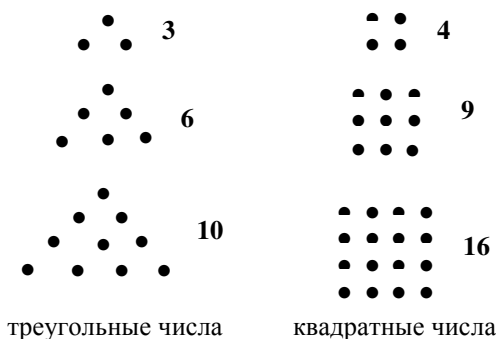


На исходе тысячелетия принято подводить итоги. После мощного прорыва практически во всех направлениях математики в первой трети двадцатого века наступило долгое затишье. Создавалось впечатление, что математика достигла какого-то непонятного рубежа, преодолеть который почему-то никак не удастся. И вот в самом конце века под занавес тысячелетия была решена, возможно, наиболее известная из математических задач – теорема Ферма, уходящая корнями к самым истокам математики. История ее постановки и доказательства полна драматическими событиями, в которых приняли активное участие многие величайшие математики разных времен и народов. Этот небольшой популярный очерк имеет целью познакомить читателей, не относящихся к категории профессиональных математиков, с важнейшими этапами решения этой удивительной проблемы.

От Пифагора до Диофанта. Предыстория

Применение тех или иных математических методов уходит в глубокую древность. Однако настоящая математика появилась лишь тогда, когда на математический аппарат стали смотреть не как на средство решения конкретных прикладных задач, а как на непосредственный предмет исследования. Особая роль здесь принадлежит знаменитому древнегреческому мыслителю **Пифагору**, жившему в шестом веке до нашей эры. Пифагор учил о том, что в окружающем мире царит гармония. И выражена эта гармония посредством чисел – удивительном творении разума, являющемся отражением количественных закономерностей этого мира. А раз числа оказываются основой всего, то их необходимо изучать сами по себе. Тем самым, начиная с Пифагора, числа становятся предметом глубокого анализа.

Первым результатом, возникающим при исследовании любого класса объектов, является установление того факта, что объекты эти бывают разными, т.е. существуют некоторые свойства, по отношению к которым они могут существенно различаться. Несомненной заслугой Пифагора и его ближайших последователей является выявление важнейших классов чисел. К примеру, числа могут быть *простыми*, т.е. делиться без остатка лишь на единицу и на себя (например, 2, 3, 5), или *составными* – имеющими большее количество делителей (например, 4, 6, 8). Другой принцип классификации связан с понятием фигурных чисел – *треугольных*, *квадратных* и т.д., смысл которых поясняется ниже следующим рисунком.



И вот здесь самое время вспомнить о наиболее известном результате Пифагора, с которым, впрочем, в той или иной форме были знакомы еще в Древнем Египте и Вавилоне. Что же такое *теорема Пифагора* в понимании самого Пифагора. Это, в первую очередь, не соотношение между длинами катетов и гипотенузы в прямоугольном треугольнике, а количественное равенство $x^2 + y^2 = z^2$. Оно говорит о том, что сумма

некоторых двух квадратных чисел оказывается в точности равной третьему квадратному числу. При этом возникает вопрос о том, насколько широк класс таких чисел, названных впоследствии *пифагоровыми тройками*. Тем самым теорема Пифагора оказывается отнесенной не к геометрии, как это мы привыкли считать, а к *теории чисел*, которая-то и была предметом особого интереса Пифагора.

Оценка множества пифагоровых троек дается знаменитым греческим математиком **Евклидом**, жившем на рубеже четвертого и третьего веков до нашей эры в Александрии. Вопреки принятому мнению, "*Начала*" Евклида является не чисто геометрическим трактатом, а своего рода математической энциклопедией, содержащей значительное количество результатов (в том числе, полученных математиками предшествующего периода), относящихся не только к геометрии. В частности, Евклид приводит чрезвычайно простое доказательство бесконечности множества пифагоровых троек. Действительно, для любого k справедливо равенство

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1.$$

Отсюда следует, что произвольное нечетное число (его общий вид – это и есть выражение в правой части равенства) представляет собой разность квадратов двух последующих чисел. Очевидно, квадрат любого нечетного числа m сам оказывается нечетным числом, а значит, представим в виде $2k + 1$. В этих условиях последнее равенство представимо в виде

$$(k+1)^2 = k^2 + m^2.$$

Тогда, учитывая бесконечность множества нечетных чисел, заключаем, что множество пифагоровых троек бесконечно.

Значительный шаг вперед сделал еще один греческий математик – **Диофант**, живший в третьем веке нашей эры опять-таки в Александрии. Прежде всего, у него (в отличие от Пифагора и Евклида) четко выделено понятие *уравнения* – математического соотношения, связывающего одно или несколько неизвестных чисел, подлежащих нахождению. Конечно, уравнения решали и до Диофанта подобно тому, как с числами имели дело до Пифагора, с геометрией – до Евклида, а с динамикой – до Ньютона. Однако у Диофанта предметом исследования были не просто конкретные уравнения, а уравнения вообще. Диофант классифицирует уравнения подобно тому, как Пифагор классифицировал числа, а Евклид – геометрические объекты. Отметим, что решения уравнений Диофант определяет в классе целых (иногда, рациональных) чисел. Такого типа задачи относятся к теории *диофантовых уравнений*, представляющей собой одно из ведущих направлений теории чисел. Он проводит существенно более полный по сравнению с Евклидом анализ уравнения *Пифагора* $x^2 + y^2 = z^2$. К примеру, тройка чисел (8,15,17) тоже является его решением, хотя и не представима в приведенной выше форме. В книге Диофанта "*Арифметика*" приводится также исследование других аналогичных уравнений. Работы Диофанта определили дальнейший путь развития теории чисел.

Пьер Ферма. Проблема поставлена

Минуло почти полторы тысячи лет. И вот в первой половине 17 века латинский перевод "*Арифметики*" Диофанта попадает в руки некоего француза **Пьера Ферма**. Среди многих задач, описанных Диофантом, как мы уже знаем, есть та, в которой требуется "*данное число, которое является квадратом, записать в виде суммы двух других квадратов*". И рядом на полях появляется приписка Ферма: "*с другой стороны, невозможно куб записать в виде суммы двух кубов, или четвертую степень – в виде суммы двух четвертых степеней, или, вообще, любое число, которое является степенью, большей, чем вторая, нельзя представить в виде суммы двух таких же степеней. У меня есть поистине удивительное доказательство этого утверждения, но поля эти слишком узки, чтобы его уместить*". Несколько строчек, едва ли не самых загадочных за всю историю математики, были написаны.

В строгой формулировке это утверждение, называемая также *великой* или *последней теоремой Ферма* говорит о следующем: **при любом целом значении n , большем двух, не существует таких целых положительных чисел x , y , z , которые удовлетворяли бы равенству**

$$x^n + y^n = z^n.$$

Формулировка теоремы вполне понятна заурядному школьнику далеко не самого старшего класса. А вот доказательство... Величайшие математики последующих столетий упорно пытались его найти. Но безуспешно...

И возникает естественный вопрос: а как же сам Ферма? За три с половиной столетия математика прошла фантастический путь. В это время появилось значительное количество новых математических дисциплин, а ранее существовавшие изменились до неузнаваемости. В эти годы работали такие математические гении, как Эйлер, Лагранж, Гаусс, Риман, Гильберт и др., продвинувшие далеко вперед (кроме всего прочего) теорию чисел. Но теорема Ферма так и не была доказана...

Так мог ли этот результат получить Ферма в семнадцатом веке, в то время, когда математика еще толком не знала своих важнейших понятий – функцию, производную, интеграл, предел, группу, множество и т.д.? Проще всего предположить, что ничего такого у него не было. За его записью стоит либо явная ошибка, либо мистификация. Полей ему не хватило? Как-то не серьезно это выглядит. Ну что ему стоило опубликовать статью с полным доказательством и тем самым обессмертить свое имя на века...

Так ведь имя-то свое он и так обессмертил. Куда уж более... Что же касается публикаций... Так он вообще ничего не опубликовал в своей жизни. И не был он профессиональным ученым. Юрист по образованию, он всю свою жизнь проработал по специальности в системе судопроизводства родного города Тулузы, центра провинции Гасконь, будучи тем самым не только современником, но и земляком небезызвестного Д'Артаньяна. Был он солидным уважаемым человеком... Нет уж, мистификация здесь наверняка исключается. Вопросы признания научных заслуг его нисколько не волновали. Да и кто мог его признать? Во всей Европе тогда, возможно, и было-то десятка два математиков, со многими из которых он состоял в переписке. К славе Ферма не стремился, а работал во своё удовольствие. Вот попалась какая-то интересная задачка – решил и пошел дальше...

Может быть, он просто читал Диофанта. Дошел до уравнения Пифагора. Пришла в голову мысль поменять квадрат на другую степень. Попробовал найти решение. С ходу не получилось. Ну он и написал тут же на полях – нет никаких решений...

Если бы решения существовали, а он их нашел, не указав метода исследования, то это можно было понять: подобрал как-то, опираясь на интуицию или на удачу... Но как можно предугадать ту ситуацию, когда решений нет вообще? Интуиция-то подсказывает обратное: при $n = 2$ решения есть, и даже в большом количестве (вспомним Евклида). К тому же Ферма прямо говорит, что он обладает доказательством. Может быть, что-то у него всё же было, но он попросту ошибся?

И вот здесь хотелось бы немного поговорить о доподлинно известных результатах Пьера Ферма. Если бы он даже и не сформулировал свою знаменитую теорему, его вклад в теорию чисел оказался одним из наиболее значительных среди всех математиков, живших до и после него. Если бы он вообще не занимался теорией чисел, у нас всё равно были бы веские основания считать его одним из величайших математиков всех времен и народов. Если бы он вообще не получил ни одного результата в области математики, он бы всё равно попал в ряды классиков мировой науки.

Так что же мы знаем о научных достижениях Ферма? Оставим в стороне теорию чисел, одним из основоположников которой его принято считать. Вспомним, что он первым в явном виде ввел декартову систему координат (раньше Декарта!), оказавшись у истоков аналитической геометрии. Он является одним из основателей теории вероятностей и теории игр. А еще есть теория экстремума, где ему принадлежит первый в

этой теории фундаментальный результат: в точке экстремума производная функции обращается в нуль (тоже, кстати, теорема Ферма). Задолго до Ньютона и Лейбница он умел дифференцировать и интегрировать. В любом учебнике физики можно прочитать про оптический принцип Ферма: луч света в неоднородной среде распространяется таким образом, чтобы время на преодоления пути между двумя заданными точками было минимальным. Помимо объяснения законов преломления света за этим стоит глубочайшая идея о том, что законы природы могут быть сформулированы с помощью вариационных принципов. Кстати, размышлял он о едином фундаментальном законе природы, из которого выводились бы остальные законы...

И вот этот человек говорит: есть такой результат, и я обладаю его доказательством. Но проходят столетия, и лучшим математикам последующих поколений эта задача оказывается не по плечу...

Любопытно, что у Ферма всё-таки обнаружилось абсолютно строгое доказательство его теоремы для случая $n=4$. Это едва ли не единственное полное доказательство, которое у него вообще было найдено. Метод решения здесь и впрямь можно назвать "*поистине удивительным*". Он не имеет аналогов и служит прекрасной иллюстрацией необыкновенной интуиции и безупречной логики Ферма. Им был разработан *метод бесконечного спуска* (см. [1], [12]), идея которого состоит в следующем. Если бы существовали три натуральных числа, которые удовлетворяли бы равенству $x^4 + y^4 = z^4$, то можно было бы построить новое решение с меньшими значениями этих чисел (как это делать – Ферма показывает). К такому решению можно применить ту же процедуру, и получить еще меньшее решение. Применяя этот подход многократно, мы можем сколь угодно долго переходить от одних решений уравнения к другим, всё меньшим и меньшим. Однако множество целых положительных чисел ограничено снизу – меньше единицы таковых нет. Поэтому, предположив разрешимость данного уравнения, рано ли поздно мы приходим к противоречию: уравнение имеет целое положительное решение, которое оказывается... меньше единицы. Следовательно, первоначальное предположение о существовании решения рассматриваемого уравнения на множестве натуральных чисел не реализуется. Доказательство – безупречно... Так может, именно его имел в виду Ферма, когда делал пометки на полях книги Диофанта? Нет. Там прямо говорится про общий случай, а здесь случай частный. Значит, было что-то другое...

От Эйлера до Куммера. Медленное продвижение к цели

Шли годы, а загадка Ферма так и оставалась не решенной... Было понятно, что достаточно обосновать утверждение Ферма лишь для простых чисел n . Действительно, пусть, к примеру, *уравнение Ферма* $x^n + y^n = z^n$ имеет решение при $n = pq$, где p и q – некоторые простые числа, т.е. справедливо равенство

$$x^{pq} + y^{pq} = z^{pq}.$$

Тогда, вводя обозначения $a = x^p$, $b = y^p$, $c = z^p$, приходим к соотношению $a^q + b^q = c^q$. Тем самым, из существования решения уравнения Ферма для составного числа n следует существование решения этого же уравнения для меньшего показателя степени – простого делителя q числа n . Таким образом, установив желаемый результат лишь для простых значений показателя степени, мы получим аналогичный результат для произвольного n , окончательно доказав тем самым теорему Ферма. В результате задача, как будто, существенно упростилась: достаточно проверить справедливость утверждения Ферма лишь для простых значений n . К сожалению, простых чисел – тоже бесконечное множество. Доказательство этого факта также содержится в "*Началах*" Евклида.

Понадобился целый век, прежде чем появился математик, способный принять брошенный вызов. Великий **Леонард Эйлер** оставил после себя без малого 900 научных работ, охватывающих буквально все разделы математики, да и не только ее. Значительное количество из них были посвящены теории чисел. Одну за другой, он уверенно решал

проблемы, поставленные в свое время Ферма. И практически всюду находил окончательное решение. За одним исключением – той самой Великой и Последней Теоремы. Но и в этом вопросе Эйлеру удалось совершить значительный прорыв.

Эйлеру принадлежит блестящая идея попытаться использовать для доказательства теоремы Ферма теорию *комплексных чисел*, не имеющую, казалось бы, никакого отношения к поставленной задаче. Именно таким путем Эйлеру удалось приспособить разработанный Ферма метод бесконечного спуска для доказательства его теоремы в случае $n=3$, о чем он объявил в 1753 году. Это был первый серьезный результат со времен Ферма в данном направлении. Однако ни самому Эйлеру, ни другим математиками восемнадцатого так и не удалось распространить его на другие значения показателя степени. Более того, даже само доказательство Эйлера содержало пробел (см. [12]), который, впрочем, был впоследствии преодолен.

В начале девятнадцатого века крупнейшим математиком по праву считался **Карл Фридрих Гаусс**. Многие специалисты вообще называют его первым математиком всех времен и народов. Ему принадлежит значительное количество великолепных результатов в области теории чисел. Отметим, в частности, понятие *целого комплексного числа* – числа вида $a+bi$, где a и b – целые числа, а i – мнимая единица. Числа такой природы, называемые также *гауссовыми*, можно складывать и умножать, причем в результате непременно получаются числа того же вида. Тем самым с алгебраической точки зрения множество гауссовых целых чисел образуют *кольцо*, аналогичное обычному кольцу целых чисел. Затем выделяются *простые гауссовы числа* $a+bi$, у которых величина a^2+b^2 оказывается простым числом вида $4n+1$ или $4n+3$. Любопытно, что некоторые обычные простые числа становятся составными при переходе к гауссовым числам. В частности, справедливы разложения: $2=(1+i)(1-i)$, $5=(2+i)(2-i)$, т.е. на множестве комплексных чисел величины 2 и 5 уже не будут простыми. Однако число 3 всё равно остается простым... Вспомним, что простые числа чрезвычайно важны для теоремы Ферма, а результаты Эйлера указывают на эффективность применения здесь теории комплексных чисел. Казалось бы, в этих условиях гениальному Гауссу предначертано решить знаменитую проблему... Но увы... Ему также не удалось добиться успеха... Встречается, впрочем, в литературе утверждения о том, что Гаусс все-таки доказал теорему Ферма для $n=3$ и даже для $n=5$ (см., в частности, [7]). Однако в книгах, непосредственно посвященных теореме Ферма [11], [12], об этом ничего не говорится.

Однажды Гаусс получил письмо, подписанное неким мсье Лебланом, в котором предлагается качественно новый способ исследования уравнения Ферма. Впоследствии выяснилось, что под псевдонимом "Леблан" скрывается французенка **Софи Жермен**. Она подошла к решению проблемы весьма оригинально. Вместо того чтобы доказывать неразрешимость уравнения Ферма, она предложила установить, какими свойствами должно удовлетворять его решение в случае, если таковое существует. Согласно ее утверждению, если n есть простое число, а число $2n+1$ также является простым, то из равенства $x^n+y^n=z^n$ вытекает, что хотя бы одно из трех чисел x, y, z делится на n . В частности, если уравнение Ферма при $n=5$ имеет решение, то хотя бы одно из чисел x, y, z должно непременно делиться на 5. Из результата Жермен следовало, что теорема Ферма распадается на два специфических случая: когда ни одно из чисел x, y, z не делится на n и когда одно из них делится на n . Теорема Жермен была чрезвычайно высоко оценена Гауссом, а ее последствия вскоре дали о себе знать.

В 1825 году было дано доказательство теоремы Ферма для $n=5$. Этот результат был получен **Петером Густавом Леженом Дирихле** из Германии и французом **Адриеном Мари Лежандром**. Дирихле в то время едва исполнилось 20 лет. Он был связан с Гауссом и через много лет после смерти последнего занял его место в Гёттингенском университете. Лежандр, напротив, был уже широко известным математиком, близко знакомым, кстати, с Софи Жермен и усилившим ее теорему. Ему уже перевалило за 70.

Получение выдающегося математического результата в столь солидном возрасте следует признать уникальным явлением.

Около полугода Парижская Академия следила за увлекательным соревнованием своего ведущего члена Лежандра с никому не известным Дирихле, годящимся во внуки маститому академику. Сначала в июле Дирихле представляет работу, где для уравнения $x^5 + y^5 = z^5$ доказывает невозможность случая, когда то из чисел x, y, z , являющихся его гипотетическим решением, которое делится на 5 (см. выше), оказывается четным. Затем в сентябре выходит статья Лежандра, в которой в дополнение к результатам Дирихле он рассматривает случай, когда указанное число является нечетным, дав тем самым первое полное доказательство теоремы Ферма для $n = 5$. Наконец, в ноябре появляется новая статья Дирихле, являющаяся естественным продолжением его предшествующей работы с более простым анализом последнего случая.

В 1832 году Дирихле удалось доказать теорему Ферма для $n = 14$. Однако этот результат оказывается не столь значительным, поскольку имеет дело не со степенью простого числа. Более существенным оказалось обоснование теоремы для $n = 7$, данное в 1839 году **Габриелем Ламе**. А вскоре Парижская Академия объявила о том, что она вручит золотую медаль и 3000 франков, тому математику, который представит полное доказательство теоремы Ферма...

И вот 1 марта 1847 года в стенах Академии развернулась бурная дискуссия. Начало ей положило выступление всё того же Ламе, который, окрыленный предшествующим успехом, заявил об окончательном доказательстве теоремы Ферма. При этом он выразил благодарность известному французскому математику **Жозефу Лиувиллю** за одну идею, подсказавшую ему способ добиться желаемой цели. Лиувиллю, являвшемуся редактором крупнейшего математического журнала Франции, принадлежали также выдающиеся результаты в области *трансцендентных чисел*, т.е. таких, которые не являются решениями алгебраических уравнений... Любопытно, что в ответ на заявление Ламе присутствующий здесь же Лиувилль не только отказался признать себя сопричастным к решению теоремы Ферма, но и выразил серьезные сомнения в корректности рассуждений Ламе. Однако выступивший вслед за этим **Луи Огюстен Коши**, один из крупнейших математиков девятнадцатого века, заявил, что Ламе, возможно, прав. Более того, он сам стоит на пороге доказательства теоремы Ферма.

Отстаивая свой приоритет в доказательстве теоремы, 22 марта Ламе и Коши представили Академии имеющиеся у них на данный момент результаты в запечатанных конвертах. Однако после публикации этих материалов стало ясно, что сомнения Лиувилля в корректности возможного доказательства были вполне обоснованными. Более того, 24 мая Лиувилль публикует письмо **Эрнста Куммера** из Германии, которое окончательно похоронило надежду Ламе и Коши доказать теорему Ферма. В литературе встречаются высказывания о том, что и сам Куммер пытался доказать теорему Ферма [7]. Говорится, что он также заявил об окончательном доказательстве им теоремы Ферма, причем в своих рассуждениях допустил ту же самую ошибку, что и Ламе. А обнаружил эту ошибку Дирихле, ставший к тому времени уже весьма авторитетным математиком. Есть и иное мнение: не было у Куммера никакого ошибочного доказательства [12]. Однако, так или иначе, именно Куммер сделал, быть может, самый крупный шаг на пути исследования комплекса проблем, связанных с теоремой Ферма.

Чтобы понять смысл работ Куммера, следует познакомиться с той самой ошибкой, которая не позволила дать окончательное доказательство теоремы Ферма еще в середине 19 века. В теории чисел есть такой результат, называемый *основной теоремой арифметики* и восходящий к Евклиду и Диофанту. Согласно этому утверждению любое натуральное число можно однозначно разложить в произведение простых чисел. Так, справедливы, к примеру, следующие разложения $12 = 2^2 \cdot 3$, $270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$. Основная теорема арифметики остается в силе и для гауссовых чисел. Однако существуют еще *алгебраические числа* – числа (вообще говоря, комплексные), являющиеся решениями

алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами, т.е. не являющиеся трансцендентными (вспомним Лиувилля). Среди таковых выделяются *целые алгебраические числа*, определенные, в частности, Дирихле, у которых коэффициентами соответствующего уравнения являются обычные целые числа. Таковыми, к примеру, оказываются числа $1 + \sqrt{5}i$ и $1 - \sqrt{5}i$, являющиеся корнями алгебраического уравнения $x^2 - 2x + 6 = 0$. Целые алгебраические числа подобно гауссовым и обычным целым числам также образуют кольцо. Однако для них основная теорема арифметики уже не работает. В частности, нарушается требование однозначности разложения числа на сомножители. К примеру, для числа 6 допустимы следующие качественно разные представления:

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{5}i) \cdot (1 + \sqrt{5}i).$$

В тех самых попытках окончательного доказательства теоремы Ферма предполагалось, что основная теорема арифметики (т.е. однозначность разложения на сомножители) реализуется и для целых алгебраических чисел, что никак не соответствовало действительности. В итоге теорема Ферма так и осталась не доказанной...

Однако Эрнст Куммер не собирался сдаваться. Его идея была вполне естественна. Вот имеем мы два, казалось бы, различных разложения натурального числа, например,

$$60 = 4 \cdot 15 = 6 \cdot 10.$$

Это возможно в силу того, что соответствующие сомножители не являются простыми числами. В действительности же справедливо равенство $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, к которому сводятся оба, казалось бы, различных разложения. И Куммер предложил пополнить множество целых алгебраических чисел так называемыми *идеальными числами* с целью восстановления однозначности разложения. Так, для описанного выше разложения числа 6 можно ввести идеальные числа a, b, c так, чтобы соответствующие сомножители удовлетворяли равенствам

$$2 = a^2, \quad 3 = bc, \quad 1 - \sqrt{5}i = ab, \quad 1 + \sqrt{5}i = ac.$$

Отсюда при желании можно найти конкретные значения a, b, c . При этом будут выполнены соотношения

$$6 = 2 \cdot 3 = a^2 bc; \quad 6 = (1 - \sqrt{5}i) \cdot (1 + \sqrt{5}i) = a^2 bc,$$

и однозначность разложения числа 6 устанавливается.

В сущности, нововведения Куммера вполне укладываются в общую схему эволюции взглядов на число. Вот не имело *аддитивное* уравнение $x + 2 = 1$ решения на множестве натуральных чисел, а *квадратное* уравнение $x^2 = -1$ – на множестве действительных чисел. Мы расширяем исходный класс объектов (указанных числовых множеств) путем искусственного введения туда новых величин – отрицательного числа -1 и мнимого числа i соответственно. На исходном множестве натуральных (соответственно, действительных) чисел аддитивное (соответственно, квадратное) уравнение, вообще говоря, не имеет решения. Однако на получаемом в результате расширения множестве целых (соответственно, комплексных) чисел аддитивное (соответственно, квадратное) уравнение всегда имеет решение. Точно также на исходном множестве целых алгебраических чисел основная теорема арифметики, вообще говоря, не работала. Однако после пополнения его идеальными числами однозначность разложения на простые сомножители была восстановлена.

Введение Куммером идеальных чисел оказалось значительным прорывом в теории чисел и в алгебре. С помощью этих результатов ему удалось также существенным образом продвинуться и на пути доказательства теоремы Ферма. В частности, была доказана неразрешимость уравнения Ферма для всех значений n меньше ста. Но полного доказательства теоремы Ферма Куммер так и не дал. Мир вступал в двадцатый век...

Век двадцатый. Долгожданное доказательство

В самом начале века произошло событие, привлечшее всеобщее внимание к теореме Ферма. Рассказывают [11], что в 1908 году немецкий бизнесмен **Пауль Вольфскель** был отвергнут женщиной, в которую был страстно влюблен. Вольфскель в отчаяние решил покончить с собой, назначив точное время самоубийства. Приведя в порядок все свои дела, он обнаружил, что еще располагает несколькими часами свободного времени. Чтобы как-то его скоротать, он зашел в библиотеку. Ему попалась та самая статья Куммера, в которой доказывалась бесперспективность попыток Ламе и Коши доказать теорему Ферма. Вольфскель, получивший в свое время математическое образование, стал читать статью и... обнаружил пробел в рассуждениях Куммера. Если этот пробел не удастся восполнить, то Куммер был бы не прав, а теорема Ферма оказалась доказанной методом Ламе с соответствующими дополнениями. В конце концов, Вольфскелю удалось подтвердить справедливость утверждений Куммера. Тем самым теорема Ферма по-прежнему оставалась не доказанной... Однако попутно выяснилось, что время, на которое было назначено самоубийство, миновало. А у Вольфскеля уже отпало желание сводить счеты с жизнью...

Трудно сказать, так это было или иначе. Однако есть неопровержимый факт – согласно завещанию Вольфскеля 100 000 марок (колоссальная сумма для того времени) выделяется тому, кто сможет дать доказательство теоремы Ферма. Деньги эти были переведены на счет Гёттингенского университета – того самого, где когда-то творили Гаусс, Дирихле, Риман и где в то время работали Гильберт, Клейн и Минковский. Вскоре университет был завален многочисленными "окончательными доказательствами", принадлежащими, как правило, дилетантам... А что же профессионалы?

Наиболее авторитетным математиком того времени был **Давид Гильберт**, которого называют последним из великих математиков. На вопрос, почему он не берется за доказательство теоремы Ферма, Гильберт обычно отвечал: зачем резать курицу, которая несет золотые яйца. Действительно, на проценты с премии Вольфскеля Гёттингенский университет приглашал к себе математиков со всего мира. Пытался ли все-таки Гильберт доказать теорему Ферма? Трудно сказать... Однако еще в 1900 на Международном конгрессе математиков в Париже Гильберт выступил с грандиозной программой развития математики 20 века. Среди знаменитых 23 проблем Гильберта отметим проблему за номером 10. Здесь предлагалось разработать метод, позволяющий ответить на вопрос, будет ли диофантово уравнение общего вида иметь решение. Гильберт привык мыслить масштабно – положительное решение его десятой проблемы автоматически давало бы доказательство (или опровержение) теоремы Ферма, связанной, как известно, с одним единственным конкретным диофантовым уравнением. К сожалению, в 1970 советский математик **Юрий Матиясевич** дал отрицательное решение десятой проблемы Гильберта. Из его результатов следовало, что принципиально невозможно разработать универсальный алгоритм, который позволил бы установить, будет ли произвольное диофантово уравнение иметь решение или нет. Теория диофантовых уравнений оказалась качественно более сложной, чем об этом думали математики, включая такого корифея как Гильберт... Шло время, а премия Вольфскеля так и оставалась не востребованной...

Решительный шаг вперед, приведший, в конце концов, к доказательству теоремы Ферма, был сделан сентябре 1955 года. Правда, об этом не догадывался даже тот человек, который этот шаг сделал. На Международном математическом конгрессе в Токио молодой японский математик **Ютака Танияма** выступил с докладом, посвященным... нет, далеко не теореме Ферма и даже не теории чисел, а... *алгебраической геометрии*. Речь идет о разделе математики, в котором изучаются геометрические объекты, связанные с алгебраическими уравнениями. Так вот, Танияма объявил о неожиданной связи между двумя, казалось бы, никак не связанными направлениями – теориями эллиптических кривых и модулярных форм [8].

Истоком теории *эллиптических кривых* служит понятие *эллиптического интеграла*, впервые появившееся еще в конце 17 века в связи с вычислением длины дуги эллипса. В свою очередь, *модулярная форма* представляет собой весьма специфическую функцию комплексного переменного. Ее отличительной особенностью является чрезвычайно богатые свойства симметрии: в результате достаточно широкого класса преобразований эта функция преобразуется сама в себя.

Казалось бы, между этими двумя объектами нет ничего общего. Однако Танияма заявил, что каждой эллиптической кривой соответствует конкретная модулярная форма, а за каждой модулярной формой стоит вполне определенная эллиптическая кривая. Обосновать свое утверждение он не смог, однако привел серию примеров связанных друг с другом модулярных форм и эллиптических кривых. Вскоре к этой работе подключился другой японский математик – **Горо Шимура**, которому удалось получить в этом направлении столь серьезные результаты, что высказывание о связи между эллиптическими кривыми и модулярными формами стали называть *гипотезой Таниямы – Шимуры*. Однако ни Шимура, ни Танияма не дали строго обоснования своей гипотезы.

А в ноябре 1958 математический мир потрясло известие о неожиданном самоубийстве Таниямы. В своей предсмертной записке Танияма подробно описывает, как следует распорядиться его имуществом, как следует читать учебные курсы, которые он не успел завершить и т.д., но никак не разъясняет мотивы своего поступка. Ему только что исполнился 31 год. Он по праву считался одним из наиболее перспективных математиков Японии. На здоровье, как будто, не жаловался. В ближайшее время у него была назначена свадьба... Кстати, вскоре его невеста также покончила с собой... Шли годы, а гипотеза Таниямы – Шимуры так и осталась необоснованной... Однако причем здесь теорема Ферма?

Осенью 1984 немецкий математик **Герхард Фрей** выступил с сенсационным заявлением: в случае обоснования гипотезы Таниямы – Шимуры можно получить окончательное доказательство теоремы Ферма. Фрей привел примерно такие рассуждения. Предположим, что уравнение Ферма все-таки имеет решение (с этого допущения начинала доказательство своей теоремы Софи Жермен). Тогда по данному решению с помощью довольно-таки хитроумных конструкций можно наверняка построить некоторую эллиптическую кривую. Однако кривая эта будет обладать столь экзотическими свойствами, что ей никак не может соответствовать какая-либо модулярная форма. Это, в свою очередь, вступает в противоречие с гипотезой Таниямы – Шимуры, согласно которой любая эллиптическая кривая должна соответствовать некоторой модулярной форме. А в результате мы получаем альтернативу: либо эта гипотеза верна, и тогда наше первоначальное предположение о существовании решения уравнения Ферма не соответствует действительности (а значит, справедлива теорема Ферма), либо рассматриваемая гипотеза не верна. Таким образом, в случае обоснования гипотезы Таниямы – Шимуры мы автоматически получаем доказательство теоремы Ферма.

Итак, ключ к доказательству теоремы Ферма дает гипотеза Таниямы – Шимуры. Казалось бы, подсказка пришла с совершенно неожиданной стороны – из алгебраической геометрии. Однако столь ли уж неожиданным был этот результат, в принципе? Еще в 1896 году выходит монография **Германа Минковского** (прославившегося впоследствии разработкой математического аппарата специальной теории относительности), в которой закладываются основы нового раздела теории чисел – *геометрии чисел*. Минковский показал, что те или иные геометрические конструкции могут быть с успехом использованы для обоснования многих утверждений теории чисел. А задолго до этого, еще в начале 19 века другой немецкий математик **Карл Якоби**, один из основоположников теории эллиптических интегралов, высказал мысль о том, что этот аппарат может найти применение для исследования диофантовых уравнений. Таким образом, глубокое утверждение Фрея, существенным образом приближающее

доказательство теоремы Ферма, нельзя признать столь уж сенсационным – чего-то подобного можно было бы и ожидать...

Казалось бы, путь к доказательству теоремы Ферма, наконец, открыт. Но увы... Вскоре выяснилось, что утверждение Фрея о том, что эллиптическая кривая, соответствующая гипотетическому решению уравнения Ферма, не может соответствовать никакой модулярной форме, оказалось недостаточно строго обоснованным. В этих условиях заявление Фрея о том, что обоснование гипотезы Таниямы – Шимуры дает доказательство теоремы Ферма, не могло быть признано корректным. Появившейся было надежде на скорое доказательство теоремы Ферма вновь не суждено было осуществиться...

К счастью, вскоре американский математик **Кен Рибет** все-таки смог обосновать утверждение Фрея. Вот теперь всё дело упиралось исключительно в гипотезу Таниямы – Шимуры... Уже тридцать лет лучшие математики безуспешно пытались ее обосновать. Однако теперь ставки несоизмеримо возросли. Обоснование этой гипотезы – безусловно, великолепный результат! Но решение проблемы, оказавшейся не под силу величайшим из математических гениев – это совсем другое дело...

Англичанину **Эндрю Уайлсу** необыкновенно повезло... Еще в детстве он прочитал про теорему Ферма, и великая загадка запала ему глубоко в душу. А теперь ему уже перевалило за тридцать. Он обладал обширными познаниями и немалым опытом ведения глубоких математических исследований, и был в расцвете своих творческих сил. И, что самое главное, он был признанным специалистом в теории эллиптических кривых, тех самых, о которых говорили Танияма и Шимура. Уайлс понял, что ему представился уникальный шанс...

В 1986 году, узнав о результатах Фрея и Рибета, Уайлс приступает к обоснованию гипотезы Таниямы – Шимуры. После тщательного анализа он установил, что всё множество эллиптических кривых распадается на некоторое семейство классов, существенно различающихся по своим свойствам. Каждый из этих классов требовал разработки специальных методов исследования. Дело затягивалось на годы...

Больше всего на свете Уайлс боялся, что его предварительные результаты могут подтолкнуть кого-либо к новым исследованиям, и этот кто-то добьется желанного результата раньше. Он принял тщательные меры предосторожности. Ранее он получил ряд неплохих результатов в направлении своих прежних исследований и не успел их опубликовать. И вот теперь раз в полгода он аккуратно передавал небольшими порциями какой-нибудь материал для публикации. Таким образом, окружающие могли думать, что он продолжает свои старые изыскания.

А ему было чего бояться... Еще в 1983 году американец **Герд Фалтингс**, опять-таки с помощью методов алгебраической геометрии (впрочем, совершенно других) сумел показать, что уравнение Ферма не может иметь бесконечного множества решений. И вот в продолжение работ Фалтингса в 1988 году, когда Уайлс уже приступил к работе, но был еще очень далек от желанной цели, японский математик **Иоичи Мияока** выступил с заявлением, что он доказал теорему Ферма. К сожалению (естественно, для Мияоки, но не для Уайлса), в этом доказательстве была обнаружена непреодолимая ошибка... Теорема Ферма по-прежнему оставалась не доказанной...

Шли годы... Уайлс упорно приближался к цели. А математический мир оставался в полном неведении о происходящих событиях...

Кульминация наступила 23 июня 1993 года на Международной математической конференции в Кембридже, в городе, где в свое время учился Уайлс и откуда он уже давно уехал работать в США. Эндрю Уайлс выступает с большой лекцией с весьма расплывчатым названием. Под конец своего выступления после долгих и громоздких выкладок он подводит итог: гипотеза Таниямы – Шимуры может считаться окончательно обоснованной. Затем молча пишет на доске небезызвестное соотношение $x^n + y^n = z^n$ и говорит: *"Думаю, на этом мне следует остановиться"*.

Как события развивались дальше? В соответствии завещанием Вольфскеля доказательство теоремы Ферма должно было быть опубликованным в одном из ведущих математических журналов. Учитывая уникальность события, доказательство Уайлса объемом около 200 страниц было разбито на шесть частей и передано на рецензирование различным ведущим математикам. А дальше... один из рецензентов **Ник Катц** в своей части доказательства Уайлса обнаружил одно важное положение, которое не могло быть признано обоснованным. А в отсутствии этого положения доказательство гипотезы Таниямы – Шимуры, а значит, и теоремы Фермы уже не будет корректным. Очередная неудача...

И все же 23 октября 1994 года Уайлс совместно со своим бывшим аспирантом **Ричардом Тейлором** представил в журнал новый материал на 130 страницах. После тщательной проверки скорректированное доказательство Уайлса было признано безупречным. В мае 1995 года оно было опубликовано в журнале "*Annals of Mathematics*" (см. [2], [3]). Уайлс получил всеобщее признание и премию Вольфскеля.

Так под занавес тысячелетия наиболее известная из математических проблем получила, наконец, долгожданное решение.

Заключение

Какие чувства возникают после всего этого? Прежде всего, восхищение: величайшая из математических проблем нашла, наконец, свое решение... Затем – грусть: математика лишилась одной из своих удивительных загадок... И под конец – легкое разочарование (не умаляя несомненных заслуг Уайлса и его многочисленных предшественников)... Для утверждения, понятного пятикласснику, дано доказательство (причем, косвенное) на ста с лишнем страницах, в котором разобраться-то могут лишь узкие профессионалы, коих во всем мире совсем немного. На полях книги Диофанта такое уж точно не поместится... Уж этот результат Ферма точно не мог получить... А какой мог?

Есть определенная вероятность того, что он мог додуматься до попытки доказательства 19 века, обернувшейся неудачей в силу неоднозначности разложения на простые сомножители целых алгебраических чисел. В этом случае Ферма опередил бы свое время на двести лет... Чрезвычайно большой срок... Слишком уж значительный путь прошла математика за это время... Но Ферма был гением...

Что же сейчас осталось в математике не решенного? В той же теории чисел еще есть немало проблем, некоторые из которых, подобно теореме Ферма, отличаются удивительной простотой и ясностью постановки, обладая в то же время фантастической сложностью.

К примеру, еще древним грекам была известна проблема *близнецов* – пар простых чисел, различающихся на двойку. К таковым относятся, к примеру, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19 и т.д. Так вот, до сих пор не известно, конечно или бесконечно множество близнецов. Стоит упомянуть также *проблему Гольдбаха*, согласно которой любое четное число больше двух можно представить в виде суммы двух простых чисел. В частности, справедливы равенства: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$ и т.д. До сих пор не известно ни доказательства указанного утверждения, ни примера четного числа, которое нельзя представить указанным способом.

Но, пожалуй, наиболее известной из нерешенных математических проблем является *гипотеза о нулях дзета-функции* – некоторой специфической функции комплексного переменного. Решение этой проблемы в значительной степени проливает свет на распределение простых чисел среди обычных натуральных чисел. Гипотеза эта была сформулирована **Бернхардом Риманом** в середине 19 века. Впоследствии она была включена в число 23 проблем Гильберта, а Минковский еще в начале 20 века вообще называл ее важнейшей из проблем математики. Примерно через сто лет, на рубеже тысячелетий были сформулированы семь важнейших математических проблем современности – *Millennium Prize Problems*. В их число вошла и гипотеза Римана –

единственная из проблем Гильберта, так и оставшаяся не решенной. Американский миллиардер Клей, основавший Институт Математики Клея в штате Массачусетс (США), выделил миллион долларов для вручения тому, кто решит проблему Римана. Премия еще не вручена... Однако существует версия (см. [4]), что эта проблема в действительности уже решена ... самим Риманом – гениальным математиком, умершим в расцвете сил и не успевшим опубликовать некоторые из своих результатов... Может быть, история повторяется?

И нет еще окончательной ясности с самой теоремой Ферма. Неужели для нее нельзя дать более простое и естественное доказательство? По крайней мере, принципиальных запретов на это, как будто, нет. Кто знает, может быть, со временем такое будет получено... И тогда окажется, что и у самого Ферма был, пусть ничтожный, но все-таки шанс...

Однако в любом случае ясно одно – в математике еще остаются нерешенные задачи, которые ждут своего часа...

В заключение хочу поблагодарить А. С. Абрамова, который ознакомился со статьей и сделал ряд ценных замечаний.

Литература

1. Ферма П. Исследования по теории чисел и диофантову анализу. – М.: Наука, 1992.
 2. Wiles A. Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem // Ann. of Math., 1995. – Vol. 142. – P. 443–551.
 3. Taylor R., Wiles A. Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras // Ann. of Math., 1995. – Vol. 142. – P. 553–572.
 4. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. – М., МЦНМО. – 2001.
 5. Айерланд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. – М.: Мир, 1987.
 6. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. – М.: Наука, 1985.
 7. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. – М.: Мир, 1971.
 8. Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. – М.: Мир, 1988.
 9. Ожигова Е. П. Что такое числа. – М.: УРСС, 2004.
 10. Постников М. М. Теорема Ферма. – М.: Наука, 1978.
 11. Сингх. С. Великая теорема Ферма. – М.: МЦНМО, 2000.
 12. Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел. – М.: Мир, 1980.
 13. Bell E. T. The Last Problem. – Mathematical Association of America, 1990.
- Stewart I., Tall D. Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem, 2001.

Ферма опубликовал одну работу по математике

Идеальные числа

Числа вида: $a + b\sqrt{5}i$ с целыми значениями a и b образуют кольцо (их можно складывать и перемножать). Здесь нарушена основная теорема алгебры:

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{5}i) \cdot (1 + \sqrt{5}i).$$

Выход на идеальные числа:

$$2 = a^2, \quad 3 = bc, \quad 1 - \sqrt{5}i = ab, \quad 1 + \sqrt{5}i = ac.$$

При этом будут выполнены соотношения

$$6 = 2 \cdot 3 = a^2 bc; \quad 6 = (1 - \sqrt{5}i) \cdot (1 + \sqrt{5}i) = a^2 bc.$$

Отсюда находятся значения:

$$a = \sqrt{2}, \quad b = (1 - \sqrt{5}i) / \sqrt{2}, \quad c = (1 + \sqrt{5}i) / \sqrt{2}.$$

Расширяя исходное множество за счет добавления трех идеальных чисел, мы устраняем неоднозначность разложения числа 6.