

Здесь s_i и σ_α – “скрытые параметры”.

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{1,i\alpha} = x_i \xi_\alpha + s_i + \sigma_\alpha$ в верификатор (18) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ -1 & a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ -1 & a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & s_i & x_i & 0 \\ -1 & s_k & x_k & 0 \\ -1 & s_m & x_m & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\sigma_\alpha & -\sigma_\beta & -\sigma_\gamma \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \xi_\alpha & \xi_\beta & \xi_\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

4.2 (2) – второе **мультипликативное** решение имеет вид:

$$A_2 \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (19)$$

$$a_{2,i\alpha} = a_2(x_i, y_i; \xi_\alpha, \eta_\alpha) = x_i \xi_\alpha + y_i \eta_\alpha$$

В том, что результат подстановки репрезентатора $a_{2,i\alpha} = x_i \xi_\alpha + y_i \eta_\alpha$ в верификатор (19) тождественно равен нулю, можно убедиться непосредственно, рассмотрев очевидное тождество:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 0 \\ x_k & y_k & 0 \\ x_m & y_m & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_\alpha & \xi_\beta & \xi_\gamma \\ \eta_\alpha & \eta_\beta & \eta_\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

§ 8. Решение матричных уравнений вида

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

В.М. Малышев

20 февраля 1997 года

Рассмотрим функциональное уравнение

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y),$$

где $\varphi(x)$ - матрица размерности $n \times n$, $x \in \mathbf{C}$, $\varphi_{ik}(x) \in \mathbf{C}$.

Будем искать решение в классе аналитических функций, т.е. предполагать, что каждый элемент матрицы $\varphi_{ik}(x)$ - аналитическая функция на $\mathbf{C}$.

Тогда мы можем разложить $\varphi(x)$ в ряд:

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k,$$

где A_k - постоянные матрицы.

Используя это разложение, получим:

$$\varphi(x)\varphi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_k A_m x^k y^m.$$

С другой стороны,

$$\varphi(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x+y)^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sum_{m=0}^k C_k^m x^m y^{k-m}, \text{ где } C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}.$$

Приравнивая коэффициенты, находим:

$$A_m A_n = C_{n+m}^m A_{n+m}.$$

Таким образом, получаем условия:

1. $A_0^2 = A_0$
2. $A_0 A_1 = A_1 A_0 = C_1^0 A_1 = A_1$
3. $A_1 A_1 = C_2^1 A_2 = 2A_2$
4. $A_1 A_2 = A_2 A_1 = C_3^1 A_3 = 3A_3$
5. $A_0 A_3 = A_3 A_0 = C_3^0 A_3 = A_3$
-

Рассмотрим теперь различные решения.

1. $A_0 = 0 \Rightarrow A_k = 0$ - тривиальное решение.
2. $A_0 = 1 \Rightarrow A_1$ - произвольная матрица;

$$A_2 = \frac{A_0^2}{C_2^1} = \frac{A_1^2}{2!};$$

$$A_3 = \frac{A_1 A_2}{C_3^1} = \frac{A_1 A_1^2}{C_3^1 C_2^1} = \frac{A_1^3}{3!};$$

$$A_4 = \frac{A_1 A_3}{C_4^1} = \frac{A_1 A_1^3}{C_4^1 3!} = \frac{A_1^4}{4!};$$

....

$$A_k = \frac{A_1^k}{k!}.$$

Таким образом, в этом случае получаем решение

$$\varphi(x) = 1 + A_1 + \frac{A_1^2}{2!}x^2 + \dots = e^{A_1x} = Bx,$$

где $B = e^{A_1}$, A_1 - произвольная матрица.

Матрица B будет невырожденной, т. к. собственные числа η_i матрицы B связаны с собственными числами ξ_i матрицы A соотношением $\eta_i = e^{\xi_i}$, т. е. $\eta_i \neq 0$. С другой стороны, уравнение $e^A = B$ имеет решение, если B - произвольная невырожденная матрица.

Итак, в этом случае общее решение записывается в виде

$$\varphi(x) = B^x,$$

где B - произвольная невырожденная матрица.

3. Пусть теперь A_0 -вырожденная матрица.

A_0 удовлетворяет уравнению $A_0^2 = A_0$, то есть является идемпотентной.

Как известно (см. [1]), общее решение для такой матрицы записывается в виде

$$A_0 = T\bar{A}_0T^{-1},$$

где T - произвольная невырожденная матрица размерности $n \times n$,

$$\bar{A}_0 = \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

1_m - единичная матрица размерности $m \times m$, $m < n$.

Перейдём теперь от матриц A_k к матрицам $\bar{A}_k = T^{-1}A_kT$.

Для них имеем те же уравнения, что и для A_k :

$$1. \bar{A}_0^2 = \bar{A}_0,$$

$$2. \bar{A}_0\bar{A}_1 = \bar{A}_1\bar{A}_0 = \bar{A}_1,$$

$$3. \bar{A}_0\bar{A}_2 = \bar{A}_2\bar{A}_0 = \bar{A}_2$$

.....

Но поскольку $\bar{A}_0$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то матрицы $\bar{A}_k$ должны иметь вид

$$\bar{A}_k = \begin{pmatrix} \tilde{A}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{A}_k$ - матрица размерности $m \times m$.

Таким образом, для матриц $\bar{A}_k$ задача сводится к случаю меньшей размерности m , и решение задачи в случае вырожденной матрицы A_0 будет выглядеть в общем случае как

$$\varphi(x) = T \begin{pmatrix} B^x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1},$$

где T – произвольная невырожденная матрица размерности $n \times n$,
 B – произвольная невырожденная матрица размерности $m \times m$, $m < n$.

Рассмотрим теперь случаи разных n .

I. $n = 1$.

Решением будет $\varphi(x) = b^x, b \neq 0$.

II. $n = 2$.

$a \neq 0$ $\varphi(x) = B^x = e^{Ax}$, где A – произвольная 2×2 матрица.

Запишем A с помощью σ – матриц Паули в виде

$$A = a_0 + \vec{a}\vec{\sigma} = a_0 + a\vec{n}\vec{\sigma},$$

$$\text{где } \vec{n} = \frac{\vec{a}}{a}, \quad a = \sqrt{\vec{a}^2}, \quad a \neq 0.$$

Тогда

$$e^{Ax} = e^{(a_0 + \vec{a}\vec{\sigma})x} = e^{a_0x} e^{ax\vec{n}\vec{\sigma}} = e^{a_0x} (\cosh ax + \vec{n}\vec{\sigma} \sinh ax).$$

Если же $a=0$, то имеем решение

$$e^{Ax} = e^{a_0x} (1 + \vec{a}\vec{\sigma}x),$$

которое получается из предыдущего при $a \rightarrow 0$.

Итак, имеем два решения:

$$\varphi_1(x) = e^{a_0x} (\cosh ax + \vec{n}\vec{\sigma} \sinh ax) = e^{a_0x} \begin{pmatrix} \cosh ax + \vec{n}_3 \sinh ax & (n_1 - in_2) \sinh ax \\ (n_1 + in_2) \sinh ax & \cosh ax - \vec{n}_3 \sinh ax \end{pmatrix},$$

где a_0 – произвольное комплексное число;

a – произвольное $\neq 0$ комплексное число;

$\vec{n}$ – произвольный комплексный вектор, такой, что $\vec{n}^2 = 1$;

$$\varphi_2(x) = e^{a_0x} \begin{pmatrix} 1 + \vec{a}_3x & (a_1 - ia_2)x \\ (a_1 + ia_2)x & 1 - \vec{a}_3x \end{pmatrix},$$

где a_0 – произвольное комплексное число;

$\vec{a}$ – произвольный комплексный вектор, такой, что $\vec{a}^2 = 0$.

Если ограничиться решениями в поле вещественных чисел, то общий вид решения будет

$$\varphi(x) = e^{Ax},$$

где A – произвольная вещественная матрица,

$$A = a_0 + \vec{a}\vec{\sigma}, \quad a_0 \in R, \quad \vec{a} = (a_1, ia_2, a_3), \quad a_k \in R.$$

Получаем следующие решения:

$$\varphi_1(x) = e^{a_0 x} \begin{pmatrix} ch ax + \frac{a_3}{a} sh ax & \frac{a_1 + a_2}{a} sh ax \\ \frac{a_1 - a_2}{a} sh ax & ch ax - \frac{a_3}{a} sh ax \end{pmatrix}; \quad a = \sqrt{a_1^2 + a_3^2 - a_2^2} > 0,$$

$$\varphi_2(x) = e^{a_0 x} \begin{pmatrix} \cos ax + \frac{a_3}{a} \sin ax & \frac{a_1 + a_2}{a} \sin ax \\ \frac{a_1 - a_2}{a} \sin ax & \cos ax - \frac{a_3}{a} \sin ax \end{pmatrix}; \quad a = \sqrt{a_2^2 - a_1^2 - a_3^2} > 0,$$

$$\varphi_3(x) = e^{a_0 x} \begin{pmatrix} 1 + a_3 x & (a_1 + a_2)x \\ (a_1 - a_2)x & 1 - a_3 x \end{pmatrix}; \quad a_1^2 + a_3^2 = a_2^2.$$

Выбрав $a_0 = 0$, $\vec{a} = (a_1, 0, 0)$, получим решение

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} ch ax & \frac{a_1}{a} sh ax \\ \frac{a_1}{a} sh ax & ch ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch a_1 x & sh a_1 x \\ sh a_1 x & ch a_1 x \end{pmatrix},$$

то есть в этом случае $B = e^A = e^{\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} ch a_1 & sh a_1 \\ sh a_1 & ch a_1 \end{pmatrix}.$

Выбрав $a_0 = 0$, $\vec{a} = (0, ia_2, 0)$, получим решение

$$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} \cos ax & \frac{a_2}{a} \sin ax \\ -\frac{a_2}{a} \sin ax & \cos ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a_2 x & \sin a_2 x \\ -\sin a_2 x & \cos a_2 x \end{pmatrix},$$

то есть в этом случае $B = e^A = e^{\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ -a_2 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos a_2 & \sinh a_2 \\ -\sin a_2 & \cosh a_2 \end{pmatrix}.$

Выбрав $a_0 = 0$, $\vec{a} = (1, i\sqrt{2}, 1)$, получим решение

$$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 1 + x & (1 + \sqrt{2})x \\ (1 - \sqrt{2})x & 1 - x \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим "вырожденное" решение:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= T \begin{pmatrix} b^x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \\ &= \frac{b^x}{\Delta} \begin{pmatrix} \alpha\delta & -\alpha\beta \\ \gamma\delta & -\gamma\beta \end{pmatrix},\end{aligned}$$

где $\Delta = \det(T) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$.

Таким образом, в этом случае $\varphi(x) = b^x A$, где A - произвольная идемпотентная вырожденная матрица размерности 2×2 .

Решим теперь эту задачу при $n = 2$ по-другому, чтобы можно было обобщить на случай $n > 2$.

Рассмотрим только случай типа а), то есть $\varphi(x) = B^x$, $\det(B) \neq 0$, так как случай б) $\det(B) \equiv 0$ не интересен.

Итак,

$$\varphi(x) = B^x = e^{Cx} = e^{a_0 x + Ax} = e^{a_0 x} e^{Ax},$$

где A - произвольная бесследная матрица.

Приведём её к жордановой форме:

$$A = T \bar{A} T^{-1},$$

где $\bar{A}$ имеет вид $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, или $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим сначала случай $\bar{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$.

Имеем

$$\begin{aligned}e^{Ax} &= e^{T \bar{A} T^{-1} x} = T e^{\bar{A} x} T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{ax} & 0 \\ 0 & e^{-ax} \end{pmatrix} T^{-1} = \\ &= T \left(e^{ax} \frac{1 + \sigma_3}{2} + e^{-ax} \frac{1 - \sigma_3}{2} \right) T^{-1} = ch ax + sh ax T \sigma_3 T^{-1} = ch ax + \vec{n} \vec{\sigma} sh ax;\end{aligned}$$

где $\vec{n}^2 = 1$.

Действительно, поскольку след матрицы σ_3 равен 0, то $T \sigma_3 T^{-1} = \vec{b} \vec{\sigma}$, где $\vec{b}$ - некоторый вектор.

Кроме того, поскольку $\det(\sigma_3) = -1$, то и

$$\det(\vec{b} \vec{\sigma}) = -\vec{b}^2 = -1 \Rightarrow \vec{b}^2 = 1.$$

Таким образом, мы получили решение $\varphi_1(x) = ch ax + \vec{n} \vec{\sigma} sh ax$.

В случае, когда $\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, будем иметь

$$\bar{A}x = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\bar{A}x)^2 = 0, \quad \dots, \quad (\bar{A}x)^k = 0,$$

то есть

$$e^{\bar{A}x} = 1 + \bar{A}x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$Te^{\bar{A}x}T^{-1} = T(1 + \bar{A}x)T^{-1} = 1 + xT\bar{A}T^{-1} = 1 + xT \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = 1 + \vec{a}\vec{\sigma}x,$$

где $\vec{a}^2 = 0$.

Действительно,

$$\det(T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}) = 0 = -\vec{a}^2.$$

С другой стороны, для произвольного $\vec{a}$, такого, что $\vec{a}^2 = 0$, матрица $\vec{a}\vec{\sigma}$ должна сводиться к виду

$$T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

с некоторой матрицей T , $\det(T) \neq 0$.

Таким образом, мы получили решение

$$\varphi_3(x) = e^{a_0x} \begin{pmatrix} 1 + a_3x & (a_1 + a_2)x \\ (a_1 - a_2)x & 1 - a_3x \end{pmatrix};$$

$$a_1^2 + a_3^2 = a_2^2.$$

III $n = 3$.

Снова рассмотрим только случай, когда $\varphi(x) = B^x$, где B - произвольная невырожденная матрица размерности 3×3 .

Аналогично случаю $n = 2$ запишем B^x в виде $B^x = e^{Cx} = e^{a_0x}e^{Ax}$, где A - произвольная бесследная матрица. Приведя её к жордановой форме, получим:

$$e^{Ax} = e^{T\bar{A}T^{-1}} = Te^{\bar{A}x}T^{-1}.$$

Снова имеем несколько случаев для матрицы $\bar{A}$.

$$1.) \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} T^{-1}, \quad \sum a_i = 0.$$

В этом случае $e^{\bar{A}x} = \begin{pmatrix} e^{a_1x} & & \\ & e^{a_2x} & \\ & & e^{a_3x} \end{pmatrix}$, а для элементов матрицы e^{Ax}

получаем:

$$(e^{Ax})_{ik} = \left(T e^{\bar{A}x} T^{-1} \right)_{ik} = \sum_m t_{im} T_{mk} e^{a_m x},$$

где t_{ik} – элементы матрицы T ,
 T_{ik} – элементы матрицы T^{-1} .

Ясно, что при подходящем выборе T в качестве элемента может получиться любая функция вида $\alpha_1 e^{a_1 x} + \alpha_2 e^{a_2 x} + \alpha_3 e^{a_3 x}$, где $\sum_k \alpha_k = \{0 \text{ или } 1\}$.

$$2.) \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad 2a_1 + a_2 = 0.$$

$$\text{В этом случае } \bar{A}^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & 2a_1 & 0 \\ 0 & a_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2 \end{pmatrix}; \quad \bar{A}^3 = \begin{pmatrix} a_1^3 & 3a_1^2 & 0 \\ 0 & a_1^3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^3 \end{pmatrix}; \quad \dots;$$

$$\bar{A}^m = \begin{pmatrix} a_1^m & m a_1^{m-1} & 0 \\ 0 & a_1^m & 0 \\ 0 & 0 & a_2^m \end{pmatrix}.$$

$$\text{Значит, } e^{\bar{A}x} = \begin{pmatrix} e^{a_1 x} & x e^{a_1 x} & 0 \\ 0 & e^{a_1 x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_2 x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ax} & x e^{ax} & 0 \\ 0 & e^{ax} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2ax} \end{pmatrix}$$

(заменяли $a_1 \rightarrow a$).

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } A &= T \bar{A} T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ax} & x e^{ax} & 0 \\ 0 & e^{ax} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2ax} \end{pmatrix} T^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} t_{11} e^{ax} & (x t_{11} + t_{12}) e^{ax} & t_{13} e^{-2ax} \\ t_{21} e^{ax} & (x t_{21} + t_{22}) e^{ax} & t_{23} e^{-2ax} \\ t_{31} e^{ax} & (x t_{31} + t_{32}) e^{ax} & t_{33} e^{-2ax} \end{pmatrix} T^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} t_{11}(T_{11} + x T_{21}) e^{ax} + t_{12} T_{21} e^{ax} + t_{13} T_{31} e^{-2ax} & \dots \\ t_{21}(T_{11} + x T_{21}) e^{ax} + t_{22} T_{21} e^{ax} + t_{23} T_{31} e^{-2ax} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то есть в качестве элементов матрицы A получаются функции вида

$$(\alpha_1 + \alpha_2 x) e^{ax} + \alpha_3 e^{-2ax},$$

где $\alpha_1 + \alpha_3 = \{0 \text{ или } 1\}$.

$$3.) \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $\bar{A}^2 = 0, \dots, \bar{A}^m = 0$.
Тогда

$$e^{\bar{A}x} = 1 + \bar{A}x = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$Te^{\bar{A}x}T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11} & xt_{11} + t_{12} & xt_{12} + t_{13} \\ t_{21} & xt_{21} + t_{22} & xt_{22} + t_{23} \\ t_{31} & xt_{31} + t_{32} & xt_{32} + t_{33} \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + x(t_{11}T_{21} + t_{12}T_{31}) & x(t_{11}T_{22} + t_{12}T_{32}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

то есть в этом случае в качестве элементов получим функции вида $ax, \quad 1 + ax$.

Итак, теперь понятно, что и в случае $n > 3$ мы будем получать лишь суммы экспонент, может быть, домноженных ещё на x , и никаких новых "элементарных" функций не возникнет.



Прообраз Мироздания