1 + t_2 t_6 e^{-2t_4})}, \\
u' &= u + \alpha \ln(\bar{z}t_6 e^{-t_4} + e^{t_4}(1 + t_2 t_6 e^{-2t_4})) - \\
&- \ln(-zt_5 e^{t_3} + e^{-t_3}(1 - t_1 t_5 e^{2t_3})).
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Поскольку $\bar{\bar{z}} = z$ из первых двух выражений (3.61) получим следующую связь параметров: $t_2 = \bar{t}_1$, $t_4 = -\bar{t}_3$, $t_6 = -\bar{t}_5$.

Далее, вводя переобозначение параметров $a = a_1 + ia_2 = e^{t_3}$, $b = b_1 + ib_2 = t_1 e^{t_3}$, $c = c_1 + ic_2 = -t_5 e^{t_3}$, $d = d_1 + id_2 = e^{-t_3}(1 - t_1 t_5 e^{2t_3})$, перепишем первое и третье выражения (3.61):

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad u' = u + \alpha \ln \overline{(cz + d)} - \ln(cz + d), \tag{3.62}$$

в которых $ad - bc = 1$, то есть группа движений гельмгольцевой трехмерной геометрии действительно имеет вид (3.53).

Аналогично находятся выражения группы движений симплициальной геометрии III типа (3.54), задаваемой на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрической функцией (3.23).

Заметим, что в предыдущем изложении не были использованы какие-либо ограничения на значение показателя α , поэтому, полагая в уравнениях (3.62) $\alpha = 1$, получим группу движений (3.54) симплициальной геометрии III типа. $\square$

Перейдем от комплексной записи выражений (3.53), (3.54) к вещественной, которые сохраняют функции (3.18) и (3.20) соответственно. При этом учтем, что $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$, $d = d_1 + id_2$, $i^2 = -1$, $w = u(i\gamma - 1)$ и $\alpha = \frac{\gamma - i}{\gamma + i}$ или $-2iw = u$, $ad - bc = 1$. Выделяя действительную и мнимую части, получаем группу движений гельмгольцевой трехмерной геометрии

$$\begin{aligned} x' &= \frac{(a_1x - a_2y + b_1)(c_1x - c_2y + d_1) + (a_1y + a_2x + b_2)(c_1y + c_2x + d_2)}{(c_1y + c_2x + d_2)^2 + (c_1x - c_2y + d_1)^2}, \\ y' &= \frac{(a_1y + a_2x + b_2)(c_1x - c_2y + d_1) - (a_1x - a_2y + b_1)(c_1y + c_2x + d_2)}{(c_1y + c_2x + d_2)^2 + (c_1x - c_2y + d_1)^2}, \\ w' &= w + 2\gamma \operatorname{arctg} \frac{c_1y + c_2x + d_2}{c_1x - c_2y + d_1} + \\ &\quad + \ln((c_1y + c_2x + d_2)^2 + (c_1x - c_2y + d_1)^2). \end{aligned}$$

В группе же движений симплициальной III типа трехмерной геометрии выражения для x', y' прежние, а для w' следующее:

$$w' = w + \operatorname{arctg} \frac{c_1y + c_2x + d_2}{c_1x - c_2y + d_1}.$$

3.5 Группы движений симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий

В приведенной выше классификации трехмерных феноменологически симметричных геометрий (3.3) – (3.20) (см. теорему 3.1.1) присутству-

ют симплициальная I типа и дуальногельмгольцева геометрии, задаваемые на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрическими (двухточечными) функциями (3.12) и (3.17). Явный вид уравнения (3.1) для них неизвестен, однако его существование подтверждается рангом соответствующей функциональной матрицы, который равен 9. Напомним, что метрические функции этих геометрий можно переписать, используя дуальные числа соответственно в виде (3.24) и (3.25).

Целью данного параграфа является нахождение групп движений симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий. Согласно теоремам 1.3.1 и 1.3.2 эти геометрии наделены групповой симметрией степени 6.

Метод нахождения групп движений состоит в применении экспоненциального отображения (3.39), которое позволяет найти однопараметрические подгруппы по базисным операторам их алгебр Ли. Явные выражения групп движений находятся композицией этих однопараметрических подгрупп.

Приступим к определению групп движений симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий, опубликованных в работах [6*, 16*].

Теорема 3.5.1. ([6*]). *Группы движений симплициальной I типа и дуальногельмгольцевой трехмерных геометрий с функциями (3.24) и (3.25) являются результатом действия группы Ли $SL_2(D)$ в пространстве R^3 , имея соответственно следующий вид:*

для симплициальной трехмерной геометрии I типа

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad v' = v - 1 + \frac{\overline{(cz + d)}}{(cz + d)}, \quad (3.63)$$

для дуальногельмгольцевой трехмерной геометрии

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad v' = v - 1 + \frac{\overline{(cz + d)}}{(cz + d)} - 2\varepsilon \ln \overline{(cz + d)}(cz + d), \quad (3.64)$$

где $ad - bc = 1$, $a, b, c, d = \text{const} \in D$, $z = x + \varepsilon y$, $v = -2\varepsilon w$, $\varepsilon^2 = 0$.

Доказательство. Запишем экспоненциальное отображение (3.39) для базисных операторов алгебры Ли (3.30) симплицальной I типа трехмерной геометрии.

Заметим, что выражения однопараметрических подгрупп для операторов $X^1 = \partial_x$ и $X^2 = \partial_x$ совпадают с выражениями соответственно (3.42) и (3.43).

Используя экспоненциальное отображение (3.39) для базисных операторов X^3 , X^4 , X^5 , X^6 из (3.30), получим выражения соответствующих однопараметрических подгрупп.

Для оператора $X^3 = x\partial_x + y\partial_y$:

$$\begin{aligned}
 x' &= \text{Exp}(t_3 X^3)(x) = x + t_3(x\frac{\partial}{\partial x}x + y\frac{\partial}{\partial y}x) + \frac{t_3^2}{2!}(x\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial}{\partial x}x + y\frac{\partial}{\partial y}x) + \\
 &\quad + y\frac{\partial}{\partial y}(x\frac{\partial}{\partial x}x + y\frac{\partial}{\partial y}x)) + \dots = x(1 + t_3 + \frac{t_3^2}{2!} + \frac{t_3^3}{3!} + \dots) = e^{t_3}x, \\
 y' &= \text{Exp}(t_3 X^3)(y) = y + t_3(x\frac{\partial}{\partial x}y + y\frac{\partial}{\partial y}y) + \frac{t_3^2}{2!}(x\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial}{\partial x}y + y\frac{\partial}{\partial y}y) + \\
 &\quad + y\frac{\partial}{\partial y}(x\frac{\partial}{\partial x}y + y\frac{\partial}{\partial y}y)) + \dots = y(1 + t_3 + \frac{t_3^2}{2!} + \frac{t_3^3}{3!} + \dots) = e^{t_3}y, \\
 w' &= \text{Exp}(t_3 X^3)(w) = w + t_3(x\frac{\partial}{\partial x}w + y\frac{\partial}{\partial y}w) + \dots = w;
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

для оператора $X^4 = -2x\partial_y + \partial_w$:

$$\begin{aligned}
 x' &= \text{Exp}(t_4 X^4)(x) = x + t_4(-2x\frac{\partial}{\partial y}x + \frac{\partial}{\partial w}x) + \\
 &\quad + \frac{t_4^2}{2!}(-2x\frac{\partial}{\partial y}(-2x\frac{\partial}{\partial y}x + \frac{\partial}{\partial w}x) + \frac{\partial}{\partial w}(-2x\frac{\partial}{\partial y}x + \frac{\partial}{\partial w}x)) + \dots = x, \\
 y' &= \text{Exp}(t_4 X^4)(y) = y + t_4(-2x\frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial w}y) + \\
 &\quad + \frac{t_4^2}{2!}(-2x\frac{\partial}{\partial y}(-2x\frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial w}y) + \frac{\partial}{\partial w}(-2x\frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial w}y)) + \dots = y - 2t_4x,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w' &= \text{Exp}(t_4 X^4)(w) = w + t_4 \left(-2x \frac{\partial}{\partial y} w + \frac{\partial}{\partial w} w \right) + \\
&+ \frac{t_4^2}{2!} \left(-2x \frac{\partial}{\partial y} \left(-2x \frac{\partial}{\partial y} w + \frac{\partial}{\partial w} w \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(-2x \frac{\partial}{\partial y} w + \frac{\partial}{\partial w} w \right) \right) + \dots = w + t_4;
\end{aligned} \tag{3.66}$$

для оператора $X^5 = -x^2 \partial_y + x \partial_w$:

$$\begin{aligned}
x' &= \text{Exp}(t_5 X^5)(x) = x + t_5 \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial y} x + x \frac{\partial}{\partial w} x \right) + \\
&+ \frac{t_5^2}{2!} \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial y} x + x \frac{\partial}{\partial w} x \right) + x \frac{\partial}{\partial w} \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial y} x + x \frac{\partial}{\partial w} x \right) \right) + \dots = x, \\
y' &= \text{Exp}(t_5 X^5)(y) = x + t_5 \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial y} y + x \frac{\partial}{\partial w} y \right) + \\
&+ \frac{t_5^2}{2!} \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial y} y + x \frac{\partial}{\partial w} y \right) + x \frac{\partial}{\partial w} \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial y} y + x \frac{\partial}{\partial w} y \right) \right) + \dots = y - t_5 x^2, \\
w' &= \text{Exp}(t_5 X^5)(w) = x + t_5 \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial y} w + x \frac{\partial}{\partial w} w \right) + \\
&+ \frac{t_5^2}{2!} \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial y} w + x \frac{\partial}{\partial w} w \right) + x \frac{\partial}{\partial w} \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial y} w + x \frac{\partial}{\partial w} w \right) \right) + \dots = w + t_5 x;
\end{aligned} \tag{3.67}$$

для оператора $X^6 = -x^2 \partial_x - 2xy \partial_y + y \partial_w$:

$$\begin{aligned}
x' &= \text{Exp}(t_6 X^6)(x) = x + t_6 \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} x - 2xy \frac{\partial}{\partial y} x + y \frac{\partial}{\partial w} x \right) + \frac{t_6^2}{2!} (\dots) + \dots = \\
&= x \left(1 - t_6 x + 2 \frac{t_6^2}{2!} x^2 - 6 \frac{t_6^3}{3!} x^3 + \dots \right) = \frac{x}{1 + t_6 x}, \\
y' &= \text{Exp}(t_6 X^6)(y) = y + t_6 \left(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} y - 2xy \frac{\partial}{\partial y} y + y \frac{\partial}{\partial w} y \right) + \frac{t_6^2}{2!} (\dots) + \dots = \\
&= y \left(1 - 2t_6 x + 6 \frac{t_6^2}{2!} x^2 - 24 \frac{t_6^3}{3!} x^3 + \dots \right) = \frac{y}{(1 + t_6 x)^2}, \\
w' &= \text{Exp}(t_6 X^6)(w) = w + t_6 y \left(1 - t_6 x + 2 \frac{t_6^2}{2!} x^2 - 6 \frac{t_6^3}{3!} x^3 + \dots \right) = \\
&= w + \frac{t_6 y}{1 + t_6 x}.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Вычисляя композицию найденных выше шести однопараметрических подгрупп, получим следующие явные выражения для группы движений симплицальной I типа геометрии, задаваемой на трехмерном

многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрической функцией (3.12):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{xe^{\frac{t_3}{2}} + t_1e^{\frac{t_3}{2}}}{xe^{\frac{t_3}{2}}t_6 + e^{\frac{-t_3}{2}}(1 + t_1e^{t_3t_6})}, \\ y' &= \frac{y + t_2 - 2t_4(x + t_1) - (x + t_1)^2e^{t_3t_5}}{(xe^{\frac{t_3}{2}}t_6 + e^{\frac{-t_3}{2}}(1 + t_1e^{t_3t_6}))^2}, \\ w' &= w + \frac{ye^{\frac{t_3}{2}}t_6 + xe^{\frac{t_3}{2}}(t_5 - t_6t_4) + e^{\frac{-t_3}{2}}t_4 - e^{\frac{t_3}{2}}t_4t_6t_1 + t_1t_5e^{\frac{t_3}{2}} + e^{\frac{t_3}{2}}t_2t_6}{xe^{\frac{t_3}{2}}t_6 + e^{\frac{-t_3}{2}}(1 + t_1e^{t_3t_6})}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Вводя следующие переобозначения параметров: $a_1 = e^{\frac{t_3}{2}}$, $b_1 = t_1e^{\frac{t_3}{2}}$, $c_1 = e^{\frac{t_3}{2}}t_6$, $d_1 = e^{\frac{-t_3}{2}}(1 + t_1e^{t_3t_6})$, $a_2 = -e^{\frac{t_3}{2}}t_4$, $b_2 = e^{\frac{t_3}{2}}(t_2 - t_1t_4)$, $c_2 = e^{\frac{t_3}{2}}(t_5 - t_4t_6)$, $d_2 = e^{\frac{-t_3}{2}}t_4 - e^{\frac{t_3}{2}}t_1t_4t_6 + e^{\frac{t_3}{2}}t_1t_5 + e^{\frac{t_3}{2}}t_2t_6$, для которых $a_1d_1 - b_1c_1 = 1$, $a_1d_2 + a_2d_1 - b_1c_2 - b_2c_1 = 0$, перепишем выражения (3.69):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}, \\ y' &= \frac{(a_1y + a_2x + b_2)(c_1x + d_1) - (a_1x + b_1)(c_1y + c_2x + d_2)}{(c_1x + d_1)^2}, \\ w' &= w + \frac{c_1y + c_2x + d_2}{c_1x + d_1}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Полагая $z = x + \varepsilon y$, $v = -2\varepsilon w$, $a = a_1 + \varepsilon a_2$, $b = b_1 + \varepsilon b_2$, $c = c_1 + \varepsilon c_2$, $d = d_1 + \varepsilon d_2$, где $\varepsilon^2 = 0$, с учетом того, что $a_1d_1 - b_1c_1 = 1$, $a_1d_2 + a_2d_1 - b_1c_2 - b_2c_1 = 0$, вещественную форму записи (3.70) можно перевести в запись (3.69) с дуальными числами.

Аналогично находятся выражения группы движений дуальногильмгольцевой геометрии (3.64), задаваемой на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрической функцией (3.17). Заметим, что выражения однопараметрических подгрупп для операторов

$$X^1 = \partial_x, \quad X^2 = \partial_x, \quad X^4 = -2x\partial_y + \partial_w, \quad X^5 = -x^2\partial_y + x\partial_w$$

совпадают соответственно с выражениями (3.42), (3.43), (3.66), (3.67).

Используя экспоненциальное отображение (3.39) для базисных операторов X^3 , X^6 , получим выражения соответствующих однопараметрических подгрупп.

Для оператора $X^3 = x\partial_x + y\partial_y - \partial_w$:

$$\begin{aligned}
 x' &= \text{Exp}(t_3 X^3)(x) = x + t_3(x \frac{\partial}{\partial x} x + y \frac{\partial}{\partial y} x - \frac{\partial}{\partial w} x) + \\
 &+ \frac{t_3^2}{2!}(x \frac{\partial}{\partial x}(x \frac{\partial}{\partial x} x + y \frac{\partial}{\partial y} x - \frac{\partial}{\partial w} x) + y \frac{\partial}{\partial y}(x \frac{\partial}{\partial x} x + y \frac{\partial}{\partial y} x - \frac{\partial}{\partial w} x) - \\
 &- \frac{\partial}{\partial w}(x \frac{\partial}{\partial x} x + y \frac{\partial}{\partial y} x - \frac{\partial}{\partial w} x)) + \dots = x(1 + t_3 + \frac{t_3^2}{2!} + \frac{t_3^3}{3!} + \dots) = e^{t_3} x, \\
 y' &= \text{Exp}(t_3 X^3)(y) = y + t_3(x \frac{\partial}{\partial x} y + y \frac{\partial}{\partial y} y - \frac{\partial}{\partial w} y) + \\
 &+ \frac{t_3^2}{2!}(x \frac{\partial}{\partial x}(x \frac{\partial}{\partial x} y + y \frac{\partial}{\partial y} y - \frac{\partial}{\partial w} y) + y \frac{\partial}{\partial y}(x \frac{\partial}{\partial x} y + y \frac{\partial}{\partial y} y - \frac{\partial}{\partial w} y) - \\
 &- \frac{\partial}{\partial w}(x \frac{\partial}{\partial x} y + y \frac{\partial}{\partial y} y - \frac{\partial}{\partial w} y)) + \dots = y(1 + t_3 + \frac{t_3^2}{2!} + \frac{t_3^3}{3!} + \dots) = e^{t_3} y, \\
 w' &= \text{Exp}(t_3 X^3)(w) = w + t_3(x \frac{\partial}{\partial x} w + y \frac{\partial}{\partial y} w - \frac{\partial}{\partial w} w) + \dots = w - t_3;
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

для оператора $X^6 = -x^2\partial_x - 2xy\partial_y + (y + 2x)\partial_w$:

$$\begin{aligned}
 x' &= \text{Exp}(t_6 X^6)(x) = x + t_6(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} x - 2xy \frac{\partial}{\partial y} x + (y + 2x) \frac{\partial}{\partial w} x) + \\
 &+ \frac{t_6^2}{2!}(\dots) + \dots = x(1 - t_6 x + 2 \frac{t_6^2}{2!} x^2 - 6 \frac{t_6^3}{3!} x^3 + \dots) = \frac{x}{1 + t_6 x}, \\
 y' &= \text{Exp}(t_6 X^6)(y) = y + t_6(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} y - 2xy \frac{\partial}{\partial y} y + (y + 2x) \frac{\partial}{\partial w} y) + \\
 &= \frac{t_6^2}{2!}(\dots) + \dots = y(1 - 2t_6 x + 6 \frac{t_6^2}{2!} x^2 - 24 \frac{t_6^3}{3!} x^3 + \dots) = \frac{y}{(1 + t_6 x)^2}, \\
 w' &= \text{Exp}(t_6 X^6)(w) = w + t_6(-x^2 \frac{\partial}{\partial x} w - 2xy \frac{\partial}{\partial y} w + (y + 2x) \frac{\partial}{\partial w} w) + \\
 &+ \frac{t_6^2}{2!}(\dots) + \dots = w + t_6 y(1 - t_6 x + 2 \frac{t_6^2}{2!} x^2 - 6 \frac{t_6^3}{3!} x^3 + \dots) + \\
 &+ 2(t_6 x - \frac{t_6^2}{2!} x^2 + 2 \frac{t_6^3}{3!} x^3 - 6 \frac{t_6^4}{4!} x^4 + \dots) = w + \frac{t_6 y}{1 + t_6 x} + 2 \ln(1 + t_6 x).
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Вычисляя композицию шести однопараметрических подгрупп (3.42), (3.43), (3.66), (3.67), (3.71), (3.72), получим следующие явные выражения для группы движений дуальногельмгольцевой геометрии, задаваемой на трехмерном многообразии $\mathfrak{M}_3$ метрической функцией (3.17):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{xe^{\frac{t_3}{2}} + t_1e^{\frac{t_3}{2}}}{xe^{\frac{t_3}{2}}t_6 + e^{\frac{-t_3}{2}}(1 + t_1e^{t_3t_6})}, \\ y' &= \frac{y + t_2 - 2t_4(x + t_1) - (x + t_1)^2e^{t_3t_5}}{(xe^{\frac{t_3}{2}}t_6 + e^{\frac{-t_3}{2}}(1 + t_1e^{t_3t_6}))^2}, \\ w' &= w + \frac{ye^{\frac{t_3}{2}}t_6 + xe^{\frac{t_3}{2}}(t_5 - t_6t_4) + e^{\frac{-t_3}{2}}t_4 - e^{\frac{t_3}{2}}t_4t_6t_1 + t_1t_5e^{\frac{t_3}{2}} + e^{\frac{t_3}{2}}t_2t_6}{xe^{\frac{t_3}{2}}t_6 + e^{\frac{-t_3}{2}}(1 + t_1e^{t_3t_6})} + \\ &\quad + 2\ln(xe^{\frac{t_3}{2}}t_6 + e^{\frac{-t_3}{2}}(1 + t_1e^{t_3t_6})). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Вводя переобозначение параметров $a_1 = e^{\frac{t_3}{2}}$, $b_1 = t_1e^{\frac{t_3}{2}}$, $c_1 = e^{\frac{t_3}{2}}t_6$, $d_1 = e^{\frac{-t_3}{2}}(1 + t_1e^{t_3t_6})$, $a_2 = -e^{\frac{t_3}{2}}t_4$, $b_2 = e^{\frac{t_3}{2}}(t_2 - t_1t_4)$, $c_2 = e^{\frac{t_3}{2}}(t_5 - t_4t_6)$, $d_2 = e^{\frac{-t_3}{2}}t_4 - e^{\frac{t_3}{2}}t_1t_4t_6 + e^{\frac{t_3}{2}}t_1t_5 + e^{\frac{t_3}{2}}t_2t_6$, для которых $a_1d_1 - b_1c_1 = 1$, $a_1d_2 + a_2d_1 - b_1c_2 - b_2c_1 = 0$, выражения для x', y' получим такие же как в (3.70), а для w' следующее:

$$w' = w + \frac{c_1y + c_2x + d_2}{c_1x + d_1} + \ln(c_1x + d_1)^2.$$

Полагая $z = x + \varepsilon y$, $-2\varepsilon w = v$, $a = a_1 + \varepsilon a_2$, $b = b_1 + \varepsilon b_2$, $c = c_1 + \varepsilon c_2$, $d = d_1 + \varepsilon d_2$, где $\varepsilon^2 = 0$, $a_1d_1 - b_1c_1 = 1$, $a_1d_2 + a_2d_1 - b_1c_2 - b_2c_1 = 0$, вещественную запись (3.73) можно заменить записью (3.64) с дуальными числами. $\square$

Заметим, что группа Ли $SL_2(D)$ – это специальная линейная группа над кольцом дуальных чисел D , состоящая из матриц $\begin{pmatrix} A_1 + \varepsilon A_2 & B_1 + \varepsilon B_2 \\ C_1 + \varepsilon C_2 & D_1 + \varepsilon D_2 \end{pmatrix}$, причем $(A_1 + \varepsilon A_2)(D_1 + \varepsilon D_2) - (B_1 + \varepsilon B_2)(C_1 + \varepsilon C_2) = 1$. Выделяя действительную и мнимую части, получаем: $A_1D_1 - B_1C_1 = 1$, $A_1D_2 + A_2D_1 - B_1C_2 - B_2C_1 = 0$. В группе $SL_2(D)$ вы-

деляются подгруппы $SL_2(R)$: $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$, где $A_1 D_1 - B_1 C_1 = 1$, и N :

$\begin{pmatrix} 1 + \varepsilon A & \varepsilon B \\ \varepsilon C & 1 - \varepsilon A \end{pmatrix}$, где $\varepsilon^2 = 0$. Заметим, что подгруппа N является абелевой нормальной в $SL_2(D)$, в чем можно убедиться, воспользовавшись определениями (см. [33], С.37): *коммутативная подгруппа N , удовлетворяющая условию $gNg^{-1} = N$, $g \in SL_2(D) \supset N$ называется абелевой нормальной подгруппой в $SL_2(D)$* . Значит, справедлив изоморфизм $SL_2(D) \cong SL_2(R) \ltimes N$.

Глава 4

Аналитический метод классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий

Четвертая глава диссертации посвящена разработке аналитического метода классификации (существенно использующего исследование строения и ранга соответствующей функциональной матрицы, а также следующих из неё систем функционально-дифференциальных соотношений и дифференциальных уравнений) и его применению к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий. Для каждой из них найдены группы движений решением соответствующих систем функциональных уравнений на множество движений, и все невырожденные двухточечные инварианты этих групп.

4.1 Определение двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий

Пусть имеется множество $\mathfrak{M}_2$, наделенное структурой гладкого двумерного многообразия, а также функция $f : \mathfrak{S}_f \rightarrow R^2$, где $\mathfrak{S}_f \subseteq \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$, сопоставляющая каждой паре точек $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$ два

вещественных числа $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j)) \in R^2$. Двухкомпонентную двухточечную функцию f будем называть *метрической вектор-функцией*, не требуя, однако, от ее компонент выполнения аксиом обычной (см., например, Колмогорова А.Н. [16]) метрики, а геометрию, задаваемую ею на многообразии $\mathfrak{M}_2$, — *двуметрической двумерной геометрией*. Обозначим через $U(i)$ окрестность точки $i \in \mathfrak{M}_2$, через $U(\langle i, j \rangle)$ — окрестность пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ и аналогично окрестности кортежей из других прямых произведений множества $\mathfrak{M}_2$ на себя.

Если x, y — локальные координаты гладкого двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$, то для вектор-функции $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$ можно записать ее локальное координатное представление:

$$f(i, j) = f(x_i, y_i, x_j, y_j) = (f^1(x_i, y_i, x_j, y_j), f^2(x_i, y_i, x_j, y_j)), \quad (4.1)$$

где x_i, y_i и x_j, y_j — локальные координаты точек i и j пары $\langle i, j \rangle \in \mathfrak{S}_f$.

В отношении вектор-функции f будем предполагать выполнение следующих аксиом:

Аксиома 4.1.1. Область определения $\mathfrak{S}_f$ вектор-функции f есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ множество.

Аксиома 4.1.2. Вектор-функция f в области своего определения имеет класс гладкости не менее второго.

Аксиома 4.1.3. Для открытого и плотного в $\mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_2$ множества пар $\langle i, j \rangle$ локальное координатное представление (4.1) вектор-функции $f(i, j)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\frac{\partial(f^1(i, j), f^2(i, j))}{\partial(x_i, y_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f^1(i, j), f^2(i, j))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0. \quad (4.2)$$

Определение 4.1.1. Гладкую вектор-функцию f , удовлетворяющую аксиоме 4.1.3, будем называть *невыврожденной*.

На основе метрической функции f построим отображение F , сопоставляющее тройке $\langle i, j, k \rangle$ из $\mathfrak{M}_2^3$ точку $z = (f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k))$, принадлежащую некоторому открытому подмножеству $E \subset R^6$, если пары $\langle i, j \rangle, \langle i, k \rangle, \langle j, k \rangle \in \mathfrak{S}_f$. То есть

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_2^3 \supseteq \mathfrak{S}_F \ni \langle i, j, k \rangle &\xrightarrow{F} (f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), \\ &f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) \in E \subset R^6, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\mathfrak{S}_F$ – есть открытое и плотное в $\mathfrak{M}_2^3$ множество, являющееся областью определения построенного отображения F .

Пусть, далее, имеется гладкая функция $\Phi : E \rightarrow R^2$, где $E \subset R^6$, которая сопоставляет точке $z \in E \subseteq R^6$ пару чисел $(\Phi_1(z), \Phi_2(z)) \in R^2$. Данные построения поясняет рис. 4.1.

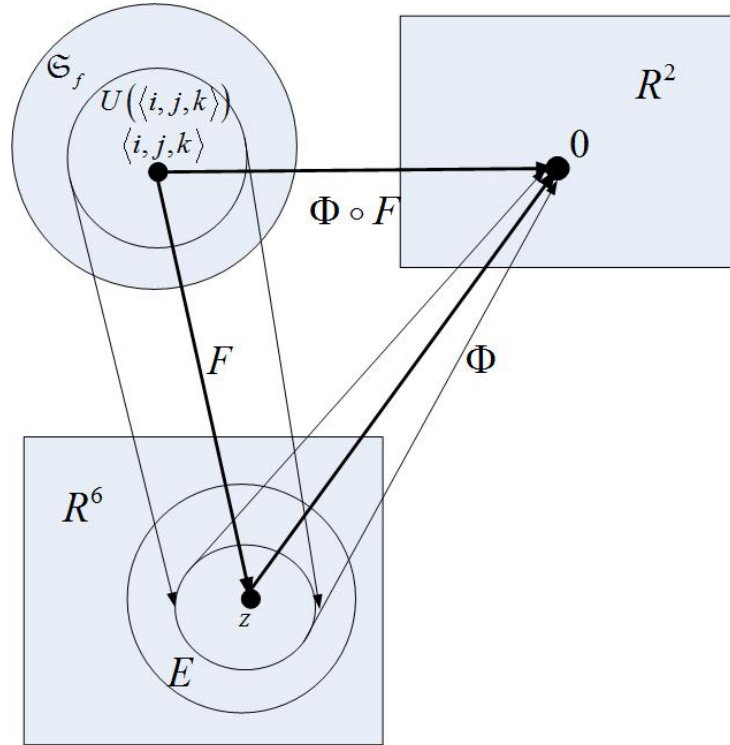


Рис. 4.1: Диаграмма отображений для двуметрической феноменологически симметричной двумерной геометрии

Аксиома 4.1.4. Существует плотное в $\mathfrak{S}_F$ множество, для каждой тройки $\langle i, j, k \rangle$ которого и некоторой ее окрестности $U(\langle i, j, k \rangle)$ найдется

такая гладкая класса C^2 функция $\Phi : E \rightarrow R^2$, определенная в некоторой области $E \subset R^6$, содержащей точку $z = F(\langle i, j, k \rangle)$, что в ней $\text{rang} \Phi = 2$ и множество $F(U(\langle i, j, k \rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть

$$\Phi(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) = 0, \quad (4.4)$$

где $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, для всех троек из $U(\langle i, j, k \rangle)$.

Если условие $\text{rang} \Phi = 2$ выполнено, то в области E величины $f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)$ связаны двумя независимыми уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) &= 0, \\ \Phi_2(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k)) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Используя выражение (4.1), запишем локальное координатное представление построенного отображения F :

$$\left. \begin{aligned} f^1(i, j) &= f(x_i, y_i, x_j, y_j), \\ f^2(i, j) &= f(x_i, y_i, x_j, y_j), \\ f^1(i, k) &= f(x_i, y_i, x_k, y_k), \\ f^2(i, k) &= f(x_i, y_i, x_k, y_k), \\ f^1(j, k) &= f(x_j, y_j, x_k, y_k), \\ f^2(j, k) &= f(x_j, y_j, x_k, y_k), \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

функциональная матрица которого

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial y_j} & \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial y_j} & 0 & 0 & \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_j} & \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_j} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_k} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_k} \end{array} \right) \quad (4.6)$$

имеет 6 строк и 6 столбцов, а ее ранг есть ранг соответствующего касательного отображения.

Определение 4.1.2. Будем говорить, что невырожденная метрическая вектор-функция f задает на гладком многообразии $\mathfrak{M}_2$ *двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3*, если выполняются аксиомы 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4.

Далее приведем лемму и теорему о ранге отображения F , доказательства которых опубликованы автором в работе [2*].

Лемма 4.1.1. ([2*]). *Если вектор-функция $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$ удовлетворяет аксиомам 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, то ранг матрицы (4.6) не менее 4.*

Справедливость леммы 4.1.1 следует из того, что минор четвертого порядка Δ_4 , занимающий верхний правый угол матрицы (4.6), отличен от нуля в соответствии с аксиомой 4.1.3.

Далее сформулируем теорему о ранге отображения функции F .

Теорема 4.1.1. ([2*]). **1.** *Если ранг отображения F равен 4 на открытом и плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве, то метрическая вектор-функция $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, удовлетворяющая аксиомам 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, задает на гладком многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3 (то есть удовлетворяет аксиоме 4.1.4).* **2.** *Система аксиом 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 и 4.1.4 совместна, то есть, возможно, существует модель соответствующей аксиоматической теории — набор вектор-функций $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, для которых выполнены все четыре аксиомы.*

Доказательство пункта 1.

Пусть для тройки $\langle i, j, k \rangle \in \mathfrak{S}_F$ ранг отображения F равен 4. Согласно известной теореме математического анализа о функциональной

зависимости [14] для некоторой окрестности $U(\langle i, j, k \rangle)$ найдется такая достаточно гладкая функция $\Phi : E \rightarrow R^2$, определенная в соответствующей области $E \subset R^6$, содержащей точку $z = (f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k))$, в которой $\text{rang} \Phi = 2$ и имеют место уравнения (4.4).

Поскольку ранг матрицы (4.6) для исходной тройки $\langle i, j, k \rangle$ равен 4 и максимален в окрестности $U(\langle i, j, k \rangle)$, из этой же теоремы о функциональной зависимости следует, что найдется такая его окрестность $U' \subseteq U$ и соответствующая область $E' \subseteq E$, для которых множество значений $F(U')$ совпадает с множеством нулей функции Φ в E' , являясь гладкой без особых точек четырехмерной поверхностью в R^6 . $\square$

Доказательство пункта 2.

По лемме 4.1.1 ранг матрицы не менее 4. Докажем, что ранг матрицы (4.6) не более 4. Для доказательства продифференцируем уравнение (4.4) по каждой из 6 координат $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$ точек тройки $\langle i, j, k \rangle$. В результате получим 6 линейных однородных уравнений относительно 6 производных компонент функции Φ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i,j)} \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i,j)} \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i,k)} \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i,k)} \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i,j)} \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i,j)} \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i,k)} \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial y_i} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i,k)} \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial y_i} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i,j)} \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i,j)} \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j,k)} \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j,k)} \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i,j)} \frac{\partial f^1(i,j)}{\partial y_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i,j)} \frac{\partial f^2(i,j)}{\partial y_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j,k)} \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial y_j} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j,k)} \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial y_j} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i,k)} \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i,k)} \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j,k)} \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j,k)} \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial x_k} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(i,k)} \frac{\partial f^1(i,k)}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(i,k)} \frac{\partial f^2(i,k)}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^1(j,k)} \frac{\partial f^1(j,k)}{\partial y_k} + \frac{\partial \Phi_m}{\partial f^2(j,k)} \frac{\partial f^2(j,k)}{\partial y_k} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

где $\Phi_m = \Phi_m(f^1(i, j), f^2(i, j), f^1(i, k), f^2(i, k), f^1(j, k), f^2(j, k))$, $m = 1, 2$, матрица которой совпадает с функциональной матрицей (4.6).

Предположим, что ранг матрицы системы (4.7) равен 5 или 6. Тогда система (4.7) будет иметь только одно линейно независимое ненулевое ре-

шение или ни одного, так как их число равно разности между числом переменных в системе (4.7) и рангом ее матрицы. Однако, уравнения системы (4.7) имеют вследствие феноменологической симметрии, по крайней мере, два таких решения в некоторой окрестности $U(\langle i, j, k \rangle)$, так как по аксиоме 4.1.4 $\text{rang} \Phi = 2$ в точке $z = F(\langle i, j, k \rangle)$. Следовательно, с учетом леммы 4.1.1 ранг функциональной матрицы (4.6) равен 4.

Замечание 4.1.1. ($[2^*]$). Поскольку ранг матрицы (4.6) равен четырем, то каждый из двух первых ее столбцов есть линейная комбинация базисных столбцов (то есть столбцов с номерами 3,4,5,6). Разложимость по базисным столбцам первого и второго столбцов налагает ограничения на производные функций $f^1(i, j)$ и $f^2(i, j)$.

Ниже, то есть в § 4.2, проводя анализ систем уравнений, убедимся в существовании метрической функции $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, удовлетворяющей аксиомам 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4.

4.2 Исследование ранга систем функционально-дифференциальных соотношений и решение возникающих из них систем дифференциальных уравнений

В данном параграфе будет изложена суть аналитического метода классификации, который опирается на исследование строения и ранга функциональной матрицы (4.6), а также возникающих из неё систем функционально-дифференциальных соотношений и дифференциальных уравнений, примененного к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 3. Напомним, что классификация таких геометрий ранее была построена

Г.Г. Михайличенко (см. работы [41], [43], [45]) групповым методом, отличным от аналитического. Естественно возникает задача об уточнении или подтверждении полноты полученного им результата в рамках иного подхода, а именно, аналитического.

Следуя работе автора [2*], сформулируем и подробно изложим в доказательстве классификационной теоремы аналитический метод решения систем функциональных уравнений.

Теорема 4.2.1. *С точностью до обратимых преобразования $\psi(f) \rightarrow f$ и замены локальных координат x, y существуют две и только две невырожденные метрические вектор-функции $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, задающие на гладком многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3. Компоненты этих метрических вектор-функций могут быть представлены следующими каноническими выражениями:*

$$1. \quad f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i - y_j, \quad (4.8)$$

$$2. \quad f^1(i, j) = (x_i - x_j)y_i, \quad f^2(i, j) = (x_i - x_j)y_j. \quad (4.9)$$

Доказательство. ([2*]). Учитывая замечание 4.1.1, сделанное в § 4.1, сводим требование $\text{rang} A = 4$ к обращению в нуль миноров пятого порядка, окаймляющих базисный минор четвертого порядка, содержащих элементы первого и второго столбцов. Тогда, применяя для окаймления строки пятую и шестую, и приравнивая полученные миноры к нулю, приходим к функционально-дифференциальным соотношениям

$$\left. \begin{aligned} & A_2^1(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - A_2^2(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ & + A_2^1(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - A_2^2(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ & A_1^1(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - A_1^2(i, k)A_0(j, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ & + A_1^1(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - A_1^2(j, k)A_0(i, k)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

где $\alpha = 1, 2$.

Коэффициенты при производных компонент функции $f(i, j)$ в уравнениях системы (4.10) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_1^1(i, k) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{vmatrix}, & A_1^2(i, k) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_k} \end{vmatrix}, \\ A_2^1(i, k) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} \end{vmatrix}, & A_2^2(i, k) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_k} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_k} \end{vmatrix}, \\ A_0(i, k) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f^1(i, k)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, k)}{\partial y_i} \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Аналогично записываются $A_1^1(j, k)$, $A_1^2(j, k)$, $A_2^1(j, k)$, $A_2^2(j, k)$, $A_0(j, k)$. Для $\alpha = 1, 2$ получаем матрицу системы (4.10) вида

$$\begin{pmatrix} A_1^1(i, k)A_0(j, k) & -A_1^2(i, k)A_0(j, k) & A_1^1(j, k)A_0(i, k) & -A_1^2(j, k)A_0(i, k) \\ A_2^1(i, k)A_0(j, k) & -A_2^2(i, k)A_0(j, k) & A_2^1(j, k)A_0(i, k) & -A_2^2(j, k)A_0(i, k) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Лемма 4.2.1. ([2*]). Ранг системы функционально-дифференциальных соотношений (4.10) равен 2.

Доказательство. Заметим, что, условия (4.2) для пары $\langle jk \rangle$ имеют следующий вид:

$$\frac{\partial(f^1(j, k), f^2(j, k))}{\partial(x_j, y_j)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f^1(j, k), f^2(j, k))}{\partial(x_k, y_k)} \neq 0. \quad (4.13)$$

Выделим в матрице (4.12) квадратную подматрицу второго порядка, содержащую отличный от нуля определитель $A_0(i, k)$, для определителя которой в силу (4.13) справедливо соотношение

$$\begin{vmatrix} -A_1^1(j, k)A_0(i, k) & A_1^2(j, k)A_0(i, k) \\ -A_2^1(j, k)A_0(i, k) & A_2^2(j, k)A_0(i, k) \end{vmatrix} = -(A_0(i, k))^2 \left(\frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_j} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_j} - \right. \\ \left. - \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_j} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial f^1(j, k)}{\partial y_k} \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial x_k} - \frac{\partial f^2(j, k)}{\partial y_k} \frac{\partial f^1(j, k)}{\partial x_k} \right) \neq 0.$$

Следовательно, ранг системы (4.10) равен 2. $\square$

Фиксируя в коэффициентах $A_\mu^\beta(i, k)$, $A_\mu^\beta(j, k)$, где $\mu, \beta = 1, 2$, соотношений (4.10) координаты точки k , то есть полагая $k = k_0$, получим систему двух независимых однородных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных относительно компонент метрической функции $f(i, j)$:

$$\left. \begin{aligned} & A_2^1(i, k_0)A_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - A_2^2(i, k_0)A_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ & + A_2^1(j, k_0)A_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - A_2^2(j, k_0)A_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \\ & A_1^1(i, k_0)A_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} - A_1^2(i, k_0)A_0(j, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ & + A_1^1(j, k_0)A_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} - A_1^2(j, k_0)A_0(i, k_0) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

где $\alpha = 1, 2$.

Поделив почленно уравнения системы (4.14) на произведение $A_0(i, k_0)A_0(j, k_0) \neq 0$ и вводя новые обозначения коэффициентов, полу-

чим более простую ее запись:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1(i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma_1(i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda_1(j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma_1(j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \\ \lambda_2(i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma_2(i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda_2(j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma_2(j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

в которой, например, $\lambda_\alpha(i) = \lambda_\alpha(x_i, y_i) = A_\alpha^1(i, k_0)/A_0(i, k_0)$,
 $\sigma_\alpha(i) = \sigma_\alpha(x_i, y_i) = -A_\alpha^2(i, k_0)/A_0(i, k_0)$, и $\lambda_\alpha^2(x, y) + \sigma_\alpha^2(x, y) \neq 0$ по
 лемме 4.2.1.

Рассмотрим функции двух вещественных аргументов $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$
 класса гладкости C^2 для которых

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \neq 0. \quad (4.16)$$

В уравнениях системы (4.15) произведем локально обратимую глад-
 кую замену координат

$$\zeta = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \quad (4.17)$$

Якобиан замены имеет вид

$$\begin{vmatrix} \varphi_x(i) & \psi_x(i) & 0 & 0 \\ \varphi_y(i) & \psi_y(i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_x(j) & \psi_x(j) \\ 0 & 0 & \varphi_y(j) & \psi_y(j) \end{vmatrix}$$

и в силу (4.16) отличен от нуля. Тогда первое уравнение системы (4.15)
 запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} &(\lambda_1(i)\varphi_x(i) + \sigma_1(i)\varphi_y(i)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_i} + \\ &+ (\lambda_1(i)\psi_x(i) + \sigma_1(i)\psi_y(i)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \eta_i} + \\ &+ (\lambda_1(j)\varphi_x(j) + \sigma_1(j)\varphi_y(j)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_j} + \\ &+ (\lambda_1(j)\psi_x(j) + \sigma_1(j)\psi_y(j)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \eta_j} = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

и аналогично для второго уравнения системы (4.15).

Если функции φ и ψ для точек $i = (x_i, y_i)$, $j = (x_j, y_j)$ взять из решений дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\lambda_1(x, y)\varphi_x(x, y) + \sigma_1(x, y)\varphi_y(x, y) &= 1, \\ \lambda_1(x, y)\psi_x(x, y) + \sigma_1(x, y)\psi_y(x, y) &= 0,\end{aligned}$$

где $\lambda_1^2 + \sigma_1^2 \neq 0$, то для уравнения (4.18) получим максимально простой его вид $\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \zeta_j} = 0$. Введенные выше при замене (4.17) новые координаты ζ, η переобозначим для удобства через прежние соответственно x, y . Функции f^α при любом значении индекса $\alpha = 1, 2$ являются решениями двух дифференциальных уравнений, полученных путем преобразования системы (4.15):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \lambda(i)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma(i)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda(j)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma(j)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

где, напомним, $\alpha = 1, 2$.

Продифференцируем второе уравнение системы (4.19) вначале по переменной x_i , а затем по x_j . Сложив результаты дифференцирования, получим третье уравнение, которое расширит исходную систему (4.19):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \lambda(i)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma(i)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda(j)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma(j)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \\ \lambda_x(i)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma_x(i)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda_x(j)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma_x(j)\frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

причем слагаемые со вторыми частными производными в последнем уравнении уничтожаются с учетом первого уравнения.

Лемма 4.2.2. ([2*]). *Ранг касательного отображения для отображения (4.1) остается максимальным (то есть равным 2) только*

тогда, когда ранг матрицы системы уравнений (4.20) не более двух.

Доказательство. Для отображения (4.1) имеем матрицу касательного отображения вида

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^1(i, j)}{\partial y_j} \\ \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_i} & \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial y_i} & \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial x_j} & \frac{\partial f^2(i, j)}{\partial y_j} \end{pmatrix}.$$

Пусть ранг матрицы системы (4.20) равен 3. Коэффициенты системы (4.20) не зависят от значения α . Поэтому при ранге системы уравнений (4.20), равном трем, она будет иметь только одно ($4-3=1$) линейно независимое решение. При этом строки матрицы B окажутся линейно зависимыми, что противоречит максимальной ранга касательного отображения (4.1). $\square$

Обратим в нуль все миноры третьего порядка матрицы системы (4.20). Получаем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} -\sigma(i)\sigma_x(j) + \sigma(j)\sigma_x(i) &= 0, \\ -\lambda(j)\sigma_x(j) + \sigma(j)\lambda_x(j) + \lambda(i)\sigma_x(j) - \sigma(j)\lambda_x(i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Первое уравнение, записанное в виде $\sigma_x(j)/\sigma(j) = \sigma_x(i)/\sigma(i) = \text{const} = a$, с учетом произвольности точек i, j приводит к дифференциальному уравнению $\sigma_x = a\sigma$. Второе уравнение можно записать в виде $\lambda_x(i) - a\lambda(i) = \lambda_x(j) - a\lambda(j) = \text{const} = b$. Оно приводит к дифференциальному уравнению $\lambda_x = a\lambda + b$.

Таким образом, получаем систему из двух дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} = a\lambda(x, y) + b, \quad \frac{\partial \sigma(x, y)}{\partial x} = a\sigma(x, y), \quad (4.22)$$

где $a = \text{const}$, $b = \text{const}$.

При интегрировании системы (4.22) отдельно рассмотрим следующие три случая: **1.** $a = 0$, $b = 0$; **2.** $a = 0$, $b \neq 0$; **3.** $a \neq 0$.

В первом случае, когда $a = 0$, $b = 0$, система (3.22) будет иметь следующие решения:

$$\lambda(x, y) = \lambda(y), \quad \sigma(x, y) = \sigma(y).$$

В результате подстановки этих решений в (4.19), получим систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \lambda(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \lambda(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

где $\alpha = 1, 2$ и $\sigma(y) \neq 0$, так при $\sigma(y) = 0$ алгебраическая в отношении производных система уравнений (4.23) будет иметь только нулевое решение: $\partial f(i, j)/\partial x_i = 0$, $\partial f(i, j)/\partial x_j = 0$, что противоречит условию (4.2).

В системе (4.23) произведем локально обратимую замену координат

$$\tilde{x} = x + \varphi(y), \quad \tilde{y} = \psi(y), \quad (4.24)$$

где $\psi' \neq 0$. Тогда первое уравнение системы (4.23) сохранит свой простой вид в новых координатах, а второе изменится:

$$\begin{aligned} &(\lambda(y_i) + \sigma(y_i)\varphi'(y_i)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{x}_i} + \sigma(y_i)\psi'(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{y}_i} + \\ &+ (\lambda(y_j) + \sigma(y_j)\varphi'(y_j)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{x}_j} + \sigma(y_j)\psi'(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{y}_j} = 0. \end{aligned}$$

Функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ в замене координат (4.24) возьмем из решений дифференциальных уравнений $\lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y) = 0$, $\sigma(y)\psi'(y) = 1$. После обозначения новых переменных $\tilde{x}, \tilde{y}$ соответственно именами x, y система (4.23) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Общее решение системы уравнений (4.25) находится методом характеристик:

$$f^\alpha(i, j) = \Theta^\alpha(x_i - x_j, y_i - y_j),$$

где $\alpha = 1, 2$. Два её независимых интеграла $f^1 = x_i - x_j$ и $f^2 = y_i - y_j$ совпадают с компонентами первой канонической формы (4.8) невырожденной метрической вектор-функции из теоремы 4.2.1.

Во втором случае, когда $a = 0$, $b \neq 0$, система (4.22) будет иметь следующие решения:

$$\lambda(x, y) = bx + b\lambda(y), \quad \sigma(x, y) = b\sigma(y),$$

где $\sigma(y) \neq 0$ для согласования с условием (4.2). Тогда система (4.19) примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ (x_i + \lambda(y_i)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \sigma(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + \\ (x_j + \lambda(y_j)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \sigma(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Применим к уравнениям системы (4.26) локально обратимую замену координат (4.24). Тогда первое уравнение системы (4.26) сохранит свой простой вид в новых координатах, а второе изменится:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{x}_i} + (\lambda(y_i) + \sigma(y_i) \varphi'(y_i) - \varphi(y_i)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{x}_i} + \\ + \sigma(y_i) \psi'(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{y}_i} + \tilde{x}_j \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{x}_j} + \\ + (\lambda(y_j) + \sigma(y_j) \varphi'(y_j) - \varphi(y_j)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{x}_j} + \sigma(y_j) \psi'(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{y}_j} = 0. \end{aligned}$$

Функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ в замене координат (4.24) возьмем из решений дифференциальных уравнений $\lambda(y) + \sigma(y) \varphi'(y) - \varphi(y) = 0$, $\sigma(y) \psi'(y) = 1$. С последующим переобозначением новых переменных $\tilde{x}, \tilde{y}$ соответствен-

но именами x, y система (4.26) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ x_i \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + x_j \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Общее решение системы уравнений (4.27) находится методом характеристик:

$$f^\alpha(i, j) = \Theta^\alpha((x_i - x_j) \exp(-y_i), (x_i - x_j) \exp(-y_j)),$$

где $\alpha = 1, 2$. Два её независимых интеграла $f^1 = (x_i - x_j) \exp(-y_i)$ и $f^2 = (x_i - x_j) \exp(-y_j)$ переходят в компоненты второй канонической формы (4.9) невырожденной метрической вектор-функции при следующей обратимой замене координат: $x \rightarrow x, \exp(-y) \rightarrow y$.

Рассмотрим последний случай, когда $a \neq 0$. Дифференциальные уравнения (4.22) на коэффициенты системы (4.19) будут иметь следующие решения:

$$\lambda(x, y) = e^{ax} \lambda(y) - \frac{b}{a}, \quad \sigma(x, y) = e^{ax} \sigma(y), \quad (4.28)$$

в которых $\sigma(y) \neq 0$, чтобы не нарушалось условие (4.2). После подстановки решений (4.28) исходная система (4.19) будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ e^{ax_i} \lambda(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + e^{ax_i} \sigma(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + e^{ax_j} \lambda(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} + \\ &+ e^{ax_j} \sigma(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Произведем в полученной системе локально обратимую замену координат: $\tilde{x} = ax + \varphi(y), \tilde{y} = \psi(y)$. Тогда первое уравнение системы (4.29) сохранит свой максимально простой вид в новых координатах, а второе

изменится:

$$\begin{aligned}
& e^{\tilde{x}_i - \varphi(y_i)} (\lambda(y_i) + \sigma(y_i) \varphi'(y_i)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{x}_i} + e^{\tilde{x}_i - \varphi(y_i)} \sigma(y_i) \psi'(y_i) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{y}_i} + \\
& + e^{\tilde{x}_j - \varphi(y_j)} (\lambda(y_j) + \sigma(y_j) \varphi'(y_j)) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{x}_j} + \\
& + e^{\tilde{x}_j - \varphi(y_j)} \sigma(y_j) \psi'(y_j) \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial \tilde{y}_j} = 0.
\end{aligned}$$

Функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ в замене координат (4.29) возьмем из решений дифференциальных уравнений $\lambda(y) + \sigma(y) \varphi'(y) = 0$, $e^{-\varphi(y)} \sigma(y) \psi'(y) = 1$. С последующим переобозначением новых переменных $\tilde{x}, \tilde{y}$ соответственно именами x, y система (4.29) примет вид:

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial x_j} = 0, \\
& e^{x_i} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_i} + e^{x_j} \frac{\partial f^\alpha(i, j)}{\partial y_j} = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Общее решение системы уравнений (4.30) находится методом характеристик:

$$f^\alpha(i, j) = \Theta^\alpha(x_i - x_j, y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j),$$

где $\alpha = 1, 2$. Два её независимых интеграла $f^1 = x_i - x_j$ и $f^2 = y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j$ переходят в компоненты второй канонической формы (4.9) невырожденной метрической вектор-функции при следующих замене координат: $y/\exp x \rightarrow x$, $\exp x \rightarrow y$ и масштабном преобразовании: $f^2 \exp f^1 \rightarrow f^1$, $f^2 \rightarrow f^2$. $\square$

Заметим, что в доказательстве теоремы 4.2.1 было получено три выражения, задающие на двумерном многообразии двуметрические феноменологически симметричные двумерные геометрии ранга 3, два из которых, как было сказано выше, эквивалентны. Соответствующие замена координат и масштабное преобразование были найдены как решения системы функциональных уравнений на эквивалентность в рамках решения задачи 4.3.1 следующего параграфа 4.3.

Следует также отметить, что доказательство теоремы 4.2.1 позволяет уточнить формулировку пункта 2 теоремы 4.1.1. Действительно, *существуют* метрические функции $f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j))$, удовлетворяющие аксиомам 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, которые на гладком многообразии $\mathfrak{M}_2$ задают двуметрические феноменологически симметричные двумерные геометрии ранга 3.

4.3 Анализ полученных результатов классификации на эквивалентность

С точностью до обратимых масштабного преобразования метрической функции и замены локальных координат в многообразии $\mathfrak{M}_2$ в рамках доказательства классификационной теоремы 4.2.1 установлено, что существует два и только два не сводимых друг к другу канонических выражения метрической функции $f = (f^1, f^2)$: (4.8) и (4.9), задающей на гладком многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3. Этот результат был получен здесь аналитическим методом, суть которого состоит в исследовании рангов построенных отображений (см. доказательство теоремы 4.1.1) и решении возникающих дифференциальных уравнений. Решение этих уравнений может привести к появлению других выражений для метрической функции, задающей такую геометрию, что устанавливается по рангу соответствующей функциональной матрицы (4.6). Они явно не совпадают с каноническими формами (4.8) и (4.9), но сводятся к ним некоторыми заменой координат в $\mathfrak{M}_2$ и масштабным преобразованием метрической функции. Поэтому естественно сформулировать и решить следующую задачу.

Задача 4.3.1. Установить эквивалентность или неэквивалентность следующих выражений для метрической вектор-функции, которая задаёт на гладком многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3:

$$1. \quad f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i - y_j, \quad (4.31)$$

$$2. \quad f^1(i, j) = (x_i - x_j)y_i, \quad f^2(i, j) = (x_i - x_j)y_j, \quad (4.32)$$

$$3. \quad f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j. \quad (4.33)$$

Решение. Необходимо исследовать на эквивалентность все три возможные пары:

$$1) \quad \mathbf{1} \text{ и } \mathbf{2}, \quad 2) \quad \mathbf{2} \text{ и } \mathbf{3}, \quad 3) \quad \mathbf{1} \text{ и } \mathbf{3}. \quad (4.34)$$

Пусть имеются гладкие локально-обратимые замена координат в многообразии $\mathfrak{M}_2$ и масштабное преобразование метрической функции

$$\varphi(x, y) \rightarrow x, \quad \tau(x, y) \rightarrow y, \quad \psi(f) \rightarrow f, \quad (4.35)$$

где $\psi(f) = (\psi^1(f^1, f^2), \psi^2(f^1, f^2))$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\frac{\partial(\varphi, \tau)}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \frac{\partial(\psi^1, \psi^2)}{\partial(f^1, f^2)} \neq 0. \quad (4.36)$$

Рассмотрим первый случай, то есть установим, эквивалентны или не эквивалентны выражения **1** и **2** для метрической функции f – (4.31) и (4.32).

Соответствующую систему функциональных уравнений на эквивалентность

$$\left. \begin{aligned} \psi^1[(\varphi(i) - \varphi(j))\tau(i), (\varphi(i) - \varphi(j))\tau(j)] &= x_i - x_j, \\ \psi^2[(\varphi(i) - \varphi(j))\tau(i), (\varphi(i) - \varphi(j))\tau(j)] &= y_i - y_j, \end{aligned} \right\}$$

запишем в более удобном для решения виде

$$\left. \begin{aligned} (\varphi(i) - \varphi(j))\tau(i) &= \psi^1(x_i - x_j, y_i - y_j), \\ (\varphi(i) - \varphi(j))\tau(j) &= \psi^2(x_i - x_j, y_i - y_j), \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

вводя переобозначение $\psi^{-1} \rightarrow \psi$.

Если уравнения (4.37) относительно функций φ , τ и ψ имеют хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям (4.36), то метрические функции (4.31) и (4.32) эквивалентны, если же они не имеют ни одного решения, то функции (4.31) и (4.32) не эквивалентны.

Дифференцируя каждое из уравнений (4.37) по переменным x_i и x_j , легко получаем из результатов дифференцирования следующие два соотношения:

$$\frac{\varphi_x(i) - \varphi_x(j)}{\varphi(i) - \varphi(j)} = -\frac{\tau_x(i)}{\tau(i)} = -\frac{\tau_x(j)}{\tau(j)} = \text{const} = a, \quad (4.38)$$

Из соотношений (4.38), разделяя точки i и j , получаем дифференциальные уравнения

$$\varphi_x(x, y) = a\varphi(x, y) + b, \quad \tau_x(x, y) = -a\tau(x, y) \quad (4.39)$$

и следующие их два решения:

$$\varphi(x, y) = \varphi(y) e^{ax} - \frac{b}{a}, \quad \tau(x, y) = \tau(y) e^{-ax}, \quad (4.40)$$

если $a \neq 0$, и

$$\varphi(x, y) = bx + \varphi(y), \quad \tau(x, y) = \tau(y), \quad (4.41)$$

если $a = 0$, причем в решениях (4.40)

$$\varphi(y)\tau(y) \neq \text{const}, \quad (4.42)$$

а в решениях (4.41)

$$b \neq 0, \quad \tau(y) \neq \text{const}, \quad (4.43)$$

как следствие первого из условий (4.36).

Далее продифференцируем функциональные уравнения (4.37) по переменным y_i и y_j . Действуя аналогично, получим другие два соотношения:

$$\frac{\varphi_y(i) - \varphi_y(j)}{\varphi(i) - \varphi(j)} = -\frac{\tau_y(i)}{\tau(i)} = -\frac{\tau_y(j)}{\tau(j)} = \text{const} = g, \quad (4.44)$$

аналогичные соотношениям (4.38), из которых, разделяя точки i и j , получаем дифференциальные уравнения

$$\varphi_y(x, y) = g\varphi(x, y) + d, \quad \tau_y(x, y) = -g\tau(x, y). \quad (4.45)$$

При подстановке в уравнения (4.45) решений (4.40) получаем противоречие: $\varphi(y)\tau(y) = \text{const}$. Если же в них подставить решения (4.41), то приходим к другому противоречию: $\tau(y) = \text{const}$.

Полученные противоречия доказывают, что система функциональных уравнений (4.37) не имеет ни одного решения, поэтому метрические функции (4.31) и (4.32) не эквивалентны.

Рассмотрим теперь вторую пару выражений **2** и **3** для метрической функции f — (4.32) и (4.33).

Запишем систему функциональных уравнений на эквивалентность этих выражений:

$$\left. \begin{aligned} (\varphi(i) - \varphi(j))\tau(i) &= \psi^1(x_i - x_j, y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j), \\ (\varphi(i) - \varphi(j))\tau(j) &= \psi^2(x_i - x_j, y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j). \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

Дифференцируя каждое из уравнений (4.46) по переменным x_i и x_j , получим, очевидно, соотношения (4.38), соответствующие дифференциальные уравнения (4.39) и их решения (4.40) и (4.41).

Из результатов дифференцирования уравнений (4.46) по переменным y_i и y_j получим другие два соотношения:

$$\frac{\varphi_y(i)e^{x_i} - \varphi_y(j)e^{x_j}}{\varphi(i) - \varphi(j)} = -\frac{\tau_y(i)e^{x_i}}{\tau(i)} = -\frac{\tau_y(j)e^{x_j}}{\tau(j)} = \text{const} = g, \quad (4.47)$$

из которых, разделяя точки i и j , получаем дифференциальные уравнения

$$\varphi_y(x, y)e^x = g\varphi(x, y) + d, \quad \tau_y(x, y)e^x = -g\tau(x, y). \quad (4.48)$$

Решения (4.40) для $a \neq 0$ подставим в уравнения (4.48):

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(y)e^{(a+1)x} &= g \left(\varphi(y) e^{ax} - \frac{b}{a} \right) + d, \\ \tau'(y)e^x &= -g\tau(y). \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

Из второго равенства системы (4.49) следует, что $\tau'(y) = 0$, и потому $g = 0$. Из первого равенства системы (4.49) при $g = 0$ следует $a = -1$, так как $\varphi(y) \neq \text{const}$ по условию (4.42), и потому $\varphi'(y) = d \neq 0$. В итоге получаем

$$\varphi(y) = dy + h, \quad \tau(y) = c,$$

что можно подставить в решения (4.40), полагая $a = -1$:

$$\varphi(x, y) = (dy + h)e^{-x} + b, \quad \tau(x, y) = ce^x, \quad (4.50)$$

где $d \neq 0$ и $c \neq 0$.

Для решений (4.50) выполняется первое из условий (4.36), следовательно, они определяют локально-обратимую замену координат, при которой метрическая функция (4.33) может быть сведена ко второй канонической форме (4.32).

Из общих решений (4.50) можно взять частное для тех же целей:

$$\varphi(x, y) = ye^{-x}, \quad \tau(x, y) = e^x \quad (4.51)$$

полагая $d = 1$, $h = 0$, $b = 0$, $c = 1$.

Далее найдем масштабную функцию $\psi(f)$. Для этого подставим выражения (4.51) в исходную систему функциональных уравнений (4.46):

$$\begin{aligned} \psi^1(f^1, f^2) &= \psi^1(x_i - x_j, y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j) = (y_i e^{-x_i} - y_j e^{-x_j}) e^{x_i} = \\ &= (y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j) e^{x_i - x_j} = f^2 \exp f^1, \\ \psi^2(f^1, f^2) &= \psi^1(x_i - x_j, y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j) = (y_i e^{-x_i} - y_j e^{-x_j}) e^{x_j} = \\ &= y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j = f^2, \end{aligned}$$

то есть

$$\psi^1(f^1, f^2) = f^2 \exp f^1, \quad \psi^2(f^1, f^2) = f^2 \quad (4.52)$$

при очевидном выполнении второй части условий (4.36).

Таким образом, обратимые замена координат и масштабное преобразование (4.35), задаваемые функциями (4.51) и (4.52), устанавливают эквивалентность выражений **2** и **3** для метрической функции — (4.32) и (4.33) во второй паре.

Из последнего результата следует, что для третьей пары выражений **1** и **3** метрической функции f — (4.31) и (4.33) соответствующие функциональные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \varphi(i) - \varphi(j) &= \psi^1(x_i - x_j, y_i - y_j), \\ \tau(i)e^{-(\varphi(i) - \varphi(j))} - \tau(j) &= \psi^2(x_i - x_j, y_i - y_j) \end{aligned} \right\}$$

не имеют ни одного решения. А это означает, что метрические функции (4.31) и (4.33) не эквивалентны.

Дополнительно заметим, что нет никакой необходимости подставлять решения (4.41) в уравнения (4.48), так как эквивалентность метрических функций (4.32) и (4.33) была установлена при использовании решений (4.40).

Решением задачи 4.3.1 устанавливается *совпадение* классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 3, полученной нами аналитическим методом, с соответствующей классификацией, построенной ранее Г.Г. Михайличенко [46] групповым методом. Этот факт независимо подтверждает её полноту.

4.4 Группы движений и их двухточечные инварианты

Согласно общей теореме 1.3.1 об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий, приведенной в § 1.3 первой главы, двуметрические феноменологически симметричные двумерные геометрии ран-

га 3 наделены групповой симметрией. Убедимся, что степень групповой симметрии этих геометрий равна 2 (см. теорему 1.3.1 из § 1.3 главы 1). Таких геометрий в классификации всего две, как это было установлено в рамках группового подхода Г.Г. Михайличенко [46] и подтверждено примененным в настоящей работе автором аналитическим методом (см. §§ 4.1 – 4.3 главы 4).

В соответствии с § 1.2 первой главы назовём гладкое локально обратимое преобразование двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$

$$x' = \lambda(x, y), \quad y' = \sigma(x, y), \quad (4.53)$$

удовлетворяющее условию

$$\frac{\partial(\lambda(x, y), \sigma(x, y))}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad (4.54)$$

движением, если оно сохраняет метрическую функцию (4.1):

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (4.55)$$

где, например, $\lambda(i) = \lambda(x_i, y_i)$, $\sigma(i) = \sigma(x_i, y_i)$. Напомним, что равенство (4.55) при известном координатном представлении метрической функции (4.1) является функциональным уравнением на множество движений.

Следуя работе [46], найдем сначала совокупность всех движений для метрической функции, представленной каноническим выражением (4.8) (см. теорему 4.2.1 § 4.2):

$$f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i - y_j. \quad (4.56)$$

Запишем для метрической функции (4.56) систему двух функциональных уравнений (4.55) на множество движений:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(i) - \lambda(j) &= x_i - x_j, \\ \sigma(i) - \sigma(j) &= y_i - y_j. \end{aligned} \right\}$$

Решения этой системы легко находятся методом разделения переменных – координат точек i и j :

$$\lambda(x, y) = x + a, \quad \sigma(x, y) = y + b. \quad (4.57)$$

Эти решения задают локальную двухпараметрическую группу преобразований (4.53) двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$, в чем можно убедиться, проверив выполнение всех аксиом группы преобразований.

Метрическая функция, заданная выражениями (4.56), является единственным двухточечным инвариантом группы преобразований (4.53) с функциями (4.57). Запишем функциональное уравнение (4.55) на метрическую функцию для этой группы преобразований:

$$f(x_i + a, y_i + b, x_j + a, y_j + b) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (4.58)$$

Дифференцируя данное уравнение по параметрам a , b и придавая им в найденных соотношениях значения, соответствующие тождественному преобразованию $a = 0$, $b = 0$, получим систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая каждое уравнение этой системы независимо методом характеристик находим для первого уравнения интеграл: $x_i - x_j = \text{const}$, для второго уравнения интеграл: $y_i - y_j = \text{const}$. Тогда общее решение этой системы есть произвольная достаточно гладкая функция от этих интегралов, которые совпадают с компонентами метрической функции (4.56), задающей на многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3.

Далее, найдем совокупность всех движений для метрической функции, представленной каноническим выражением (4.9) (см. теорему 4.2.1 § 4.2):

$$f^1(i, j) = (x_i - x_j)y_i, \quad f^2(i, j) = (x_i - x_j)y_j, \quad (4.59)$$

которое также, как и в случае первой канонической формы (4.56) оказывается двухпараметрической группой преобразований двумерного многообразия $\mathfrak{M}_2$.

Запишем для метрической функции (4.59) систему двух функциональных уравнений (4.55) на множество движений:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(i) &= (x_i - x_j)y_i, \\ (\lambda(i) - \lambda(j))\sigma(j) &= (x_i - x_j)y_j, \end{aligned} \right\}$$

решая которую методом разделения переменных – координат точек i, j , находим:

$$\lambda(x, y) = ax + b, \quad \sigma(x, y) = \frac{y}{a}, \quad (4.60)$$

где $a \neq 0, b$ – произвольные постоянные.

Множество преобразований (4.53) с функциями (4.60) является группой, которая определяет групповую симметрию степени 2 двумерной двуметрической геометрии, задаваемой на многообразии $\mathfrak{M}_2$ функцией (4.59).

Решая функциональное уравнение

$$f\left(ax_i + b, \frac{y_i}{a}, ax_j + b, \frac{y_j}{a}\right) = f(x_i, y_i, x_j, y_j), \quad (4.61)$$

можно однозначно восстановить метрическую функцию (4.59) как двухточечный инвариант группы преобразований (4.53) с функциями (4.60).

Дифференцируя уравнение (4.61) по параметрам b и a , получим следующую систему двух функционально-дифференциальных соотноше-

ний:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} x_i - \frac{1}{a^2} \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_i} y_i + \frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_j} x_j - \frac{1}{a^2} \frac{\partial f(i', j')}{\partial y'_j} y_j &= 0, \end{aligned} \right\} (4.62)$$

где $a \neq 0$, и, например, $\frac{\partial f(i', j')}{\partial x'_i} = \frac{\partial f(x'_i, y'_i, x'_j, y'_j)}{\partial x'_i}$. В соотношениях (4.62) параметрам a , b придадим значения, соответствующие тождественному преобразованию: $a = 1$, $b = 0$, в результате чего получим систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} x_i - \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} y_i + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} x_j - \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} y_j &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Общее решение первого уравнения этой системы $f(i, j) = \Theta(x_i - x_j, y_i, y_j)$ подставим во второе уравнение:

$$u \frac{\partial \Theta(u, y_i, y_j)}{\partial u} - y_i \frac{\partial \Theta(u, y_i, y_j)}{\partial y_i} - y_j \frac{\partial \Theta(u, y_i, y_j)}{\partial y_j} = 0,$$

где $u = x_i - x_j$. Соответствующие уравнения характеристик

$$\frac{du}{u} = -\frac{dy_i}{y_i} = -\frac{dy_j}{y_j}$$

имеют два независимых интеграла: $uy_i = \text{const}$, $uy_j = \text{const}$, которые определяют компоненты метрической функции:

$$f(i, j) = (f^1(i, j), f^2(i, j)) = ((x_i - x_j)y_i, (x_i - x_j)y_j).$$

Рассмотрим, наконец, аналогичную задачу в отношении следующей метрической функции

$$f^1(i, j) = x_i - x_j, \quad f^2(i, j) = y_i \exp(-(x_i - x_j)) - y_j, \quad (4.63)$$

которая также задает на многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3, однако, данное

выражение в классификационной теореме 4.2.1 отсутствует, поскольку оно эквивалентно второму, рассмотренному выше, каноническому выражению (4.59). Этот факт был установлен в решении задачи 4.3.1 § 4.3. В силу установленной эквивалентности множество движений для этой метрической функции будет являться двухпараметрической группой преобразований многообразия $\mathfrak{M}_2$, которая должна быть подобна группе преобразований (4.53) с функциями (4.60) с точностью до замены координат x, y в многообразии $\mathfrak{M}_2$ и замены параметров a, b в действующей группе G^2 . Убедимся в сказанном.

Вначале найдем для метрической функции (4.63) множество всех движений, записав соответствующую систему двух функциональных уравнений (4.55):

$$\left. \begin{aligned} \lambda(i) - \lambda(j) &= x_i - x_j, \\ \sigma(i)e^{-(\lambda(i)-\lambda(j))} - \sigma(j) &= y_i e^{-(x_i-x_j)} - y_j. \end{aligned} \right\} \quad (4.64)$$

Решая первое уравнение системы (4.64) методом разделения переменных, находим:

$$\lambda(x, y) = x + a.$$

Подставим это выражение в другое уравнение той же системы и методом разделения переменных получаем решение для второй функции:

$$\sigma(x, y) = y + be^x.$$

Таким образом, множество всех движений (4.53) для метрической функции (4.63) имеет вид

$$x' = x + a, \quad y' = y + be^x \quad (4.65)$$

и оно является двухпараметрической группой, определяющей групповую симметрию степени 2 соответствующей двуметрической двумерной геометрии, задаваемой метрической функцией (4.63).

Покажем, что найденная ранее группа движений (4.53) с функциями (4.60) и группа движений (4.65) подобны. Для этого преобразуем уравнения группы (4.65) следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{x'} &= e^{x+a} = e^x e^a, \\ e^{-x'} y' &= (y + b e^x) e^{-(x+a)}. \end{aligned}$$

Производя затем замены координат $y e^{-x} \rightarrow x$, $e^x \rightarrow y$ и параметров $e^{-a} \rightarrow a$, $b e^{-a} \rightarrow b$, получаем группу движений (4.53) с функциями (4.60), устанавливая тем самым её подобие группе движений (4.65).

Рассмотрим последний вопрос – о восстановлении метрической функции (4.63). Запишем функциональное уравнение (4.55) на метрическую функцию для группы преобразований (4.65):

$$f(x_i + a, y_i + b e^{x_i}, x_j + a, y_j + b e^{x_j}) = f(x_i, y_i, x_j, y_j). \quad (4.66)$$

Дифференцируя данное уравнение по параметрам a , b и придавая им в найденных функционально-дифференциальных соотношениях значения, соответствующие покою $a = 0$, $b = 0$, получим следующую систему двух дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial x_j} &= 0, \\ e^{x_i} \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_i} + e^{x_j} \frac{\partial f(i, j)}{\partial y_j} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая каждое уравнение этой системы независимо методом характеристик находим для первого уравнения интеграл: $x_i - x_j = \text{const}$, для второго уравнения интеграл: $y_i e^{-(x_i - x_j)} - y_j = \text{const}$. Тогда общее решение этой системы есть произвольная достаточно гладкая функция от этих интегралов, которые совпадают с компонентами метрической функции (4.63), задающей на многообразии $\mathfrak{M}_2$ двуметрическую феноменологически симметричную двумерную геометрию ранга 3.

Заключение

Диссертационная работа посвящена исследованию аналитическими методами проблем классификации и нахождения групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных и трехмерных геометрий максимальной подвижности, задаваемых на двумерном и трехмерном дифференцируемых многообразиях метрическими (двухточечными) функциями.

В первой главе приведены основные определения теории, в рамках которой выполнялась работа. Во второй главе разработан метод решения функциональных уравнений для нахождения полных групп движений плоскости Гельмгольца, псевдогельмгольцевой, дуальногельмгольцевой и симплицальной плоскостей; установлена связь метрической функции и всех найденных невырожденных двухточечных инвариантов групп движений этих двумерных геометрий. Развивая далее этот метод, можно использовать его для нахождения полных групп движений феноменологически симметричных геометрий более высокой размерности, а также всех невырожденных двухточечных инвариантов этих групп.

В третьей главе методом экспоненциального отображения найдены явные выражения локальных групп движений симплицальной II типа и псевдогельмгольцевой, гельмгольцевой и симплицальной III типа, симплицальной I типа и дуальногельмгольцевой геометрий, являющихся геометриями локальной максимальной подвижности, задаваемыми на трехмерном многообразии соответствующими метрическими функциями.

В четвертой главе разработан аналитический метод классификации, примененный к классификации двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий, которая ранее была построена

групповым методом. Аналитический же метод включает в себя исследование строения и определение ранга соответствующей функциональной матрицы, а также изучение следующих из нее систем функционально-дифференциальных соотношений и решение возникающих при этом систем дифференциальных уравнений.

Аналитические методы могут быть применены при проведении классификации других феноменологически симметричных геометрий (например, трехмерных триметрических ранга 3, трехмерных ранга 5, четырехмерных ранга 6 и т.д.), при определении групп движений и всех их невырожденных двухточечных инвариантов.

Литература

- [1] Александров, А.Д., Берестовский, В.Н., Николаев, И.Г. *Обобщенные римановы пространства* / А.Д. Александров, В.Н. Берестовский, И.Г. Николаев // Успехи математических наук. — 1986. — Т. 41, вып. 3. — С. 3 – 44.
- [2] Алексеевский, Д.В., Винберг, Э.Б., Солодовников, А.С. *Геометрия пространств постоянной кривизны.* / Д.В. Алексеевский, Э.Б. Винберг, А.С. Солодовников «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления Т. 29 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». — М.: 1988. — С. 5 – 146
- [3] Берже, М. *Геометрия: Пер. с франц. Т1.* — М.: Мир, 1984. — 560 с.
- [4] Берестовский, В.Н. *Однородные пространства с внутренней метрикой: диссертация на соиск. учен. степ. доктора физико-математических наук: 01.01.04 Геометрия и топология.* — Новосибирск. — 1990. — 269 с.
- [5] Бредон, Г. *Введение в теорию компактных групп преобразований.* — М.: Наука, 1980. — 440 с.
- [6] Бураго, Ю.Д., Залгаллер, В.А. *Введение в риманову геометрию* / Ю.Д. Бураго, В.А. Залгаллер. — СПб. : Наука, 1994. — 318 с.
- [7] Виноградов, И.М. *Математическая энциклопедия* / И.М. Виноградов, т.1. — М.: Советская энциклопедия, 1977. — 1152 с.

- [8] Владимиров, Ю.С. *Описание взаимодействий в рамках теории физических структур* / Ю.С. Владимиров. // Вычислительные системы. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988. — Вып. 125. — С. 61 – 87.
- [9] Владимиров, Ю.С. *Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений* / Ю.С. Владимиров. — М.: Изд-во. МГУ, 1996. — 262 с.
- [10] Владимиров, Ю.С. *Метафизика* / Ю.С. Владимиров. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. — 568 с.
- [11] Гельмгольц, Г. *О фактах, лежащих в основании геометрии* // Об основаниях геометрии. — М., 1956. — С. 366 – 388.
- [12] Горбацевич, В.В., Онищик, А.Л. *Группы Ли преобразований* / В.В. Горбацевич, А.Л. Онищик. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР). — М., 1988. — Т.20. — С. 103 – 240
- [13] Желобенко, Д.П., Штерн, А.И. *Представления групп Ли* / Д.П. Желобенко, А.И. Штерн. — М.: Наука, 1983. — 360 с.
- [14] Зорич, В.А. *Математический анализ: учебник. Ч. I* / В.А. Зорич. Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: ФАЗИС, 1997. — 554 с.
- [15] Клейн, Ф. *Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа")* / Ф. Клейн. // Об основаниях геометрии. — М., 1956. — С. 402 – 434.
- [16] Колмогоров, А.Н. *Элементы теории функций и функциональный анализ* / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1968.

- [17] Кулаков, Ю.И. *Элементы теории физических структур* / Ю.И. Кулаков. — Новосибирск: НГУ, 1968.
- [18] Кулаков, Ю.И. *Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур* / Ю.И. Кулаков. // Докл. АН СССР. — 1970. — Т.193, № 5. — С. 985 – 987.
- [19] Кулаков, Ю.И. *О теории физических структур* / Ю.И. Кулаков // Записки научных семинаров ЛОМИ. — Л.: Наука, 1983. — Т.127. — С. 103 – 151.
- [20] Кулаков, Ю.И., Владимиров, Ю.С., Карнаух, А.В. *Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику* / Ю.И. Кулаков, Ю.С. Владимиров, А.В. Карнаух. — М.: Архимед, 1992.
- [21] Кулаков, Ю.И. *Теория физических структур* / Ю.И. Кулаков. — М.: Доминико, 2004.
- [22] Кыров В. А. *Шестимерные алгебры Ли групп движений трехмерных феноменологически симметричных геометрий.* // Приложение к книге Г.Г. Михайличенко "Полиметрические геометрии". — Новосибирск: Новосиб. гос.ун-т, 2001. — С. 116 – 143.
- [23] Кыров, В.А. *Гельмгольцевы пространства размерности два* / В.А. Кыров. // Сиб. матем. журн. —2005. — Т 46. № 6. — С. 1341 – 1359.
- [24] Кыров, В.А. *Классификация четырехмерных транзитивных локальных групп Ли преобразований пространства R^4 и их двухточечных инвариантов* / В.А. Кыров. // Изв. вузов. Математи-

ка. — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2008. — № 6. — С. 29 – 42.

- [25] Кыров, В.А. *Феноменологически симметричные локальные группы Ли преобразований пространства R^S* / В.А. Кыров. // Изв. вузов. Математика. — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2009. — № 7. — С. 10 – 21.
- [26] Кыров, В.А. *Критерий невырожденности $sn(n - 1)/2$ -параметрической группы Ли преобразований пространства R^{sn}* / В.А. Кыров. // Сиб. журн. индустр. матем. — 2009. — Т XII. № 1. — С. 109 – 113.
- [27] Кыров, В.А. *Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии* / В.А. Кыров. // Сиб. журн. индустр. матем. — 2010. — Т 13. № 4. — С. 38 – 51.
- [28] Кыров, В.А. *Функциональные уравнения в симплектической плоскости* / В.А. Кыров. // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — Т. 16. № 2. — С. 149 – 153.
- [29] Кыров, В.А. *Геометрия Гельмгольца. Методы изучения.* — LAP, 2011, 275 с.
- [30] Кыров, В.А. *Аналитическое вложение некоторых двумерных геометрий максимальной подвижности* / В.А. Кыров. // Сиб. электрон. матем. изв. — 2019. — Т. 16. — С. 916 – 937. DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.061>
- [31] Лев, В.Х. *Трёхмерные геометрии в теории физических структур* / В.Х. Лев. // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. — 1988. — Вып. 125. — С. 90 – 103.

- [32] Лев, В.Х. *Трёхмерные и четырёхмерные пространства в теории физических структур: диссертация на соиск. уч. степени кандидата физико-математических наук: 01.04.02 Теоретическая физика.* — КЫЗЫЛ, 1989. — 161 с.
- [33] Ляховский В. Д., Блохов А. А. *Группы симметрии и элементарные частицы.* — Ленинград.: Изд.: Ленинградского университета, 1983. — 336 с.
- [34] Михайличенко, Г.Г. *Бинарная физическая структура ранга (3,2).* / Г.Г. Михайличенко. // Сиб. матем. журнал. — 1973. — Т.14, № 5. — С. 1057 – 1064.
- [35] Михайличенко Г.Г. *Двумерные геометрии* // Докл. АН СССР. — 1981. — Т.260, №4, С. 803 – 805.
- [36] Михайличенко, Г.Г. *Трёхмерные алгебры Ли преобразований плоскости* / Г.Г. Михайличенко. // Сиб. матем. журнал. — 1982. — Т.23, № 5. — С. 132 – 141.
- [37] Михайличенко, Г.Г. *О групповой и феноменологической симметрии в геометрии* / Г.Г. Михайличенко. // Докл. АН СССР. — 1983. — Т.269, № 2. — С. 284 – 288.
- [38] Михайличенко, Г.Г. *О групповой и феноменологической симметрии в геометрии* / Г.Г. Михайличенко. // Сиб. матем. журнал. — 1984. — XXV, № 5. — С. 99 – 113.
- [39] Михайличенко, Г.Г. *Некоторые замечания к классификации Ли групп преобразований* / Г.Г. Михайличенко. // Вестник МГУ сер. 1. Математика, механика. — 1986. — № 5. — С. 93.

- [40] Михайличенко, Г.Г. *Групповые свойства физических структур: диссертация на соиск. учен. степ. доктора физико-математических наук: 01.01.04 Геометрия и топология.* — Новосибирск, 1990. — 251 с.
- [41] Михайличенко, Г.Г. *Простейшие полиметрические геометрии* / Г.Г. Михайличенко. // Докл. АН СССР. — 1996. — Т.348, № 1. — С. 22 — 24.
- [42] Михайличенко, Г.Г. *Трёхмерные алгебры Ли локально транзитивных преобразований пространства* / Г.Г. Михайличенко. // Изв. вузов. Матем. — 1997. — №9(424). — С. 41 — 48.
- [43] Михайличенко, Г.Г. *Простейшие полиметрические геометрии. I.* / Г.Г. Михайличенко. // Сиб. матем. журнал. — 1998. — Т.39, № 2. — С. 377 — 395.
- [44] Михайличенко, Г.Г. *Полиметрические геометрии* / Г.Г. Михайличенко. — Новосибирск: НГУ, 2001.
- [45] Михайличенко, Г.Г. *Простейшие полиметрические геометрии. II.* / Г.Г. Михайличенко. // Наука, культура, образование. — 2001. — № 8/9. — С. 7 — 16.
- [46] Михайличенко, Г.Г. *Двумерные геометрии* / Г.Г. Михайличенко. — Барнаул: БГПУ, 2004. — 132 с.
- [47] Михайличенко, Г.Г. *Математические основы и результаты Теории физических структур: монография* / Г.Г. Михайличенко. — Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2016. — 297 с.
- [48] Овсянников, Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* — М.: Наука, 1978.

- [49] Пименов, Р.И. *Необходимые и достаточные условия линейности преобразований, сохраняющих конусы.* / Р.И. Пименов. // Математические заметки. — 1969. — Т.6, № 4. — С. 361 – 369.
- [50] Понтрягин Л.С. *Непрерывные группы.* / Л.С. Понтрягин. — М.: Наука, 1973.
- [51] Пуанкаре, А. *Об основных гипотезах геометрии* / А. Пуанкаре. // Об основаниях геометрии. — М., 1956. — С. 388 – 398.
- [52] Решетняк, Ю.Г. *Двумерные многообразия ограниченной кривизны* / Ю.Г. Решетняк // Совр. пробл. матем. Фунд. напр. — Т. 70 [Геометрия – 4]. — 1989. — С. 5 – 189.
- [53] Blumenthal, L.M. *Theory and Applications of Distance Geometry.* Clarendon Press, Oxford, 1953.
- [54] Busemann H. *Recent Synthetic Differential Geometry* / H. Busemann.— Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag, 1970.
- [55] Busemann H., Phadke B.B. *Spaces with Distinguished Geodesics* / H. Busemann, B.B. Phadke. — New York — Basel — Marsel: Dekker Inc., 1987.
- [56] Bridson M. R., Haefliger A. *Metric spaces of non-positive curvature. Ser. A* / M.R. Bridson, A. Haefliger // Series of Comprehensive Studies in Mathematics. — Berlin: Springer-Verlag. — 1999. — V. 319.
- [57] Mikhaylitchenko, G.G. *Geometries a deux dimensions dans la theorie de structures physiques* / G.G. Mikhaylitchenko // Comptes Rendus de L'Academie des Sciences. Paris, 16 novembre 1981. — Т.293. Serie 1. — P.529 – 531.

- [58] Michailichenko, G.G. *On group and phenomenological simmetries in geometry* / G.G. Michailichenko // Soviet Math. Dokl. — 1983. — V.27, № 2. — P. 325 – 326.
- [59] Papadopoulos A. *Metric spaces, Convexity and Nonpositive curvature* / A. Papadopoulos. — Zurich: European Math. Society, 2005.
- [60] Wene, G.P. *Comments of the geometry of Lie algebras and Lie-homotopic algebras* // Hadronic J., 1985. — Vol.8, №2. — P. 63 – 74.

Список публикаций автора по теме диссертации

- [1*] Богданова, Р.А. *Группы движений двумерных гельмгольцевых геометрий как решение функционального уравнения* / Р.А. Богданова. // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2009. — Т.12, № 4. — С. 12 – 22.
- [2*] Богданова, Р.А. *Классификация двуметрических феноменологически симметричных двумерных геометрий ранга 3* / Р.А. Богданова. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2014. — № 1(27). — С. 11 – 24.
- [3*] Богданова, Р.А. *Группа движений симплициальной плоскости как решение функционального уравнения* / Р.А. Богданова. // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2014. — № 4(30). — С. 5 – 13.
- [4*] Богданова, Р.А. *Двухточечные инварианты групп движений некоторых феноменологически симметричных двумерных геометрий* / Р.А. Богданова. // Вестник Томского государственного универ-

- ситета. Математика и механика. — 2016. — № 1(39). — С. 5 – 12.
DOI: <https://doi.org/10.17223/19988621/39/1>.
- [5*] Богданова, Р.А., Михайличенко, Г.Г. *Вывод уравнения феноменологической симметрии для некоторых трехмерных геометрий* / Р.А. Богданова, Г.Г. Михайличенко // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2018. — № 9. — С. 11 – 20.
- [6*] Кыров, В.А., Богданова, Р.А. *Группы движений некоторых трехмерных геометрий максимальной подвижности* / В.А. Кыров, Р.А. Богданова // Сибирский математический журнал. — 2018. — Т.59, № 2 (348). — С. 412–421. DOI: <https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.215>
- [7*] Богданова, Р.А., Кыров, В.А. *Группы движений собственно гельмгольцевой трехмерной геометрии и симплицальной трехмерной геометрии III типа* / Р.А. Богданова, В.А. Кыров // Известия Алтайского государственного университета. — 2019. — № 4(108). — С. 72 – 75. DOI: [https://doi.org/10.14258/izvasu\(2019\)4-10](https://doi.org/10.14258/izvasu(2019)4-10)
- [8*] Богданова, Р.А. *Группа движений плоскости Гельмгольца* / Р.А. Богданова. // Вестник Барнаульского государственного педагогического университета. — 2008. — № 8 – 3. — С. 10.
- [9*] Богданова, Р.А. *Группы движений симплицальной плоскости как решение функционального уравнения* / Р.А. Богданова. // Материалы XLVI Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. — 2008. — С. 31 – 32.
- [10*] Богданова, Р.А. *Двуметрические феноменологически симметричные двумерные геометрии ранга 3* / Р.А. Богданова. // Современ-

ные методы механики: материалы Международной конференции (Томск, 19 – 20 сентября 2012). – Томск: Изд-во Том. ун-та. — 2012. — С. 5 – 6.

- [11*] Богданова, Р.А. *Исследование ранга отображения двухкомпонентной метрической функции* / Р.А. Богданова. // Сборник научных статей международной школы-семинара: "Ломоносовские чтения на Алтае". Барнаул, 20 – 23 ноября, 2012: в 4 частях. — Барнаул: АлтГПА. — 2012. — Ч. I. — С. 260 – 264.
- [12*] Богданова, Р.А., Кыров, В.А., Михайличенко, Г.Г., Мурадов, Р.М., *Феноменологическая и групповая симметрии некоторых трехмерных геометрий* / Р.А. Богданова, В.А. Кыров, Г.Г. Михайличенко, Р.М. Мурадов // Сборник научных статей международной конференции "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования". Барнаул, 20 – 24 октября, 2015. — Барнаул: Изд-во Алт. ун-та. — 2015. — С. 466 – 470.
- [13*] Богданова, Р.А., Михайличенко, Г.Г., *Вывод уравнения феноменологической симметрии для некоторых трехмерных геометрий* / Р.А. Богданова, Г.Г. Михайличенко // Дни геометрии в Новосибирске — 2016: Тезисы Международной конференции. — Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН. — 2016. — С. 37 – 38.
- [14*] Богданова, Р.А., Кыров, В.А., Михайличенко, Г.Г., *Группы движений некоторых феноменологически симметричных трехмерных геометрий* / Р.А. Богданова, В.А. Кыров, Г.Г. Михайличенко, // Дни геометрии в Новосибирске — 2017: Тезисы Международной

конференции. — Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН. — 2017. — С. 28 – 29.

- [15*] Богданова, Р.А., Кыров, В.А., *Группы движений гельмгольцевых трехмерных геометрий* / Р.А. Богданова, В.А. Кыров // Сборник научных статей международной конференции: "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования". Ответственный редактор Е.Д. Родионов. — Барнаул: Алт. гос. ун-т. — 2017. — С. 230 – 233.
- [16*] Богданова, Р.А., Кыров, В.А., *Группы движений симплициальных трехмерных геометрий максимальной подвижности* / Р.А. Богданова, В.А. Кыров // Сборник научных статей международной конференции: "Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования". Ответственный редактор Е.Д. Родионов. — Барнаул: Алт. гос. ун-т. — 2018. — С. 268 – 272.