

С. Я. Серовайский

ПО СЛЕДАМ ЕВКЛИДА

Математика. Республиканский научно-методический журнал.

2007, № 6, с. 21-28

Большое преимущество геометрии состоит в том, что в ней чувства могут прийти на помощь рассудку и помогают отгадать нужный путь.

Анри ПУАНКАРЕ

История математики полна ярких драматических событий. И это не удивительно, поскольку математика – это неотъемлемая часть человеческой культуры. И мало что может здесь сравниться с проблемой пятого постулата Евклида. Кто не изучал в школе параллельные прямые? Даже у людей, весьма далеких от математики, геометрия Лобачевского интуитивно воспринимается как одно из величайших взлетов человеческой мысли. И в то же время даже в кругу профессиональных математиков, где, как это не печально, торжествуют принципы узкой специализации, не многие понимают суть этой грандиозной проблемы и знают ее захватывающую историю. Тем более, эти вопросы представляют живой интерес для молодых людей, делающих в математике первые шаги или только ищущих свой путь в науке. Возможно, этот небольшой популярный очерк даст интересующимся небольшим толчок к пониманию удивительной природы неевклидовой геометрии. Ну а более серьезную информацию об этих вопросах искушенный читатель сможет найти в прилагаемом списке литературы.

Загадка Евклида

Евклид. Великий древнегреческий математик, живший в 4 веке до н.э. О его жизни известно очень мало. Родом он из Афин. Учился в школе Платона. Большую часть жизни провел он в Александрии, ставшей волею Александра Македонского центром античного мира. Его основной труд "*Начала*" является, пожалуй, наиболее известной и читаемой работой за всю историю математики.

Евклид не был первым. За тысячи лет до него в древнем Египте и Вавилоне люди строили пирамиды, храмы, оросительные каналы, плавали по морям, наблюдали за звездами... Всё это требовало немалых знаний в области математики и, в частности, геометрии.

За два с половиной века до Евклида **Фалес из Милета** привел серию геометрических рассуждений с доказательствами. Возможно, это были первые математические теоремы... Тем самым открывался логический принцип изложения математических результатов, при котором каждая последующая мысль непременно должна базироваться на предшествующих положениях. Нет, далеко не Евклидом были сделаны первые шаги в разработке логического метода исследования.

А живший чуть позднее **Пифагор** не только установил ряд новых геометрических результатов, но и уверенно провозгласил, что математические понятия должны стать непосредственными объектами изучения, а не только средствами для решения тех или иных прикладных задач. Таким образом, идея создания самостоятельных (независимых от практики) математических теорий также принадлежит не Евклиду.

В 5 веке до н.э. **Гиппократ Хиосский** издал свои "*Начала*". Хотя этот труд до нас не дошел, известно, что в нем уже было дано более или менее систематическое изложение геометрии на плоскости. Следовательно, первая геометрическая теория принадлежит не Евклиду. Да и совпадение названий основных трудов Евклида и Гиппократа наводит на определенные мысли...

Евдокс Книдский, живший немногим раньше Евклида и также связанный со школой Платона, блестящий астроном и медик, философ и географ, быть может, наиболее глубокий математик античного мира, помимо всего прочего, умело применял

аксиоматический метод. Так, сформулированное им утверждение, вошедшее в математику под названием *аксиомы Архимеда*, является неотъемлемой частью евклидовой геометрии. Из этой аксиомы, в частности, следует, что на любом отрезке найдется внутренняя точка, что служит основой для выполнения всевозможных непрерывных преобразований.

По мнению авторитетных специалистов, *"Начала"* Евклида представляют собой обработку результатов его предшественников. Так почему же мы тогда, отдавая должное математиками более раннего периода, выделяем все-таки Евклида? Глубоко изучив сочинения других авторов и дополнив их своими собственными оригинальными разработками, Евклид дал блестящий образец построения математической теории, указав тем самым путь, по которому математика развивается вплоть до настоящего времени. То, что у его предшественников было гениальными догадками и одиночными результатами, у Евклида превращается в стройную логическую систему. Четкость и ясность мысли, глубина проникновения в суть проблемы и доступность изложения материала сделали *"Начала"* Евклида главной математической книгой человечества, не утратившей своей ценности до наших дней.

Итак, с чего следует начинать? Сначала даются определения основных понятий: *"точка есть то, что не имеет частей"*, *"линия есть длина без ширины"* и т.д. Потом следуют утверждения, которые принимаются на веру без доказательства – аксиомы и постулаты (трудно понять, зачем Евклид пользуется двумя понятиями, имеющими явно одну и ту же смысловую нагрузку). И, наконец, после этого приводятся теоремы, в которых формулируются многочисленные свойства определенных ранее понятий, обосновываемые с помощью перечисленных допущений. Любая современная математическая теория строится точно также.

Что же выбирает Евклид в качестве исходных предположений, не нуждающихся в обосновании? Простые и очевидные утверждения, справедливость которых никак не вызывает сомнений. Действительно, кто усомнится в том, что *"от всякой точки до всякой точки можно провести прямую"*, или, что *"все прямые углы равны между собой"*, или, что *"целое больше части"*? И вот, в одном ряду с этими вполне естественными свойствами присутствует следующая мысль: *"если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых"*. Знаменитый пятый постулат. Утверждение весьма громоздкое и далеко не очевидное...



Попробуй, проверь, что там произойдет с этими прямыми при их неограниченном продолжении? Не вносит ясности более простая и более известная формулировка: *"через точку, взятую вне прямой, можно провести ровно одну прямую, параллельную данной"*. Так ли уж это очевидно? То ли дело другие аксиомы! Берем две произвольные точки и соединяем их прямой. Вокруг данной точки строим окружность заданного радиуса. Сравниваем между собой два прямых угла или целое с частью. Опыт и здравый смысл убедительно подтверждает достоверность сделанных предположений. А ведь в случае пятого постулата мы имеем дело с бесконечными прямыми? Как узнать, что же случится с ними в бесконечности? Никакой опыт здесь уже не помогает...

Так почему же Евклид включает столь странное положение в список аксиом – очевидных утверждений, не нуждающихся в доказательстве и принимаемых на веру?

А если всё-таки теорема?

Чрезвычайно велик авторитет Евклида. Однако наиболее проницательным математикам не давала покоя загадка пятого постулата. А вдруг Евклид ошибся? А что, если данное утверждение является в действительности обычной теоремой, следствием других аксиом? И многие математики предпринимали попытку его доказательства.

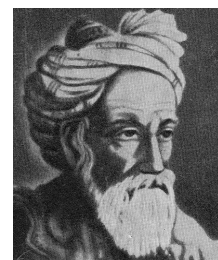
Назовем лишь одно имя. **Клавдий Птолемей**, живший во втором веке нашей эры опять-таки в Александрии. При упоминании о нем естественным образом всплывает его космологическая теория. Кто же не слышал о "нехорошей" системе Птолемея, противостоящей "хорошей" системе Коперника? Хотя можно было бы и задуматься – если уж система Птолемея столь плоха, то почему же пользовались ею ведущие астрономы всего мира полторы тысячи лет? Птолемей был крупнейшим математиком, астрономом и географом своего времени. Ему принадлежат точнейшие для той эпохи географические карты и атласы звездного неба. Он изобрел астролябию и разработал теорию солнечных часов. Систематически изложил прямолинейную и сферическую тригонометрию. За полторы тысячи лет до Ферма и Декарта описал три прямоугольных координатных оси...

У Птолемея был уникальный шанс... С одной стороны, он тщетно бился над доказательством пятого постулата Евклида. А, с другой стороны, прекрасно знал, что треугольники на плоскости и на сфере существенно различаются по своим свойствам. Казалось бы, осталось-то совсем немного – попытаться как-то связать эти результаты. Если на поверхности сферы уже не действуют привычные геометрические законы, вытекающие из аксиом Евклида, то это значит, что и сама аксиоматика Евклида там не работает в полном объеме. Тем самым сферический мир оказывается не евклидовым... А ключ к этому миру – тот самый пятый постулат, который явно не срабатывает на сфере... Но сколько еще должна было пройти математика до понимания этих явлений... И всё-таки отметим Птолемея, подошедшего столь близко к разгадке этой грандиозной проблемы, хотя явно не подозревавшего об этом.

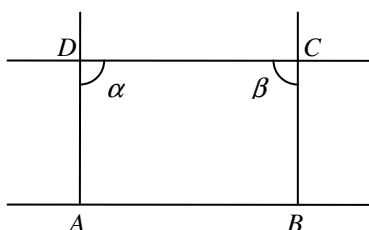


А дальше... Распадается Римская империя, в состав в которой входила Александрия. Со временем центр мировой культуры переместился на восток, где под знаменами ислама поднималась новая великая цивилизация арабов. Любой грамотный мусульманин был знаком с "*Началами*" Евклида. Столь же высоко почитаем и основной труд Птолемея, который и вошел-то в историю под арабским названием "*Альмагест*". И вот уже восточные математики развивают идеи своих греческих предшественников. Не забыт, естественно, и пятый постулат. Следуя по пути, указанному Птолемеем, они предпринимают новые попытки вывести его из других аксиом.

Назовем лишь одного из них. **Омар Хайям**, гениальный персидский поэт, живший в 11-12 веках. Удивительная глубина мысли и поразительная лаконичность и стройность его стихов, быть может, тем и объясняется, что был он в действительности... математиком. И не простым, а величайшим в свою эпоху. Его трактат "*О доказательстве задач алгебры и алмукабалы*" – едва ли не вершина алгебры средневекового Востока. А чего стоит одна только следующая мысль: "*Не следует придавать значение тому факту, что алгебра и геометрия по видимости различны. Алгебраические факты есть факты геометрические, которые доказаны*". Едва ли Декарт смог бы найти лучший эпиграф для своих трудов, посвященных системе координат...



Один из ведущих трактатов Омара Хайяма, состоящий из трех книг, называется "*Комментарии к трудным постулатам книги Евклида*". А вот название первой из этих книг – "*Об истинном смысле параллельных и об известных сомнениях*"? Пытаясь дать доказательство пятого постулата Евклида, он отмечает, что два перпендикуляра к одной прямой не могут сходиться и расходиться. И приводит следующую конструкцию. На заданной прямой выбираются две точки – A и B . Через них проводятся перпендикуляры к



данной прямой. На них выбираются такие точки C и D , чтобы отрезки AD и BC оказались равной длины. В результате получается четырехугольник $ABCD$. Теперь возникает вопрос, чему равны углы α и β при вершинах C и D ? Пятый постулат Евклида оказывается эквивалентным утверждению о том, что эти углы являются прямыми. Тем самым

обоснование пятого постулата может быть сведено к исследованию указанных углов. Построения Омара Хайяма открывали практический путь к более глубокому анализу загадочной аксиомы Евклида.

Минуло еще шесть веков. В 1733 году итальянский математик **Джованни Джироламо Саккери** публикует работу под характерным названием "*Евклид, очищенный от всех родимых пятен*". В ней дается глубокий анализ свойств того самого четырехугольника *ABCD*, который был впоследствии назван *четырёхугольником Саккери*. Проводится тщательная проверка всех трех возможных гипотез – прямого, острого и тупого углов. Великолепным результатом здесь оказывается опровержение *гипотезы тупого угла*. Саккери удалось показать, что это предположение вступает в противоречие с другими аксиомами Евклида. А вот при доказательстве невозможности выполнения *гипотезы острого угла* Саккери допускает ошибку. Тем самым сделанное им окончательное заключение о том, что реализуется исключительно гипотеза прямого угла, эквивалентная пятому постулату Евклида, оказалось не верным.

EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
1733
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Tuscani Universitate Mathematicæ Professore.
OPUSCULUM
EX. MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dedicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
In Typographiæ Pauli Antonii Momati. — Apud Antonium perorgi.

Нет, Саккери так и не удалось доказать утверждение Евклида. Но наиболее интересным в его работе оказался анализ гипотезы острого угла, приведший его к ошибочному выводу. Предположив, что указанные углы являются острыми, Саккери вывел отсюда поразительные результаты. Оказывается, в этом случае сумма углов в треугольнике будет меньше, чем 180° , а в четырехугольнике – меньше, чем 360° . При этом перпендикуляр и наклонная к прямой могут не пересекаться. А еще существуют прямые, сходящиеся в одну сторону и расходящиеся в другую. А множество точек, равноудаленных от прямой, образуют кривую. И тогда Саккери уверенно заключает, что столь дикие результаты убедительно свидетельствуют о недопустимости гипотезы острого угла, упустив тем самым уникальный шанс стать создателем неевклидовой геометрии.

Ему бы предположить, что установленные им свойства, несмотря на их кажущуюся парадоксальность, реализуются на самом деле и характеризуют совершенно иной мир. И кто бы тогда вспоминал сегодня о Лобачевском? Фактически доказав первые теоремы неевклидовой геометрии, Саккери прошел мимо одного из величайших открытий в истории математики.

Одним из крупнейших математиков 18 века был **Иоганн Ламберт**. Среди его результатов отметим, к примеру, доказательство иррациональности чисел π и e , а также логическое исчисление, где предвосхищены многие идеи алгебры Буля, столь важные для оснований математики и теоретической информатики. В своей работе 1766 года Ламберт выводит новые следствия из гипотезы острого угла, т.е. фактически доказывает новые теоремы геометрии Лобачевского. Однако в отличие от Саккери Ламберт понимает, что сама по себе необычность геометрических свойств, сопровождающих гипотезу острого угла, еще не может служить основанием для ее опровержения, а значит, доказательства пятого постулата Евклида, как теоремы. Ошибочность данной гипотезы может быть установлена исключительно в случае ее противоречия другим аксиомам Евклида. Но вот обнаружить подобные противоречия Ламберту не удается. И он открыто признает своё бессилие опровергнуть эту гипотезу...



Казалось бы, до завершающего шага осталось совсем чуть-чуть. Более того, Ламберт даже высказывает блестящую догадку о том, что гипотеза острого угла могла бы быть реализована на поверхности мнимой сферы. Казалось бы, ну вот оно, долгожданное решение проблемы. Указанная гипотеза на самом деле где-то реализуется. А значит, возможна новая геометрия, необычные свойства которой выявили Саккери и Ламберт! Но нет... Этот самый последний шаг так и не был сделан. А в результате геометрия Ламберта так и не появилась, как ранее не состоялась геометрия Саккери.

Начала новой геометрии

Все попытки обоснования пятого постулата Евклида на основе других аксиом, представления ее в качестве теоремы так и окончились ничем. Следовало качественно иначе взглянуть на проблему и признать, наконец, существование новой геометрии с отличным от евклидова набором аксиом. Эту геометрию разработали независимо друг от друга в первой половине 19 века три математических гения – Гаусс, Лобачевский и Бояи.

Среди тех, кто безуспешно пытался найти доказательство пятого постулата Евклида, был венгерский математик Фаркаш Бояи. Его сын, **Янош Бояи** пошел по стопам отца вопреки настоятельным просьбам последнего. Блестящий молодой офицер, он уже в возрасте чуть более двадцати лет приходит к заключению, радикально отличающемуся от того, что писали Саккери и Ламберт. Неудачные попытки опровержения гипотезы острого угла объясняются исключительно тем, что за ней стоит новая геометрия, имеющая такие же права на существования, как и геометрия Евклида. Принципиальным ее отличием от евклидовой является новая форма аксиомы параллельности. В условиях справедливости гипотезы острого угла она звучит так: *"через точку, взятую вне прямой, проходят, по крайней мере, две прямые, параллельные данной"*. Впрочем, допустив существование двух параллельных прямых, мы неминуемо приходим к наличию бесконечного множества таких прямых.



Бояи выявляет свойства, общие для обеих геометрий, и, следовательно, не связанные с использованием той или иной аксиомы параллельности. При этом он вводит понятие *абсолютной геометрии*, для которой справедливы все аксиомы Евклида кроме пятого постулата. А далее описываются те свойства, которые характерны для новой геометрии, но уже не выполняются в геометрии Евклида. В их число вошли как результаты, полученные ранее Саккери и Ламбертом, так и новые оригинальные теоремы. К примеру, он заключает, что в условиях гипотезы острого угла становится разрешимой квадратура круга.

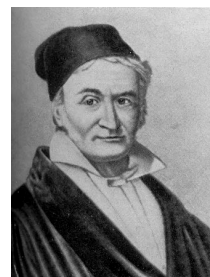
В 1832 г. Янош Бояи публикует свои исследования. Однако чрезвычайная краткость изложения, явная необычность установленных свойств и кажущаяся парадоксальность сделанных выводов никак не способствовала признанию его результатов. Не встретив нигде понимания, натолкнувшись на полное отсутствие интереса к своим работам, Янош Бояи впадает в глубокую депрессию. Желая как-то помочь сыну, старший Бояи направляет эти результаты в Гёттингген своему старому другу, с которым он в свое время учился в университете. А другом этим был Гаусс – признанный лидер математического мира. Будучи крайне замкнутым человеком, Гаусс практически ни с кем не общался. Однако, познакомившись с работой Яноша Бояи, он пишет восторженный ответ, прямо называя сына своего университетского товарища гением первой величины. Казалось бы, вот оно – долгожданное заслуженное признание! Если бы этим всё ограничивалось...

Отдавая должное блестящим результатам Бояи, Гаусс заявляет, что он и сам давно уже пришел к близким выводам. А значит, честь открытия новой геометрии принадлежит вовсе даже не Бояи, человеку практически не известному в математическом мире, а великому Гауссу, почитаемому повсюду. И Бояи приходит к выводу, что Гаусс попросту желает присвоить себе его открытие... А тут еще выходит на немецком языке сочинение Лобачевского под названием *"Геометрические исследования по теории параллельных линий"*, где дается систематическое изложение новой геометрии. И там же отмечается, что русский оригинал опубликован в журнале *"Казанский вестник"* в 1829-30 годах, т.е. еще до выхода в свет работы Бояи. На основе этого Янош Бояи заключает, что никакого Лобачевского в действительности не существует, а под этим псевдонимом скрывается коварный Гаусс, окончательно решивший оттеснить молодого конкурента. Ну а ссылка на более раннюю мифическую публикацию в далекой России (попробуй, проверь!)

окончательно убивает надежду Бояи отстоять свой приоритет. Итог крайне трагичен – гениальный Янош Бояи прекращает свои математические исследования и умирает двадцать лет спустя в полной безвестности.

Итак, мы знаем, что первая работа Лобачевского в данной области была опубликована на несколько лет раньше, чем аналогичный труд Бояи, хотя нет ни малейших сомнений в независимости их исследований. А к какому времени тогда относятся соответствующие публикации Гаусса? Если верить письму, направленному Фаркашу Бояи, Гаусс пришел к неевклидовой геометрии значительно раньше...

Карл Фридрих Гаусс. Он оставил глубочайший вклад практически во всех разделах математики и далеко за ее пределами (вспомним, к примеру, что физики измеряют магнитную индукцию в *гауссах*). Свои первые гениальные открытия он сделал еще в юные годы. Дожив до глубокой старости, Гаусс сохранил ясность ума и продолжал интенсивно и плодотворно работать. Его по праву называли королем математиков. Вне всякого сомнения, он был одним из величайших математиков всех времен и народов. Многие вообще называют Гаусса математиком номер один за всю историю человечества... Так вот, великий Карл Фридрих Гаусс... вообще не опубликовал ни одной работы по новой геометрии...



Так, может быть, опасения Бояи не были плодом его больного воображения? Нет! Сохранились отдельные черновики, письма Гаусса, датированные самым началом 19 века, из которых однозначно следовало, что уже в то время он отчетливо понимал, что за отказом от пятого постулата Евклида стоит качественно новая геометрия. Гауссу были известны многие ее свойства. Однако, будучи крайне осторожным, мнительным человеком, Гаусс не рискнул опубликовать свои результаты, понимая (и не без основания!), что они не будут поняты и приняты математическим миром. Так было не только с неевклидовой геометрией. Гиперкомплексные числа, эллиптические функции, вариационный метод в математической физике по праву относятся к вершинам математической мысли первой половины 19 века. Всеми этими понятиями владел Гаусс. Но переоткрывать их заново пришлось другим математикам...

Гаусс с великим интересом встретил публикацию работ Лобачевского и Бояи. В своих письмах он давал им высшую оценку. Он даже взялся за изучение русского языка, чтобы только читать работы Лобачевского в оригинале. Но официального отзыва на эти результаты так и не сделал. Придя к неевклидовой геометрии раньше других, Гаусс не только не опубликовал свои труды в этом направлении, но и не дал (хотя бы в черновиках) систематического изложения этой теории, что, несомненно, имелось у Бояи, а тем более, у Лобачевского.

Итак, Бояи свои исследования прекратил, а Гаусс вообще не посчитал нужным развивать свои гениальные идеи. Однако еще оставался Лобачевский...

В отличие от других создателей неевклидовой геометрии **Николай Иванович Лобачевский** всю жизнь упорно продолжал разрабатывать свою теорию и не прекращал борьбы за ее окончательное признание. Им были обнаружены новые удивительные факты. Например, оказалось, что в его геометрии через три точки вне прямой не всегда можно провести окружность. Если у Евклида на плоскости любые две прямые либо пересекаются, либо параллельны, то у Лобачевского возможен еще и третий вариант – прямые могут оказаться расходящимися и не пересекаться, не будучи параллельными. Пытаясь сделать теорию как можно более полной, Лобачевский вводит в своей геометрии систему координат, описывает соответствующий вариант тригонометрических функций, указывает способ вычисления расстояния. Он не ограничивается плоским случаем, рассматривая трехмерный вариант своей геометрии. И, хотя нельзя не отдать должное результатам



Гаусса и Бояи, новая геометрия по праву получила впоследствии название *геометрии Лобачевского*.

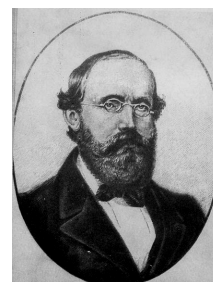
Лобачевского волнуют также практическое применение своих результатов. И он пользуется этим аппаратом для вычисления интегралов, а также в астрономических наблюдениях. Для Лобачевского новая геометрия – не математическая абстракция, а объективная реальность. В частности, он задается вопросом о том, какой геометрии соответствует окружающее нас физическое пространство? Он пытается получить окончательный ответ с помощью эксперимента. Любопытно, что независимо от него и Гаусс попробовал измерить с помощью геодезических приборов сумму углов в треугольнике, образованном вершинами трех холмов, удаленных друг от друга на десятки километров. Однако установленные отклонения от евклидовой геометрии не выходили за пределы погрешности измерительной аппаратуры. Кстати, много лет спустя было установлено, что пространство скоростей специальной теории относительности подчиняется законам геометрии Лобачевского.

Судьба всех трех создателей неевклидовой геометрии по-своему трагична. Бояи вообще оказался сломленным, не получив никакого признания при жизни. Заслуги Гаусса, казалось бы, ни у кого не вызывали сомнения. Однако он замкнулся в себе и так и не рискнул предъявить миру многие свои выдающиеся открытия. Лобачевский, на первый взгляд, не должен бы жаловаться на судьбу. Он был вполне уважаемым человеком. Работал сначала деканом, а затем и ректором Казанского университета, причем оставался на последнем посту двадцать лет. И все же ему явно не хватало научного общения. Открытия его так и не получили достойного признания. В надежде как-то изменить ситуацию он получал всё новые и новые результаты. Однако работы эти, в сущности, никого не волновали. Он не мог, как Гаусс, выдвинуть одну идею, и тут же браться за новую. У него не было достойных учеников, способных взять на себя проработку технических деталей возводимой теории. Всё приходилось делать самому... К тому же слишком много времени отнимала административная работа...

Лобачевский. Гаусс. Бояи. Их трагизм был в том, что они явно опередили свое время... Однако время шло. И в математическом мире назревали какие-то изменения...

Геометрия или геометрии?

А вот **Бернхарду Риману** повезло... Он появился в нужное время и в нужном месте. Он учился в знаменитом Гёттингенском университете. Ему довелось слушать лекции Гаусса. Его учителем и другом стал Петер Лежен Дирихле, первоклассный математик, прославившийся своими блестящими работами в теории чисел и математической физике. Не случайно после смерти Гаусса его место было предложено занять именно Дирихле. А когда через несколько лет умирает сам Дирихле, у руководства университета уже не было никаких сомнений в том, кто должен стать его приемником – конечно же, молодой Риман! В распоряжении Римана были работы Лобачевского и Бояи, а впоследствии – и весь архив Гаусса. Уже ранние работы Римана получили безоговорочное признание его прославленных учителей. А после блистательной защиты докторской диссертации в 1851 г. стало окончательно ясно, что в математическом мире зажглась ярчайшая звезда.



Подобно Гауссу, Риман успешно работал едва ли не во всех разделах математики. Не обошел он своим вниманием и геометрию. Прежде всего, Риман задается вопросом: а не слишком ли поспешили Саккери и его последователи отказаться от гипотезы тупого угла? А что если принять такую форму аксиомы о параллельности: *"через точку, взятую вне прямой, не проходит ни одной прямой, параллельной данной"*. Это означает, что любые две прямые на плоскости пересекаются. Да, конечно, такое свойство вступает в противоречие не только с пятым постулатом Евклида, но и с другими его аксиомами. Это ничего... Мы

их тоже немного подкорректируем! Лишь бы только новая форма аксиомы параллельности ничему не противоречила... И в результате в дополнение к уже известным геометриям Евклида и Лобачевского на свет появилась новая геометрия, которая впоследствии по понятным причинам получила название *геометрии Римана*.

Эта новая геометрия по своим свойствам оказалась не менее удивительной, чем геометрия Лобачевского. У Евклида и Лобачевского порядок точек на прямой является линейным. Имея прямую в качестве координатной оси, всегда можно для любых двух точек на этой прямой выбрать точку с большей координатой. А вот в геометрии Римана порядок точек на прямой оказывается циклическим, напоминая расположение точек на окружности. Если в геометриях Евклида и Лобачевского каждая прямая на плоскости разбивает эту плоскость на две части, то у Римана это не так. Согласно Риману, пространство является безграничным (куда бы мы не двигались, мы никогда не встретим его границ), но не бесконечным и в определенном смысле подобно поверхности шара.

Открыв новый вариант неевклидовой геометрии, Риман идет дальше и задается вопросом, чем же в действительности различаются все три геометрии? Ключевым здесь оказывается понятие *кривизны* – величины, характеризующей степень отклонения кривой или поверхности от, соответственно, прямой и плоскости. Чем сильнее кривая отличается от прямой, тем выше у нее кривизна. Это понятие изучается в дифференциальной геометрии – направления, лежащего на стыке геометрии и математического анализа. Так вот, Риман отмечает, что рассматриваемые геометрии различаются знаком кривизны: для геометрии Лобачевского характерна отрицательная кривизна, для геометрии Римана – положительная, а для геометрии Евклида – нулевая. Тем самым разрабатывается единый аппарат для описания всех трех типов геометрий. А затем следует новый вопрос: что же объединяет эти геометрии? И на него был дан исчерпывающий ответ – оказывается, все они характеризуются тем обстоятельством, что в малой области любое свойство в них практически неотличимо от аналогичного свойства в евклидовой геометрии.

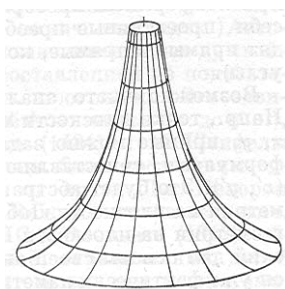
Революционные идеи Римана впоследствии были взяты на вооружение Эйнштейном при разработке общей теории относительности. Согласно Эйнштейну гравитация обусловлена тем обстоятельством, что все тела искривляют вокруг себя пространство. При этом, чем массивнее тело, тем сильнее искривлено пространство. Характерно, что в малой области эти эффекты практически никак не сказываются. Тем самым всё выглядит именно так, как писал Риман. Более того, в современной космологии вся Вселенная представляется безграничной, но не бесконечной. В определенном смысле она оказывается подобной сфере с той лишь разницей, что сферическая поверхность двумерна и замкнута в третьем измерении, а Вселенная сама по себе трехмерна, но замкнута в четвертом измерении.

Кроме того, Риман ввел понятие *метрики*, позволяющей оценить расстояние между какими-либо объектами в пространстве. При искривлении пространства расстояния между точками меняются: чем сильнее кривизна, тем сильнее искажаются расстояния. А еще Риману принадлежит концепция многомерного пространства, имеющего произвольное число измерений, что также нашло свое применение во многих областях физики и математики. Наконец, Риман показал, что в малой области поверхности в его геометрии реализуются те же свойства, что и на сферической поверхности. Таким образом, любой результат, сформулированный для поверхности Римана, имеет аналог на сфере – реальном объекте евклидова пространства. Отсюда следовала непротиворечивость геометрии Римана при условии, что таковой является геометрия Евклида.

Умер Риман в 39 лет. Трудно сказать, где бы сейчас находилась математика, доживи он до глубокой старости, как наиболее близкие ему по масштабу математики – Эйлер, Гаусс и Гильберт, которые до конца жизни не прекращали совершать грандиозные научные открытия...

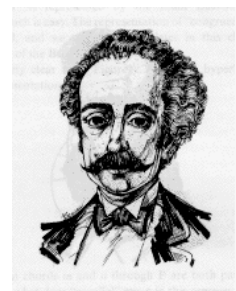
После данного Риманом доказательства непротиворечивости его геометрии стало отчетливо ясно, что необходим аналогичный результат и для геометрии Лобачевского. Ведь математическая теория только тогда получает право на существование, когда есть

полная уверенность в том, что она не имеет внутренних противоречий. Не оттого ли Гаусс остерегался публиковать свои разработки, а Лобачевский до самой смерти выводил все новые следствия из своих аксиом, что оба они интуитивно чувствовали, что их результаты не могут еще считаться в полной степени обоснованными?



Риману удалось обосновать свою геометрию, найдя для нее модель в обычном евклидовом пространстве. А почему бы не найти аналогичную интерпретацию и для геометрии Лобачевского? Ведь показал же Риман, что все три геометрии в определенном смысле являются родственными! И вот в 1868 году итальянский математик **Эудженьо Бельтрами** показывает, что плоскость Лобачевского в малой области реализуется на *псевдосфере* – поверхности, получаемой в результате вращения

специальной кривой, называемой трактрисой (см. рисунок). А это значит, что любая теорема геометрии Лобачевского на плоскости может быть переформулирована как результат на псевдосфере, являющейся заурядным объектом евклидова пространства. Тем самым геометрия Лобачевского оказывается непротиворечивой, если таковой будет евклидова геометрия. А поскольку последнее свойство сомнений не вызывало, Бельтрами заключает, что в геометрии Лобачевского никакие противоречия наверняка невозможны. Тем самым отпадают последние сомнения в достоверности результатов Лобачевского. Новая геометрия получила, наконец, долгожданное признание. Кстати, в 1901 году Гильберт показывает, что в евклидовом пространстве не может существовать регулярная поверхность, геометрия которой совпадает с геометрией всей плоскости Лобачевского. Тем самым то обстоятельство, что конструкция Бельтрами моделирует геометрию Лобачевского только в малой области, далеко не случайно.



Давид Гильберт. Крупнейший математик 20 века. Он был, по-видимому, последним человеком, которого практически все специалисты безоговорочно признают великим математиком. Работал он в Гёттингене, как Гаусс и Риман, с которыми его вполне можно сравнивать как по широте исследуемых проблем, так и по масштабу полученных результатов. Автор знаменитых *проблем Гильберта*, определивших важнейшие направления развития математики в 20 веке и не утративших своей актуальности в наше время. А еще он вывел основные уравнения общей теории относительности независимо от Эйнштейна и практически одновременно с ним. Не случайно несколько его сотрудников стали впоследствии лауреатами нобелевской премии по физике.

В 1899 году Гильберт публикует грандиозный труд "*Основания геометрии*", в которой подводится итоги долгого пути развития геометрии. Отталкиваясь о "*Начал*" Евклида, он заново осуществляет логическое построение геометрии. В основу выбора системы аксиомы закладываются принципы независимости, непротиворечивости и полноты. *Независимость* аксиом означает, что никакая из них не может быть получена как следствие других аксиом. Так, за попытками доказательства пятого постулата Евклида фактически стояли сомнения в независимости его аксиом. Гениальность Евклида в высшей степени проявилась в том, что он сумел понять, что его пятый постулат независим от других аксиом, а значит, по праву является самостоятельной аксиомой. *Непротиворечивость* аксиом предполагает что, не существует утверждения, основанного на понятиях данной теории, которое с равным основанием доказывается и опровергается с помощью имеющихся аксиом. В частности, безоговорочное признание геометрии Лобачевского пришло лишь после того, как Бельтрами показал, что она непротиворечива постольку, поскольку непротиворечива геометрия Евклида. Наконец, *полнота* аксиом состоит в том, что любое высказывание, осмысленное в рамках данной теории, должно быть непременно доказано или



опровергнуто с помощью выбранных аксиом. Впоследствии Гильберт предпринял попытку распространить указанные принципы на математику в целом. Более того, одна из двадцати трех проблем Гильберта предполагала аксиоматизацию физики...

Так вот, Гильберт показал, что предложенная Евклидом система аксиом этим требованиям, вообще говоря, не удовлетворяет. Нет, он не обнаружил там противоречий. Но вот по части полноты... И Гильберт предлагает свою систему аксиом, близкую к евклидовой, но лишенную ее недостатков. Полнота и независимость предлагаемых аксиом евклидовой геометрии здесь строго доказана. Ну а их непротиворечивость в конечном итоге была сведена к непротиворечивости обычной арифметики: если там не возникает противоречий, то не будет противоречий и в евклидовой геометрии в интерпретации Гильберта... Однако этим Гильберт далеко не ограничивается.

Пятый постулат Евклида является обычной аксиомой, не хуже и не лучше остальных. Мы знаем, что замена его на другие аксиомы приводит к новым геометриям Лобачевского и Римана, столь же законным, что и геометрия Евклида. Так почему бы не попробовать провести аналогичные процедуры с другими аксиомами? Проводил же модификацию других аксиом Риман, чтобы оправдать свой вариант аксиомы параллельности! И Гильберт начинает методически менять одни аксиомы на другие, выводит удивительные следствия из того или иного сочетания геометрических аксиом. И на свет рождаются новые неевклидовы геометрии, качественно отличающиеся от уже известных, но столь же логически осмысленные. К числу таковых относится, к примеру, *неархимедова геометрия*, где не предполагается выполнение выдвинутой Евдоксом аксиомы Архимеда и тем самым не реализуются привычные свойства непрерывности.

Еще одна радикальная идея Гильберта связана с понятием размерности. Если Риман предложил размерность пространства считать произвольной величиной, то Гильберт и здесь идет еще дальше. А почему бы не допустить бесконечную размерность пространства? Если на плоскости объект (точка) имеет две координаты, в обычном пространстве – три, а в рассмотренном Риманом n -мерном пространстве – n , то в *бесконечномерном пространстве* Гильберта для характеристики объекта требуется уже бесконечное число параметров. Из этой идеи Гильберта родилось новое математическое направление – *функциональный анализ*, в котором функция интерпретируется как точка в бесконечномерном пространстве подобно тому, как вектор представляется точкой в пространстве соответствующей размерности. В результате наглядные геометрические конструкции нашли свое применение практически во всех разделах математики и далеко за ее пределами.

После работ Гильберта стало отчетливо ясно, что геометрия неисчерпаема, а геометрические идеи пронизывают всю математику. Существует великое множество геометрий, существенно различающихся по своим свойствам, но имеющих такое же право на существование, как геометрии Евклида и Лобачевского. К такому итогу пришла математика, следуя по пути, указанному Евклидом почти две с половиной тысячи лет назад.

Литература

1. Белл Э. Т. Творцы математики. Предшественники современной математики. – М., Просвещение, 1979. – 255 с.
2. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М., ИЛ, 1963. – 292 с.
3. Ван-дер-Варден Л. Пробуждающаяся наука. – М., ИЛ. – 1959.
4. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. – М., Гостехиздат. – 1955. – 302 с.
5. Комацу М. Многообразие геометрии. – М., Знание, 1981. – 208 с.
6. Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии. – М., Наука, 1976. – 413 с.
7. Чистяков В. Д. Беседы о геометрии Лобачевского. – Минск, Вышэйшая школа, 1973. – 190 с.

Можно добавить

В квантовой механике появляется понятие минимальной длины. Это означает, что там нарушена аксиома Архимеда. Отсюда путь в p -адические числа.

Владимиров. Что такое мат.физика

Надо проверить формулировку аксиомы параллельности: одну или не более одной
Мартин Бартельс, у которого в Казани учился Лобачевский, был учителем Гаусса