

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

**СИСТЕМОЛОГИЯ
И МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

(Вычислительные системы, 135)

Сборник научных трудов

Научные редакторы:

доктор техн. наук Ю.Г. КОСАРЕВ

кандидат философских наук К.Ф. САМОХВАЛОВ

НОВОСИБИРСК 1990

УДК 517.948:530.1:539.12

ФИЗИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА РАНГА (4,4;6)
И ТРЕХКОМПОНЕНТНЫЕ СПИНОРЫ

Ю.С.Владимиров, А.В.Соловьёв

В в е д е н и е

В течение ряда лет развивается предложенная Ю.И.Кулаковым теория физических структур [1,2], которую можно понимать как теорию фундаментальных отношений, предназначенную для переосмысления физических закономерностей. Известно, что теория физических структур может быть построена как на одном множестве элементов (унарные структуры), так и на двух множествах (бинарные структуры). Г.Г.Михайличенко [1,3] были найдены все возможные бинарные структуры с вещественными парными отношениями. В частности, им было показано, что бинарные структуры симметричных рангов (n,n) образуют два типа: структуры ранга $(n,n;a)$ и структуры ранга $(n,n;b)$. Последние характеризуются законом

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \dots & a_{1n} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

и парными отношениями вида:

$$a_{i\alpha} = \sum_{s=1}^{n-1} i^s \alpha^s, \quad (2)$$

где $i^s - (n-1)$ вещественных параметров, поставленных в соответствие элементам множества $\mathcal{M}$, α^s — такое же число параметров, поставленных в соответствие элементам множества $\mathcal{N}$.

Данная работа посвящена развитию теории комплексифицированной бинарной структуры ранга $(4,4;6)$. В этой теории как парные отношения $a_{i\alpha}$, так и параметры i^s, α^s предполагаются комплексными. Для комплексифицированных бинарных структур существенно расширяется сфера возможных приложений в физике. Так, в нашей группе на базе иерархии комплексифицированных бинарных структур симметричных рангов сформулирована программа построения единой теории пространственно-временных отношений и физических взаимодействий, названной *бинарной геометрофизикой*. Цель этих исследований состоит в том, чтобы в рамках структур низших рангов сформулировать и обосновать все основные понятия и закономерности современной физики микромира, включая 4-мерные классические пространственно-временные отношения и существующие модели физических взаимодействий: электрослабых (модель Вайнберга-Салама), сильных (хромодинамика) и т.д. В такой теории ключевую роль играют бинарные структуры типа "б", особенно структуры рангов $(3,3;6)$ и $(4,4;6)$.

В работе одного из авторов [4] была развита теория комплексифицированной структуры ранга $(3,3;6)$ и установлена ее связь с теорией 2-компонентных спиноров и биспиноров, используемых для описания элементарных частиц полуцелого спина. Согласно формуле (2) парное отношение для этой структуры имеет вид:

$$a_{i\alpha} = i^1 \alpha^1 + i^2 \alpha^2, \quad (3)$$

т.е. каждый элемент структуры характеризуется двумя комплексными параметрами. Следовательно, любому элементу можно поставить в соответствие вектор в 2-мерном комплексном пространстве. Нетрудно видеть, что параметры определены неоднозначно, с точностью до некоторой группы линейных преобразований:

$$i^s = A_r^s i^r, \quad \alpha^s = \tilde{A}_r^s \alpha^r. \quad (4)$$

Ключевую роль в теории структур играют фундаментальные $m \times m$ -отношения, выражаемые в виде отличного от нуля определителя (типа записанного в (1)) максимально возможного порядка. Для структуры ранга (3,3;6) это будут 2×2 -отношения между двумя парами разноименных элементов, представимые в форме:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Требование инвариантности этого выражения выделяет из (4) 6-параметрическую группу преобразований $SL(2, \mathbb{C})$. Каждый из определителей в (5) справа можно понимать как антисимметричное скалярное произведение в 2-мерном комплексном пространстве:

$$(\vec{i}, \vec{k}) = \epsilon_{sr} i^s k^r, \quad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \epsilon_{\dot{s}\dot{r}} \alpha^{\dot{s}} \beta^{\dot{r}}. \quad (6)$$

Следовательно, можно утверждать, что элементы структуры являются 2-компонентными спинорами. В бинарной геометрофизике используется случай, когда коэффициенты преобразований (4) комплексно сопряжены, т.е. $\tilde{A}_r^s = (A_r^s)^*$.

В такой теории можно ввести понятие спин-тензора. Наиболее важную роль играют смешанные спин-тензоры второго ранга. Рассмотрим спинтензор $b^{s\dot{r}}$ следующего вида:

$$b^{s\dot{r}} = i^s \alpha^{\dot{r}} + k^s \beta^{\dot{r}}. \quad (7)$$

Легко видеть, что в этом случае спин-тензорный инвариант с точностью до константы совпадает с фундаментальным 2×2 -отношением (5):

$$\frac{1}{2} b_{\dot{x}\dot{x}} b^{\dot{x}\dot{x}} = b^{1\dot{1}} b^{2\dot{2}} - b^{1\dot{2}} b^{2\dot{1}} = \begin{bmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Полагая, что элементы (i, α) и (k, β) находятся "в паре", т.е. их параметры комплексно-сопряжены друг другу:

$$(i^{\dot{x}})^* = \alpha^{\dot{x}}, \quad (k^{\dot{x}})^* = \beta^{\dot{x}}, \quad (9)$$

находим, что матрица из компонент $b^{\dot{x}\dot{x}}$ может быть представлена в виде:

$$\| b^{\dot{x}\dot{x}} \| = I_2 p_0 + \sigma^{\lambda} p_{\lambda}, \quad (10)$$

где I_2 - единичная двухрядная матрица, σ^{λ} - три матрицы Паули, а $p_{\mu} = \{p_0, p_1\}$ - компоненты некоторого вещественного 4-вектора. Тогда (8), очевидно, будет задавать псевдоевклидову квадратичную форму:

$$\frac{1}{2} b_{\dot{x}\dot{x}} b^{\dot{x}\dot{x}} = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \equiv g^{\mu\nu} p_{\mu} p_{\nu}, \quad (11)$$

соответствующую пространству-времени Минковского.

В работе [4] показано, как из параметров двух пар элементов можно построить компоненты биспиноров; из последних и матриц Дирака - образовать 4-векторы, тензоры и т.д. Совместное требование инвариантности отдельных определителей в (5) справа и парных отношений $\alpha_{1\alpha}$ выделяет 3-параметрическую группу преобразований $SU(2)$, соответствующую пространственным поворотам. Эти преобразования, дополненные 3-параметрическим семейством бустов, образуют 6-параметрическую группу Лоренца. Далее, с помощью пары специальным образом связанных элементов структуры ранга $(3, 3; 6)$ можно ввести понятие массивных лептонов и записать для них преобраз уравнения Дирака в импульсном пространстве. Другими словами, в рамках структуры ранга $(3, 3; 6)$ удастся построить довольно широкий круг понятий из физики микро -

мира, не постулируя при этом классическое пространство-время, как это обычно делается в общепринятой теории.

В следующих разделах статьи по образу и подобию структуры ранга (3,3;6) развивается теория структуры ранга (4,4;6) и обсуждается физический смысл возникающих в ней понятий.

1 Бинарная структура ранга (4,4;6) и 3-компонентные спиноры

Согласно формуле (1) закон структуры ранга (4,4;6) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & a_{k\delta} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} & a_{j\delta} \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & a_{i\delta} \end{vmatrix} = 0, \quad (12)$$

где парные отношения между элементами множества $\mathcal{M} = \{i, k, \dots, j, \dots\}$ и $\mathcal{N} = \{\alpha, \beta, \dots, \gamma, \dots\}$ выражаются следующим образом:

$$a_{i\alpha} = i^1 \alpha^1 + i^2 \alpha^2 + i^3 \alpha^3. \quad (13)$$

Здесь i^s и α^s - числовые параметры, характеризующие элементы $i \in \mathcal{M}$ и $\alpha \in \mathcal{N}$ соответственно. В дальнейшем будем предполагать, что они принимают комплексные значения.

Назовем фундаментальным 3x3-отношением между $(i, k, j) \in \mathcal{M}$ и $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{N}$ величину базисного минора матрицы из (12). Аналогично (5) его можно представить в виде произведения двух определителей.

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ a_{j\alpha} & a_{j\beta} & a_{j\gamma} \end{vmatrix} \equiv \begin{bmatrix} i & k & j \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Рассмотрим линейные преобразования параметров структуры

$$i^s = A_r^s i^r, \alpha^s = \tilde{A}_r^s \alpha^r \quad (A_r^s, \tilde{A}_r^s \in \mathbb{C}), \quad (15)$$

оставляющие инвариантным фундаментальное 3×3 -отношение $\begin{bmatrix} i & k & j \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}$. Как это непосредственно следует из легко проверяемых соотношений

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} i'^1 & k'^1 & j'^1 \\ i'^2 & k'^2 & j'^2 \\ i'^3 & k'^3 & j'^3 \end{vmatrix} &= \det A \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} \alpha'^1 & \beta'^1 & \gamma'^1 \\ \alpha'^2 & \beta'^2 & \gamma'^2 \\ \alpha'^3 & \beta'^3 & \gamma'^3 \end{vmatrix} &= \det \tilde{A} \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где $A \equiv \| A_r^s \|$ и $\tilde{A} \equiv \| \tilde{A}_r^s \|$, базисный минор (14) инвариантен только в том случае, если выполняются условия унимодулярности

$$\det A = 1; \det \tilde{A} = 1 \quad (17)$$

или, иными словами, если $A, \tilde{A} \in SL(3, \mathbb{C})$. Кроме того, как и в теории структуры ранга $(3, 3; 6)$, потребуем, чтобы элементы матриц A и $\tilde{A}$ были комплексно-сопряженными величинами

$$\tilde{A}_r^s = (A_r^s)^*. \quad (18)$$

Предположим теперь, что $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ - линейные пространства, т.е. для их элементов определены операции сложения и умножения на комплексные числа. Тогда i^s и α^s можно рассматривать как координаты векторов $\mathbf{i}$ и α относительно некоторых базисов в этих пространствах. Принимая во внимание (15)-(18),

приходим к выводу, что в $\mathcal{M}$ действует фундаментальное представление группы $SL(3, \mathbb{C})$, а в $\mathcal{N}$ - ему сопряженное. Как линейные пространства одинаковой размерности, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, очевидно, изоморфны пространству $\mathbb{C}^3$ упорядоченных троек комплексных чисел. Векторы из $\mathbb{C}^3$ будем называть *3-компонентными спинорами*. В частности, таковыми являются $i^s, \dots, \gamma^s$ (здесь и далее точками отмечаются индексы величин, преобразующихся по сопряженным представлениям группы $SL(3, \mathbb{C})$). Оп-ределители (16) выступают в роли "скалярных произведений" элементов

$$(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j}) = \epsilon_{srl} i^s k^r j^l; \quad (\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \epsilon_{\dot{s}\dot{r}\dot{l}} \alpha^{\dot{s}} \beta^{\dot{r}} \gamma^{\dot{l}}, \quad (19)$$

где ϵ_{srl} - символ Леви-Чивиты, выполняющий функции метрического тензора в пространстве 3-компонентных спиноров. Эти формулы являются прямыми аналогами формул (6) в теории 2-компонентных спиноров.

Обычным образом можно ввести спин-тензоры произвольного ранга. Это будут величины, преобразующиеся как произведения соответствующего числа 3-компонентных спиноров: $b'^s \dots \tilde{x}^{\dots} = A_1^s \dots A_{\dot{i}}^{\tilde{x}} \dots b^1 \dots \tilde{i}^{\dots}$. С помощью ϵ_{srl} контравариантным спинорам и спин-тензорам можно поставить в соответствие ковариантные, например $(i)_{sr} = \epsilon_{srl} i^l$; $(ik)_s = \epsilon_{srl} i^r k^l$. Отличие от случая 2-компонентных спиноров состоит, в частности, в том, что контравариантному спинору соответствует ковариантный спин-тензор второго ранга, и наоборот.

2. Структура ранга (4,4;6) и девятимерные векторы

Наибольший интерес для развиваемого здесь подхода представляют смешанные спин-тензоры второго ранга. По аналогии с (7) рассмотрим такой спин-тензор, построенный из параметров двух троек элементов структуры ранга (4,4;6):

$$b^{s\dot{r}} = i^s \alpha^{\dot{r}} + k^s \beta^{\dot{r}} + j^s \gamma^{\dot{r}} . \quad (20)$$

Легко убедиться в том, что фундаментальное 3×3 -отношение (14) с точностью до константы совпадает со спин-тензорным инвариантом

$$\frac{1}{6} \varepsilon_{slm} \varepsilon_{\dot{r}\dot{p}\dot{n}} b^{s\dot{r}} b^{l\dot{p}} b^{m\dot{n}} = \begin{bmatrix} i & k & j \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} \quad (21)$$

(сравните с формулой (8) введения).

Ограничимся частным случаем, когда элементы двух троек находятся "в парах":

$$(i^s)^* = \alpha^s, \quad (k^s)^* = \beta^s, \quad (j^s)^* = \gamma^s . \quad (22)$$

В этом случае матрица из компонент $b^{s\dot{r}}$ может быть представлена в виде линейной комбинации с вещественными коэффициентами p_0, p_a ($a = \overline{1,8}$)

$$\| b^{s\dot{r}} \| = I_3 p_0 + \lambda^a p_a , \quad (23)$$

где I_3 - единичная трехрядная матрица, λ^a - восемь матриц Гелл-Манна в стандартном представлении:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda^4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \lambda^6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \lambda^7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

а p_0 и p_a вполне аналогичны компонентам 4-вектора в формуле (10).

Разрешая соотношения (23) относительно $p_\mu = \{ p_0, p_a \}$, получаем:

$$\left. \begin{aligned}
 p_0 &= \frac{1}{3}(b^{1\dot{1}} + b^{2\dot{2}} + b^{3\dot{3}}), \quad p_1 = \frac{1}{2}(b^{1\dot{2}} + b^{2\dot{1}}), \\
 p_2 &= \frac{i}{2}(b^{1\dot{2}} - b^{2\dot{1}}), \quad p_3 = \frac{1}{2}(b^{1\dot{1}} - b^{2\dot{2}}), \\
 p_4 &= \frac{1}{2}(b^{1\dot{3}} + b^{3\dot{1}}), \quad p_5 = \frac{i}{2}(b^{1\dot{3}} - b^{3\dot{1}}), \\
 p_6 &= \frac{1}{2}(b^{2\dot{3}} + b^{3\dot{2}}), \quad p_7 = \frac{i}{2}(b^{2\dot{3}} - b^{3\dot{2}}), \\
 p_8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(b^{1\dot{1}} + b^{2\dot{2}} - 2b^{3\dot{3}}).
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Подставляя сюда выражения компонент спин-тензора (20) непосредственно через параметры элементов структуры ранга (4,4;6), на - ходим:

$$\left. \begin{aligned}
 p_0 &= \frac{1}{3} (i^1\alpha^{\dot{1}} + i^2\alpha^{\dot{2}} + i^3\alpha^{\dot{3}} + k^1\beta^{\dot{1}} + k^2\beta^{\dot{2}} + k^3\beta^{\dot{3}} + \\
 &\quad + j^1\gamma^{\dot{1}} + j^2\gamma^{\dot{2}} + j^3\gamma^{\dot{3}}); \\
 p_1 &= \frac{1}{2} (i^1\alpha^{\dot{2}} + i^2\alpha^{\dot{1}} + k^1\beta^{\dot{2}} + k^2\beta^{\dot{1}} + j^1\gamma^{\dot{2}} + j^2\gamma^{\dot{1}}); \\
 p_2 &= \frac{i}{2} (i^1\alpha^{\dot{2}} - i^2\alpha^{\dot{1}} + k^1\beta^{\dot{2}} - k^2\beta^{\dot{1}} + j^1\gamma^{\dot{2}} - j^2\gamma^{\dot{1}}); \\
 p_3 &= \frac{1}{2} (i^1\alpha^{\dot{1}} - i^2\alpha^{\dot{2}} + k^1\beta^{\dot{1}} - k^2\beta^{\dot{2}} + j^1\gamma^{\dot{1}} - j^2\gamma^{\dot{2}}); \\
 p_4 &= \frac{1}{2} (i^1\alpha^{\dot{3}} + i^3\alpha^{\dot{1}} + k^1\beta^{\dot{3}} + k^3\beta^{\dot{1}} + j^1\gamma^{\dot{3}} + j^3\gamma^{\dot{1}}); \\
 p_5 &= \frac{i}{2} (i^1\alpha^{\dot{3}} - i^3\alpha^{\dot{1}} + k^1\beta^{\dot{3}} - k^3\beta^{\dot{1}} + j^1\gamma^{\dot{3}} - j^3\gamma^{\dot{1}}); \\
 p_6 &= \frac{1}{2} (i^2\alpha^{\dot{3}} + i^3\alpha^{\dot{2}} + k^2\beta^{\dot{3}} + k^3\beta^{\dot{2}} + j^2\gamma^{\dot{3}} + j^3\gamma^{\dot{2}}); \\
 p_7 &= \frac{i}{2} (i^2\alpha^{\dot{3}} - i^3\alpha^{\dot{2}} + k^2\beta^{\dot{3}} - k^3\beta^{\dot{2}} + j^2\gamma^{\dot{3}} - j^3\gamma^{\dot{2}}); \\
 p_8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (i^1\alpha^{\dot{1}} + i^2\alpha^{\dot{2}} - 2i^3\alpha^{\dot{3}} + k^1\beta^{\dot{1}} + k^2\beta^{\dot{2}} - \\
 &\quad - 2k^3\beta^{\dot{3}} + j^1\gamma^{\dot{1}} + j^2\gamma^{\dot{2}} - 2j^3\gamma^{\dot{3}}).
 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Можно показать, что величины p_μ из (25)-(26) образуют некоторый 9-мерный вектор, который при преобразованиях 3-компонентных спиноров (15) преобразуется, в свою очередь, по закону:

$$p'_\mu = L_\mu^\nu p_\nu, \quad \mu, \nu = \overline{0,8}, \quad (27)$$

реализующему линейное представление группы $SL(3, \mathbb{C})$ в пространстве $\mathbb{R}^9$. Явный вид вещественных функций $L_\mu^\nu = L_\mu^\nu(A_x^s, A_x^{*s})$ приведен в приложении к данной статье.

Подставляя (23) в выражение для спин-тензорного инварианта (21), находим аналог 4-мерной метрики (11) в 9-мерном пространстве векторов p_μ

$$\begin{aligned} S^3(p) \equiv \frac{1}{6} \epsilon_{s1m} \epsilon_{\dot{r}\dot{p}\dot{n}} b^s \dot{r} b^1 \dot{p} b^m \dot{n} = & p_0(p_0^2 - \sum_{a=1}^8 p_a^2) + p_3(p_4^2 + \\ & + p_5^2 - p_6^2 - p_7^2) + \frac{1}{\sqrt{3}} p_8(2p_1^2 + 2p_2^2 + 2p_3^2 - p_4^2 - p_5^2 - p_6^2 - p_7^2 - \frac{2}{3} p_8^2) + \\ & + 2p_1 p_4 p_6 + 2p_1 p_5 p_7 + 2p_2 p_5 p_6 - 2p_2 p_4 p_7 \equiv G^{\alpha\beta\gamma} p_\alpha p_\beta p_\gamma, \quad (28) \end{aligned}$$

где величины $G^{\alpha\beta\gamma}$, в силу теоремы частного, образуют контравариантный тензор третьего ранга относительно преобразований (27), причем $G^{\alpha\beta\gamma} = L_\mu^\alpha L_\nu^\beta L_\lambda^\gamma G^{\mu\nu\lambda}$. Так как антисимметричная

часть этого тензора дает нулевой вклад в $S^3(p)$, то, не ограничивая общности, можно симметризовать $G^{\alpha\beta\gamma}$ по всем индексам. Тогда его компоненты, отличные от нуля, будут иметь следующий вид: $G^{000} = 1$, $G^{0aa} = -\frac{1}{3}$, $G^{abc} = d^{abc} \cdot \frac{2}{3}$

($a, b, c = \overline{1,8}$), где d^{abc} - известные в теории группы $SU(3)$ константы, входящие в антикоммутационные соотношения для матриц Гелл-Манна $[\lambda^a, \lambda^b]_+ = 2d^{abc} \lambda^c + \frac{4}{3} \delta^{ab}$.

В соответствии с эрлангенской программой Ф.Клейна естественно считать (28) метрикой пространства $\mathbb{R}^9$. Иными словами, в

$\mathbb{R}^9$ определена метрическая функция, имеющая вид алгебраической формы третьей степени: $S^3(p) = G^{\alpha\beta\gamma} p_\alpha p_\beta p_\gamma$. Известно [5], что пространства такого типа относятся к классу финслеровых. Таким образом, преобразования (27) можно интерпретировать как изометрии пространства $\langle \mathbb{R}^9, S^3 \rangle$, ибо в этом случае $S^3(p') = S^3(p)$.

Следует отметить, что в теории структуры ранга $(4, 4; 6)$ имеется отличное от нуля фундаментальное 2×2 -отношение

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^2 & k^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^2 & \beta^2 \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} i^1 & k^1 \\ i^3 & k^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha^1 & \beta^1 \\ \alpha^3 & \beta^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i^2 & k^2 \\ i^3 & k^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 \end{vmatrix}, \quad (29)$$

обобщающее (5) на случай 3-компонентных спиноров. Используя матрицы Гелл-Манна (24), можно убедиться в том, что

$$2 \begin{Bmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{Bmatrix} = (\alpha^T \lambda^\mu i) (\beta^T \lambda_\mu k), \quad (30)$$

где каждое из выражений, заключенных в круглые скобки, представляет собой компоненту 9-вектора

$$\alpha^T \lambda^\mu i = (\alpha^1 \alpha^2 \alpha^3) \lambda^\mu \begin{pmatrix} i^1 \\ i^2 \\ i^3 \end{pmatrix} \quad (31)$$

и аналогично для $\beta^T \lambda_\mu k$. Здесь в качестве матрицы λ^0 использовано выражение $\lambda^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} I_3$. Суммирование в (30)

производится, очевидно, по 9 значениям индекса μ , т.е. как бы в 9-мерном пространстве с сигнатурой $(+-----)$.

В теории структуры ранга $(4,4;6)$ матрицы Гелл-Манна λ^a играют такую же роль, что и матрицы Паули σ^i в теории структуры ранга $(3,3;6)$. В частности, для структуры ранга $(3,3;6)$ фундаментальное 2×2 -отношение (5) можно записать аналогичным образом:

$$2 \begin{bmatrix} i & k \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = (\alpha^T \sigma^\mu i)(\beta^T \sigma_\mu k), \quad (32)$$

где роль α^0 играет единичная матрица I_2 .

3. Аналогии пространственных поворотов и лоренцевых бустов в теории структуры ранга $(4,4;6)$

Рассмотрим группу $SU(3) \subset SL(3, \mathbb{C})$. Она играет важную роль в теории сильных взаимодействий и выделяется следующими условиями: $A^\dagger A = I_3$, $\det A = 1$. Легко показать, что в этом случае преобразования (15) оставляют инвариантным не только выражение (21), но и след спин-тензора (20). Согласно формулам (25), $\sum_{s=1}^3 b^{ss} = 3p_0$, так что при $A \in SU(3)$ преобразования (27) не затрагивают нулевую компоненту вектора p_μ : $p_0^i = p_0$, т.е. переводят подпространство $\mathbb{R}^8 \subset \mathbb{R}^9$ в себя ($L_{0a} = L_{a0} = 0$), что вполне аналогично ортогональным поворотам в 4-мерном псевдоевклидовом пространстве. Изложенное напоминает хорошо известный гомоморфизм $SU(2) \rightarrow SO(3)$.

Определенный интерес представляют однопараметрические подгруппы группы $SL(3, \mathbb{C})$. Как известно [6], любая такая подгруппа имеет вид: $t \rightarrow \exp(t, a)$, где a - элемент алгебры Ли соответствующей группы, а $t \in \mathbb{R}$.

Поскольку алгебра Ли группы $SU(3)$ состоит из всех бесследовых антиэрмитовых матриц третьего порядка, кривые $\varphi^a \rightarrow \exp(i\varphi^a \lambda^a)$ (по $a = \overline{1,8}$ нет суммирования), очевидно, проходят в $SU(3)$. Оказывается, суммы экспоненциальных рядов

$$A(\varphi^a) \equiv \exp(i\varphi^a \lambda^a) \quad (33)$$

можно выразить в явном виде через тригонометрические функции. Например, для $a = 1$ имеем:

$$A(\varphi^1) = \begin{bmatrix} \cos\varphi^1 & i\sin\varphi^1 & 0 \\ i\sin\varphi^1 & \cos\varphi^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Матрица (34) индуцирует вполне определенное преобразование (27) вектора p_μ , где

$$\begin{aligned} L_{00} &= L_{11} = L_{88} = 1, \\ L_{22} &= L_{33} = \cos 2\varphi^1, \\ L_{23} &= -L_{32} = \sin 2\varphi^1, \\ L_{44} &= L_{55} = L_{66} = L_{77} = \cos\varphi^1, \\ L_{47} &= L_{65} = -L_{56} = -L_{74} = \sin\varphi^1, \end{aligned}$$

а все остальные $L_{\mu\nu}$ обращаются в нуль (здесь $L_\mu^\nu \equiv L_{\mu\nu}$). Следует отметить, что здесь отчетливо выделяются двумерные повороты в плоскостях $(p_4 p_7)$ и $(p_5 p_6)$ на угол φ^1 , а также в плоскости $(p_2 p_3)$ на угол $2\varphi^1$.

Известно [7], что при гомоморфизме $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow L_4^{\hat{1}}$ эрмитовым унимодулярным матрицам отвечают лоренцевы бусты, поэтому представляется разумным рассматривать аналогичный случай для группы $SL(3, \mathbb{C})$. Пусть семейство $\{A\}$ состоит из комплексных матриц третьего порядка, удовлетворяющих условиям. $A^\dagger = A$, $\det A = 1$. Нетрудно убедиться в том, что однопараметрическая подгруппа $\psi \mapsto \exp(\psi \cdot X)$ будет проходить в семействе $\{A\}$, только если $\text{tr } X = 0$ и $X^\dagger = X$. Такими свойствами обладают матрицы Гелл-Манна (24), так что возникают следующие степенные ряды:

$$A(\psi^a) \equiv \exp(\psi^a \lambda^a). \quad (35)$$

Оказывается, матрицы (35) также допускают явное выражение, но уже не через тригонометрические, а через гиперболические функции. Например, при $a = 1$ получаем:

$$A(\psi^1) = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \psi^1 & \operatorname{sh} \psi^1 & 0 \\ \operatorname{sh} \psi^1 & \operatorname{ch} \psi^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Отличные от нуля элементы матрицы линейного преобразования пространства R^9 , соответствующего (36), имеют вид

$$L_{00} = \frac{1}{3} (2 \operatorname{ch} 2\psi^1 + 1),$$

$$L_{01} = \frac{2}{3} \operatorname{sh} 2\psi^1,$$

$$L_{08} = \frac{2}{3} L_{80} = \frac{2}{3\sqrt{3}} (\operatorname{ch} 2\psi^1 - 1),$$

$$L_{10} = \operatorname{sh} 2\psi^1,$$

$$L_{11} = \operatorname{ch} 2\psi^1,$$

$$L_{18} = L_{81} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sh} 2\psi^1,$$

$$L_{22} = L_{33} = 1,$$

$$L_{44} = L_{55} = L_{66} = L_{77} = \operatorname{ch} \psi^1,$$

$$L_{46} = L_{64} = L_{57} = L_{75} = \operatorname{sh} \psi^1,$$

$$L_{88} = \frac{1}{3} (\operatorname{ch} 2\psi^1 + 2).$$

Обратим внимание на характерные псевдповороты (бусты) в плоскостях $(p_4 p_6)$ и $(p_5 p_7)$.

Таким образом, важное топологическое отличие 3-компонентных спиноров от привычных 2-компонентных состоит в том, что поворот первого на некоторый (псевдо)угол индуцирует преобразование вектора с тем же самым значением $(\psi^a) \rightarrow \psi^a$, тогда как для обычных спиноров это значение удваивается.

4. Физическая интерпретация фундаментальных отношений структуры ранга $(4,4;6)$

Обсудим физический смысл введенных выше понятий в рамках развиваемой нами бинарной геометрофизики. Для этого напомним, что в основе современной теории сильных взаимодействий (хромодинамики) лежат представления о кварковой структуре адронов. Предполагается, что кварки обладают тремя цветовыми зарядами, т.е. образуют, как говорят, цветовой триплет q^s , $s = 1, 2, 3$. Согласно формуле (13) в теории структуры ранга $(4,4,6)$ элементы также характеризуются тремя числовыми параметрами. Кроме того, в ней естественным образом возникает группа $SU(3)$, широко известная как группа внутренней (цветовой) симметрии хромодинамики. Это дает основания интерпретировать элементы структуры ранга $(4,4;6)$ как кварки, а их параметры - как цветовые заряды. При этом элементы множества $\mathcal{M}$ будут описывать начальные состояния кварков, а элементы множества $\mathcal{N}$ - конечные состояния.

В хромодинамике барионы представляют собой "бесцветные" комбинации трех кварков q_1, q_2 и q_3

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{s r l} q_1^s q_2^r q_3^l, \quad (37)$$

где $\epsilon_{s r l}$ - полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты. Обращаясь к фундаментальному 3×3 -отношению (14), нетрудно видеть, что каждый из двух сомножителей (определителей) в
$$\begin{bmatrix} i & k & j \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}$$
 с точностью до константы совпадает с выражением

(37) для бариона

$$B(i,k,j) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} i^1 & k^1 & j^1 \\ i^2 & k^2 & j^2 \\ i^3 & k^3 & j^3 \end{vmatrix},$$

где произведена замена: $q_1^s \rightarrow i^s$, $q_2^s \rightarrow k^s$, $q_3^s \rightarrow j^s$.

Таким образом, можно утверждать, что фундаментальное 3×3 -отношение соответствует амплитуде перехода свободного бариона из начального состояния в конечное.

В хромодинамике предполагается, что кварки "склеены" внутри адронов переносчиками сильных взаимодействий - глюонами. Каждому из глюонов отвечает своя матрица Гелл-Манна, так что всего их восемь. Глюоны "сворачиваются" с токами кварков аналогично тому, как это записано в (30). Поэтому можно сказать, что фундаментальное 2×2 -отношение (29), без учета слагаемого $(\alpha^T \lambda^i)(\beta^T \lambda_0 k)$, характеризует взаимодействие двух кварков.

Напомним, что мезоны представляют собой "бесцветные" парные комбинации кварка q и антикварка $\bar{q}$.

$$M = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{q}_s q^s. \quad (38)$$

Легко видеть, что выражение (38) с точностью до множителя $\frac{1}{\sqrt{3}}$ совпадает с парным отношением (13) структуры ранга (4,4;6) или нулевой компонентой 9-вектора $\alpha^T \lambda^\mu i$. Тогда отобранное выше из 2×2 -отношения слагаемое можно трактовать как двухкварковую систему.

Следует отметить, что в развитом здесь фрагменте бинарной хромодинамики отсутствовали понятия зарядов частиц, а следовательно, пока еще нельзя было говорить о взаимодействиях в обычном их понимании. Описание взаимодействий адронов становится

возможным лишь в рамках структуры следующего ранга - $(5,5;a)$. Эта ситуация совершенно аналогична той, какая складывалась в [4] при изложении теории структуры ранга $(3,3;b)$. В рамках последней можно было описать свойства массивных лептонов и группу Лоренца, однако электрослабые взаимодействия оказалось возможным ввести только в рамках структуры ранга $(4,4;a)$. Кроме того, надо иметь в виду, что бинарные структуры, начиная с ранга $(3,3;b)$, описывают закономерности, соответствующие импульсному (точнее, зарядово-импульсному) пространству. Для перехода к обычному координатному пространству-времени необходимо еще произвести композицию (своеобразное произведение) этих структур с бинарной структурой ранга $(2,2)$ [8].

Л и т е р а т у р а

1. КУЛАКОВ Ю.И. Элементы теории физических структур.- Новосибирск, 1968.- 226 с.
2. Его же. О теории физических структур// Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций.- Л.: Наука, 1983.- Т.127, вып.15.- С.103-151. (Зап.научных семинаров ЛОМИ.)
3. МИХАЙЛИЧЕНКО Г.Г. Решения некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона: Автореф. дис... канд.физ.-мат наук: 01.01.01 и 01.04.02.- Новосибирск, 1973.- 13 с.
4. ВЛАДИМИРОВ Ю.С. Биспиноры и физическая структура ранга $(3,3)$ // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем.- Новосибирск.- 1988.- Вып.125. Вычислительные системы.-С.42-60.
5. АСАНОВ Г.С , ПОНОМАРЕНКО С.Ф. Финслерово расслоение над пространством-временем, ассоциируемые калибровочные поля и связности.- Кишинёв: Штиинца, 1989.
6. ПОНТЯГИН Л.С. Непрерывные группы.-М.:Наука, 1973.
7. РУМЕР Ю.Б., ФЕТ А.И. Теория групп и квантованные поля. - М.: Наука, 1977.
8. ВЛАДИМИРОВ Ю.С., КАРНАУХОВ А.В. Композиция бинарных структур и фейнмановский динамический принцип для фермионов // Гравитация и электромагнетизм.-Минск, 1989.-С.35.

Элементы матрицы 9-мерных линейных преобразований

$$p_{\mu}^{\dagger} = L_{\mu\nu} p_{\nu}$$

Для упрощения записи формул введем обозначения: $A_{\mathbf{r}}^{\mathbf{s}} \equiv A_{\mathbf{sr}}$. Тогда каждой $A \in \text{SL}(3, \mathbb{C})$ соответствуют следующие элементы матрицы $\|L_{\mu\nu}\| \equiv \|L_{\mu}^{\nu}\|$:

$$L_{00} = \frac{1}{3} (A_{11}A_{11}^{*} + A_{21}A_{21}^{*} + A_{31}A_{31}^{*} + A_{12}A_{12}^{*} + A_{22}A_{22}^{*} + \\ + A_{32}A_{32}^{*} + A_{13}A_{13}^{*} + A_{23}A_{23}^{*} + A_{33}A_{33}^{*});$$

$$L_{01} = \frac{1}{3} (A_{11}A_{12}^{*} + A_{21}A_{22}^{*} + A_{31}A_{32}^{*} + A_{12}A_{11}^{*} + A_{22}A_{21}^{*} + \\ + A_{32}A_{31}^{*});$$

$$L_{02} = \frac{i}{3} (A_{12}A_{11}^{*} + A_{22}A_{21}^{*} + A_{32}A_{31}^{*} - A_{11}A_{12}^{*} - A_{21}A_{22}^{*} - \\ - A_{31}A_{32}^{*});$$

$$L_{03} = \frac{1}{3} (A_{11}A_{11}^{*} + A_{21}A_{21}^{*} + A_{31}A_{31}^{*} - A_{12}A_{12}^{*} - A_{22}A_{22}^{*} - \\ - A_{32}A_{32}^{*});$$

$$L_{04} = \frac{1}{3} (A_{11}A_{13}^{*} + A_{21}A_{23}^{*} + A_{31}A_{33}^{*} + A_{13}A_{11}^{*} + A_{23}A_{21}^{*} + \\ + A_{33}A_{31}^{*});$$

$$L_{05} = \frac{i}{3} (A_{13}A_{11}^{*} + A_{23}A_{21}^{*} + A_{33}A_{31}^{*} - A_{11}A_{13}^{*} - A_{21}A_{23}^{*} - \\ - A_{31}A_{33}^{*});$$

$$L_{06} = \frac{1}{3} (A_{12}A_{13}^{*} + A_{22}A_{23}^{*} + A_{32}A_{33}^{*} + A_{13}A_{12}^{*} + A_{23}A_{22}^{*} + \\ + A_{33}A_{32}^{*});$$

$$L_{07} = \frac{i}{3} (A_{13}A_{12}^{*} + A_{23}A_{22}^{*} + A_{33}A_{32}^{*} - A_{12}A_{13}^{*} - A_{22}A_{23}^{*} - \\ - A_{32}A_{33}^{*});$$

$$L_{08} = \frac{1}{3\sqrt{3}} (A_{11}A_{11}^* + A_{21}A_{21}^* + A_{31}A_{31}^* + A_{12}A_{12}^* + A_{22}A_{22}^* + A_{32}A_{32}^* - 2A_{13}A_{13}^* - 2A_{23}A_{23}^* - 2A_{33}A_{33}^*);$$

$$L_{10} = \frac{1}{2} (A_{11}A_{21}^* + A_{21}A_{11}^* + A_{12}A_{22}^* + A_{22}A_{12}^* + A_{13}A_{23}^* + A_{23}A_{13}^*);$$

$$L_{11} = \frac{1}{2} (A_{11}A_{22}^* + A_{21}A_{12}^* + A_{12}A_{21}^* + A_{22}A_{11}^*);$$

$$L_{12} = \frac{i}{2} (A_{12}A_{21}^* + A_{22}A_{11}^* - A_{11}A_{22}^* - A_{21}A_{12}^*);$$

$$L_{13} = \frac{1}{2} (A_{11}A_{21}^* + A_{21}A_{11}^* - A_{12}A_{22}^* - A_{22}A_{12}^*);$$

$$L_{14} = \frac{1}{2} (A_{11}A_{23}^* + A_{21}A_{13}^* + A_{13}A_{21}^* + A_{23}A_{11}^*);$$

$$L_{15} = \frac{i}{2} (A_{13}A_{21}^* + A_{23}A_{11}^* - A_{11}A_{23}^* - A_{21}A_{13}^*);$$

$$L_{16} = \frac{1}{2} (A_{12}A_{23}^* + A_{22}A_{13}^* + A_{13}A_{22}^* + A_{23}A_{12}^*);$$

$$L_{17} = \frac{i}{2} (A_{13}A_{22}^* + A_{23}A_{12}^* - A_{12}A_{23}^* - A_{22}A_{13}^*);$$

$$L_{18} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (A_{11}A_{21}^* + A_{21}A_{11}^* + A_{12}A_{22}^* + A_{22}A_{12}^* - 2A_{13}A_{23}^* - 2A_{23}A_{13}^*);$$

$$L_{20} = \frac{i}{2} (A_{11}A_{21}^* - A_{21}A_{11}^* + A_{12}A_{22}^* - A_{22}A_{12}^* + A_{13}A_{23}^* - A_{23}A_{13}^*);$$

$$L_{21} = \frac{i}{2} (A_{11}A_{22}^* - A_{21}A_{12}^* + A_{12}A_{21}^* - A_{22}A_{11}^*);$$

$$L_{22} = -\frac{1}{2} (A_{21}A_{12}^* + A_{12}A_{21}^* - A_{11}A_{22}^* - A_{22}A_{11}^*);$$

$$L_{23} = \frac{i}{2} (A_{11}A_{21}^* - A_{21}A_{11}^* - A_{12}A_{22}^* + A_{22}A_{12}^*);$$

$$L_{24} = \frac{i}{2} (A_{11}A_{23}^* - A_{21}A_{13}^* + A_{13}A_{21}^* - A_{23}A_{11}^*);$$

$$L_{25} = -\frac{1}{2} (A_{21}A_{13}^* + A_{13}A_{21}^* - A_{11}A_{23}^* - A_{23}A_{11}^*);$$

$$L_{26} = \frac{i}{2} (A_{12}A_{23}^* - A_{22}A_{13}^* + A_{13}A_{22}^* - A_{23}A_{12}^*);$$

$$L_{27} = -\frac{i}{2} (A_{22}A_{13}^* + A_{13}A_{22}^* - A_{12}A_{23}^* - A_{23}A_{12}^*);$$

$$L_{28} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (A_{11}A_{21}^* - A_{21}A_{11}^* + A_{12}A_{22}^* - A_{22}A_{12}^* - 2A_{13}A_{23}^* + 2A_{23}A_{13}^*);$$

$$L_{30} = \frac{1}{2} (A_{11}A_{11}^* - A_{21}A_{21}^* + A_{12}A_{12}^* - A_{22}A_{22}^* + A_{13}A_{13}^* - A_{23}A_{23}^*);$$

$$L_{31} = \frac{1}{2} (A_{11}A_{12}^* - A_{21}A_{22}^* + A_{12}A_{11}^* - A_{22}A_{21}^*);$$

$$L_{32} = \frac{i}{2} (A_{21}A_{22}^* + A_{12}A_{11}^* - A_{11}A_{12}^* - A_{22}A_{21}^*);$$

$$L_{33} = \frac{1}{2} (A_{11}A_{11}^* - A_{21}A_{21}^* - A_{12}A_{12}^* + A_{22}A_{22}^*);$$

$$L_{34} = \frac{1}{2} (A_{11}A_{13}^* - A_{21}A_{23}^* + A_{13}A_{11}^* - A_{23}A_{21}^*);$$

$$L_{35} = \frac{i}{2} (-A_{11}A_{13}^* + A_{21}A_{23}^* + A_{13}A_{11}^* - A_{23}A_{21}^*);$$

$$L_{36} = \frac{1}{2} (A_{12}A_{13}^* - A_{22}A_{23}^* + A_{13}A_{12}^* - A_{23}A_{22}^*);$$

$$L_{37} = \frac{i}{2} (-A_{12}A_{13}^* + A_{22}A_{23}^* + A_{13}A_{12}^* - A_{23}A_{22}^*);$$

$$L_{38} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (A_{11}A_{11}^* - A_{21}A_{21}^* + A_{12}A_{12}^* - A_{22}A_{22}^* - 2A_{13}A_{13}^* + 2A_{23}A_{23}^*);$$

$$L_{40} = \frac{1}{2} (A_{11}A_{31}^* + A_{31}A_{11}^* + A_{12}A_{32}^* + A_{32}A_{12}^* + A_{13}A_{33}^* + A_{33}A_{13}^*);$$

$$L_{41} = \frac{1}{2} (A_{11}A_{32}^* + A_{31}A_{12}^* + A_{12}A_{31}^* + A_{32}A_{11}^*);$$

$$L_{42} = \frac{i}{2} (-A_{11}A_{32}^* - A_{31}A_{12}^* + A_{12}A_{31}^* + A_{32}A_{11}^*);$$

$$L_{43} = \frac{1}{2} (A_{11}A_{31}^* + A_{31}A_{11}^* - A_{12}A_{32}^* - A_{32}A_{12}^*);$$

$$\begin{aligned}
L_{44} &= \frac{1}{2} (A_{11}A_{33}^* + A_{31}A_{13}^* + A_{13}A_{31}^* + A_{33}A_{11}^*); \\
L_{45} &= \frac{i}{2} (-A_{11}A_{33}^* - A_{31}A_{13}^* + A_{13}A_{31}^* + A_{33}A_{11}^*); \\
L_{46} &= \frac{1}{2} (A_{12}A_{33}^* + A_{32}A_{13}^* + A_{13}A_{32}^* + A_{33}A_{12}^*); \\
L_{47} &= \frac{i}{2} (-A_{12}A_{33}^* - A_{32}A_{13}^* + A_{13}A_{32}^* + A_{33}A_{12}^*); \\
L_{48} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (A_{11}A_{31}^* + A_{31}A_{11}^* + A_{12}A_{32}^* + A_{32}A_{12}^* - 2A_{13}A_{33}^* - \\
&\quad - 2A_{33}A_{13}^*); \\
L_{50} &= \frac{i}{2} (A_{11}A_{31}^* - A_{31}A_{11}^* + A_{12}A_{32}^* - A_{32}A_{12}^* + A_{13}A_{33}^* - \\
&\quad - A_{33}A_{13}^*); \\
L_{51} &= \frac{1}{2} (A_{11}A_{32}^* - A_{31}A_{12}^* + A_{12}A_{31}^* - A_{32}A_{11}^*); \\
L_{52} &= -\frac{1}{2} (-A_{11}A_{32}^* + A_{31}A_{12}^* + A_{12}A_{31}^* - A_{32}A_{11}^*); \\
L_{53} &= \frac{i}{2} (A_{11}A_{31}^* - A_{31}A_{11}^* - A_{12}A_{32}^* + A_{32}A_{12}^*); \\
L_{54} &= \frac{i}{2} (A_{11}A_{33}^* - A_{31}A_{13}^* + A_{13}A_{31}^* - A_{33}A_{11}^*); \\
L_{55} &= -\frac{1}{2} (-A_{11}A_{33}^* + A_{31}A_{13}^* + A_{13}A_{31}^* - A_{33}A_{11}^*); \\
L_{56} &= \frac{i}{2} (A_{12}A_{33}^* - A_{32}A_{13}^* + A_{13}A_{32}^* - A_{33}A_{12}^*); \\
L_{57} &= -\frac{1}{2} (A_{32}A_{13}^* + A_{13}A_{32}^* - A_{12}A_{33}^* - A_{33}A_{12}^*); \\
L_{58} &= \frac{i}{2\sqrt{3}} (A_{11}A_{31}^* - A_{31}A_{11}^* + A_{12}A_{32}^* - A_{32}A_{12}^* - 2A_{13}A_{33}^* + \\
&\quad + 2A_{33}A_{13}^*); \\
L_{60} &= \frac{1}{2} (A_{21}A_{31}^* + A_{31}A_{21}^* + A_{22}A_{32}^* + A_{32}A_{22}^* + A_{23}A_{33}^* + \\
&\quad + A_{33}A_{23}^*); \\
L_{61} &= \frac{1}{2} (A_{21}A_{32}^* + A_{31}A_{22}^* + A_{22}A_{31}^* + A_{32}A_{21}^*);
\end{aligned}$$

$$L_{62} = \frac{i}{2} (-A_{21}A_{32}^* - A_{31}A_{22}^* + A_{22}A_{31}^* + A_{32}A_{21}^*);$$

$$L_{63} = \frac{1}{2} (A_{21}A_{31}^* + A_{31}A_{21}^* - A_{22}A_{32}^* - A_{32}A_{22}^*);$$

$$L_{64} = \frac{1}{2} (A_{21}A_{33}^* + A_{31}A_{23}^* + A_{23}A_{31}^* + A_{33}A_{21}^*);$$

$$L_{65} = \frac{i}{2} (-A_{21}A_{33}^* - A_{31}A_{23}^* + A_{23}A_{31}^* + A_{33}A_{21}^*);$$

$$L_{66} = \frac{1}{2} (A_{22}A_{33}^* + A_{32}A_{23}^* + A_{23}A_{32}^* + A_{33}A_{22}^*);$$

$$L_{67} = \frac{i}{2} (-A_{22}A_{33}^* - A_{32}A_{23}^* + A_{23}A_{32}^* + A_{33}A_{22}^*);$$

$$L_{68} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (A_{21}A_{31}^* + A_{31}A_{21}^* + A_{22}A_{32}^* + A_{32}A_{22}^* - 2A_{33}A_{23}^* - 2A_{23}A_{33}^*);$$

$$L_{70} = \frac{i}{2} (A_{21}A_{31}^* - A_{31}A_{21}^* + A_{22}A_{32}^* - A_{32}A_{22}^* + A_{23}A_{33}^* - A_{33}A_{23}^*);$$

$$L_{71} = \frac{i}{2} (A_{21}A_{32}^* - A_{31}A_{22}^* + A_{22}A_{31}^* - A_{32}A_{21}^*);$$

$$L_{72} = -\frac{1}{2} (-A_{21}A_{32}^* + A_{31}A_{22}^* + A_{22}A_{31}^* - A_{32}A_{21}^*);$$

$$L_{73} = \frac{i}{2} (A_{21}A_{31}^* - A_{31}A_{21}^* - A_{22}A_{32}^* + A_{32}A_{22}^*);$$

$$L_{74} = \frac{i}{2} (A_{21}A_{33}^* - A_{31}A_{23}^* + A_{23}A_{31}^* - A_{33}A_{21}^*);$$

$$L_{75} = -\frac{1}{2} (-A_{21}A_{33}^* + A_{31}A_{23}^* + A_{23}A_{31}^* - A_{33}A_{21}^*);$$

$$L_{76} = \frac{i}{2} (A_{22}A_{33}^* - A_{32}A_{23}^* + A_{23}A_{32}^* - A_{33}A_{22}^*);$$

$$L_{77} = -\frac{1}{2} (-A_{22}A_{33}^* + A_{32}A_{23}^* + A_{23}A_{32}^* - A_{33}A_{22}^*);$$

$$L_{78} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (A_{21}A_{31}^* - A_{31}A_{21}^* + A_{22}A_{32}^* - A_{32}A_{22}^* - 2A_{23}A_{33}^* + 2A_{33}A_{23}^*);$$

$$\begin{aligned}
L_{80} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (A_{11}A_{11}^* + A_{21}A_{21}^* - 2A_{31}A_{31}^* + A_{12}A_{12}^* + A_{22}A_{22}^* - \\
&\quad - 2A_{32}A_{32}^* + A_{13}A_{13}^* + A_{23}A_{23}^* - 2A_{33}A_{33}^*); \\
L_{81} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (A_{11}A_{12}^* + A_{21}A_{22}^* - 2A_{31}A_{32}^* + A_{12}A_{11}^* + A_{22}A_{21}^* - \\
&\quad - 2A_{32}A_{31}^*); \\
L_{82} &= \frac{i}{2\sqrt{3}} (-A_{11}A_{12}^* - A_{21}A_{22}^* + 2A_{31}A_{32}^* + A_{12}A_{11}^* + A_{22}A_{21}^* - \\
&\quad - 2A_{32}A_{31}^*); \\
L_{83} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (A_{11}A_{11}^* + A_{21}A_{21}^* - 2A_{31}A_{31}^* - A_{12}A_{12}^* - A_{22}A_{22}^* + \\
&\quad + 2A_{32}A_{32}^*); \\
L_{84} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (A_{11}A_{13}^* + A_{21}A_{23}^* - 2A_{31}A_{33}^* + A_{13}A_{11}^* + A_{23}A_{21}^* - \\
&\quad - 2A_{33}A_{31}^*); \\
L_{85} &= \frac{i}{2\sqrt{3}} (-A_{11}A_{13}^* - A_{21}A_{23}^* + 2A_{31}A_{33}^* + A_{13}A_{11}^* + A_{23}A_{21}^* - \\
&\quad - 2A_{33}A_{31}^*); \\
L_{86} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (A_{12}A_{13}^* + A_{22}A_{23}^* - 2A_{32}A_{33}^* + A_{13}A_{12}^* + A_{23}A_{22}^* - \\
&\quad - 2A_{33}A_{32}^*); \\
L_{87} &= \frac{i}{2\sqrt{3}} (-A_{12}A_{13}^* - A_{22}A_{23}^* + 2A_{32}A_{33}^* + A_{13}A_{12}^* + A_{23}A_{22}^* - \\
&\quad - 2A_{33}A_{32}^*); \\
L_{88} &= \frac{1}{6} (A_{11}A_{11}^* + A_{21}A_{21}^* - 2A_{31}A_{31}^* + A_{12}A_{12}^* + A_{22}A_{22}^* - \\
&\quad - 2A_{32}A_{32}^* - 2A_{13}A_{13}^* - 2A_{23}A_{23}^* + 4A_{33}A_{33}^*).
\end{aligned}$$

Поступила в ред.-изд.отд.

19 июня 1990 года