

С. Я. Серовайский
ВЕЧНЫЕ ТАЙНЫ УРАВНЕНИЙ
Математика. Республиканский научно-методический журнал.
2008, №№ 4-6

*Алгебра щедра: она нередко дает больше,
чем от нее можно было бы требовать.*

Жан Д'АЛАМБЕР

Среди многочисленных разделов математики особую роль занимает алгебра. Что может сравниться с ней великим многообразием форм, удивительной красотой конструкций и все возрастающим влиянием практически на все направления математической мысли. Со временем всё более отчетливо вырисовывается фундаментальная организующая роль алгебры для физики, да и для многих других наук. Современная алгебра – это наука об объектах произвольной природы, наделенных тем или иными операциями типа сложения или умножения. Однако такой взгляд сложился сравнительно недавно. А зародилась и долгое время развивалась алгебра как теория уравнений. В этом небольшом популярном очерке рассказывается о том, как это было.

Зарождение алгебры

Уже в глубокой древности люди умело использовали числа и геометрические построения. По мере развития цивилизации совершенствовались необходимые знания и навыки. Однако на числа и фигуры упорно продолжали смотреть исключительно как на полезные средства для решения конкретных прикладных задач... Но более двух с половиной тысяч лет назад в истории человечества произошло что-то качественно новое...

Великие мудрецы Древней Греции взглянули на мир откуда-то сверху. И вот в шестом веке до нашей эры Пифагор провозгласил, что всё, происходящее вокруг нас, сводится к числам. А, стало быть, числа следует изучать сами по себе, а не только пользоваться ими для практических вычислений. И в итоге появилась математика и ее первый раздел – арифметика (теория чисел). А два века спустя Евклид систематизировал все известные наработки в области геометрических объектов и разработал свою удивительно стройную теорию. А чуть раньше гениальные прозрения Евдокса ввели в математику совершенно иные конструкции. От этих работ, в значительной степени развитых Архимедом, берет свое начало математический анализ... Ну а как же алгебра?

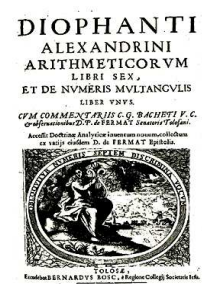
Издавна люди обратили внимание на то, что между различными величинами, встречающимися в повседневной жизни, существует какая-то причинно-следственная связь. Некоторые из этих величин поддавались непосредственному измерению. А вот другие, напротив, могли быть определены исключительно косвенно – посредством указанной связи. С математической точки зрения, соотношения между известными и неизвестными величинами представляли собой *уравнения*. Решение подобных задач сводилось к непосредственному определению этих самых неизвестных – *корней* уравнения, к выражению их через известные параметры – *коэффициенты*. Такие проблемы возникали повсеместно. Естественно, люди их решали. Но вот осознание необходимости разработки единой самостоятельной теории для решения разнообразных уравнений, возникающих в жизни, пришло удивительно поздно. Сменялись века. Уже ни одно поколение математиков уверенно развивало аппарат геометрии, арифметики и анализа. Но алгебры как таковой еще не было...

Почему же так получилось? Казалось бы, еще во втором тысячелетии до нашей эры мыслители Вавилона достаточно умело решали простейшие алгебраические уравнения. Шедшие вслед за ними греки, попытались совместить навыки вавилонской алгебры с учением Пифагора о числе. Однако они столкнулись с поразившей их ситуацией, когда гипотенуза равнобедренного треугольника оказалась несоизмерима с его катетами. На

алгебраическом языке это означало, что решение $x^2 = 2$ не является ни целым числом, ни хотя бы отношением двух целых чисел. А ведь только такие объекты в то время считались числами! Но, с другой стороны, указанная гипотенуза реально существует, а значит, на уровне геометрии проблема эта всё-таки решается. И тогда греки отказываются от алгебраической традиции Вавилона и в дальнейшем решают уравнения исключительно геометрическими средствами. Рождение же самой алгебры оказалось отложенным на многие сотни лет...

Шел третий век нашей эры. Давно уже Греция утратила самостоятельность, став одной из многочисленных провинций могущественной Римской империи. В далеком прошлом остались вершины древнегреческой культуры – высокая философия Платона и Аристотеля, пронзительные трагедии Еврипида, Софокла и Эсхила, божественные скульптуры Фидия и Праксителя... И лишь в отдаленной Александрии на территории Египта, всё еще ярко горел последний огонь великой цивилизации древних греков. Когда-то там работал Евклид, учился Архимед... С Александрией связаны имена таких блистательных математиков, как Аполлоний и Эратосфен, Герон и Птолемей. Последним в этом ряду (последним по времени, но никак не по уровню математических результатов) был Диофант.

Диофант. Одна из наиболее ярких и наиболее загадочных фигур античной математики. У него, как будто бы, и не было ни прямых предшественников, ни явных последователей. Его главный труд "*Арифметика*" по праву считается одним из величайших творений за всю историю математики. Там были впервые собраны и классифицированы разнообразные уравнения с подробным изложением методов их решений. Решительно порывая с устоявшейся традицией, восходящей к Евдоксу и Евклиду, и во многом возвращаясь к забытым творениям вавилонских мудрецов, Диофант отказывается от каких-либо геометрических конструкций и рассматривает уравнения сами по себе, т.е. как непосредственную цель исследования. Так появилась алгебра.



"Арифметика"
Диофанта

Конечно же, отдельные уравнения решались и раньше. Однако лишь у Диофанта дается систематическое изложение методов их решения. Он умело классифицирует уравнения, различая их по числу неизвестных и по *степени* неизвестных величин: *линейные* (первого степени), *квадратичные* (второй степени), *кубические* (третьей степени) и т.д. Разрабатывая общие принципы решения уравнений, он вводит знак равенства, индексное обозначение степени (практически современное), специальное обозначение дроби и отрицательных чисел. При изложении методов решения уравнений описываются правила сокращения общих членов равенства, переноса членов из одной части уравнения в другую, приведения подобных членов, нахождение других решений уравнения, когда одно уже известно. Эти элементарные приемы, знакомые сегодня каждому школьнику, кажутся очевидными. Однако до Диофанта ничего подобного не было. Диофант без труда решает линейные уравнения и системы, описывает методы решения квадратных уравнений. В его книге встречаются отдельные уравнения третьей и четвертой степени. Отметим, что Диофанта интересуют лишь целые или дробные (т.е. рациональные) решения, причем непременно положительные. Уравнения, решение которых ищется в классе целых или рациональных чисел, впоследствии были названы *диофантовыми*.

К сожалению, у Диофанта не нашлось прямых последователей. Он слишком опередил свое время. К тому же его жизнь приходилась на период упадка Рима. Больше уже не будет античных математиков такого масштаба. Но дело Диофанта продолжили лучшие математики Востока.

На Востоке

Тысячелетиями караванные пути связывали Египет с Индией. После крушения Римской империи Индия превращается в центр мировой культуры. Индийские математики уверенно пошли по пути, указанному Диофантом, а решение уравнений в

целых числах стало одним из ведущих научных направлений. И если Диофант ограничивался рассмотрением только положительных решений уравнения, то индийские математики считали вполне приемлемыми и отрицательные корни. Значительным прорывом вперед оказалось вычисление иррациональных корней квадратного уравнения индийским математиком **Брахмагуптой**, жившем в 7 веке.

Здесь намечается пока еще слабо уловимый, но неуклонно возрастающий разрыв между диофантовыми уравнениями и, собственно, *алгебраическими уравнениями*. Решение первых ищется в целых или рациональных числах, в то время как для вторых допускаются действительные и даже комплексные корни. Поскольку действительных чисел (а тем более, комплексных) невообразимо больше, чем рациональных, поиск исключительно рациональных решений оказывается существенно более сложной задачей. В диофантовых уравнениях число неизвестных обычно превышает число уравнений. А иначе трудно добиться существования рационального корня. В обычных же алгебраических уравнениях в увеличении числа неизвестных нет особой необходимости, поскольку решение ищется из существенно более широкого класса. В современной математике диофантовы уравнения принято относить уже не к алгебре, а к теории чисел. Не зря именно под влиянием "*Арифметики*" Диофанта Ферма, а вслед за ним – Эйлер и другие математики, заложили основы теории чисел. Однако эти вопросы находятся в стороне от интересующей нас теории алгебраических уравнений.

Главная заслуга индийской математики – введение десятичной системы счисления и нуля, без которого эта система просто немыслима. Позиционная система счисления в значительной степени стимулировала развитие алгебры, поскольку отсутствие достаточно общей и гибкой формы записи чисел препятствовало разработке универсальных методов решения уравнений. Решающие шаги в этом направлении были сделаны математиками Ближнего и Среднего Востока, объединенного Арабским халифатом.

Арабских мыслителей отличал здоровый практицизм и умение использовать достижения других народов. Философия Аристотеля и геометрия Евклида, астрономия Птолемея и медицина Гиппократы, учение Диофанта и индийская система счисления... Всё это переводилось на арабский язык, комментировалось и совершенствовалось арабскими мудрецами. В отличие от своих греческих и индийских коллег, арабских математиков больше привлекали не абстрактные проблемы, а решение насущных прикладных задач. В этой связи поиск решения исключительно в виде дроби, а тем более, целого числа, представлялся им неоправданным ограничением. А введение дополнительных неизвестных с целью нахождения решения (как правило, не единственного) именно в указанной форме, казалось надуманным, оторванным от жизни приемом. Так диофантовы уравнения были отодвинуты куда-то в стороне, а на передний план впервые вышли, собственно, алгебраические уравнения...

Крупнейшим центром мировой культуры становится Багдад. Там в 9 веке работал выходец из Средней Азии **Мухаммед аль-Хорезми**. Это из его трактата "*Об индийском счете*" европейцы впоследствии узнали о десятичной системе, которую они называли арабской. Ну а его главный труд "*Китаб аль-джебр валь-мукабала*" стал одним из наиболее известных математических трактатов. Само слово "*аль-джебр*", обозначающее процедуру переноса вычитаемых членов равенства в другую его часть, впоследствии трансформировавшееся в "*алгебру*", стало названием всего раздела математики. Более того, термин "*алгоритм*", играющий ключевую роль в вычислительной



Мухаммед аль-Хорезми
787-850

математике, математической логике и информатике, происходит от имени аль-Хорезми.

Собственно, трактат аль-Хорезми и представляет собой свод алгоритмов решения линейных и квадратных уравнений, как правило, восходящих к конкретным приложениям. Это было практическое руководство, позволяющее путем цепочки четко расписанных действий найти решение задачи. Прежде всего, аль-Хорезми классифицирует уравнения

по методам их решения. Ну а затем для каждого выделенного класса следуют четкие указания, что конкретно следует предпринять, чтобы найти корень уравнения, т.е., как бы мы сейчас сказали, дается описание алгоритма решения задачи. Аль-Хорезми отмечает двузначность квадратного корня, вследствие чего, к примеру, уравнение $x^2 = 1$ имеет два решения: 1 и -1 . Мнимые числа ему не известны. Поэтому некоторые квадратные уравнения, например, $x^2 = -1$ остаются за пределами его исследований.



Омар Хайям
1048 – 1131

Среди последователей аль-Хорезми отметим **Омара Хайяма**, гениального персидского поэта и великого математика, который жил в 11-12 веках. Из математических трудов Хайяма выделяется *"Трактат об истолковании темных положений у Евклида"*, где проводится глубокий анализ пятого постулата Евклида. Еще большую известность получил *"Трактат о доказательствах проблем аль-джебры и аль-мукабалы"*. Если аль-Хорезми работал с квадратными уравнениями, то Хайям обратился к существенно более сложным *кубическим уравнениям*. Он не дал их полную теорию – до этого математике предстояло пройти

еще ни одну сотню лет. Но, будучи блестящим геометром, он отчетливо ощущал глубокую связь между геометрией и алгеброй, во многом предвосхищая идеи Декарта и Ферма, живших более чем через полтысячи лет после него. Развивая идеи греков, Омар Хайям предложил геометрический метод решения кубических уравнений. Он оценивает число положительных корней, а также указывает способ приближенного решения задачи. Труды Омара Хайяма в течение длительного времени оставались вершиной развития алгебры. Кстати, именно он стал использовать термин *"алгебра"* в качестве названия данного раздела математики.

Значительное продвижение математиками Ближнего и Среднего Востока теории уравнений по сравнению с их древнегреческими и индийскими предшественниками в значительной степени было предопределено практической направленностью их исследований. Однако для нового прорыва требовалось уже совершенствование самого математического аппарата... А тем временем центр математического мира постепенно перемещается в Европу, в Италию, где начиналась эпоха Возрождения...

Возрождение

Аппенинский полуостров глубоко вдается в Средиземное море. Italianские купцы издавна торговали с народами Востока. А назад они везли не только шелка, пряности и алмазы, но и книги. Бесценные творения греков, индийцев и арабов переводились на латынь. Европа медленно оживала после тысячелетней спячки. Начиналась бурная эпоха Возрождения.

Италия. Родина поэтов Данте и Петрарки, писателя Боккаччо и мыслителя Макиавелли, художников Леонардо да Винчи и Рафаэля, Микеланджело и Тициана, путешественников Колумба и Америго Веспуччи... Там и появились прямые наследники математики мусульманского Востока. Уже в начале 13 века **Леонардо Фибоначчи**, публикует объемистый труд *"Книга абака"*. Помимо глубокого анализа трудов арабских и индийских математиков Фибоначчи приводит и собственные оригинальные результаты – правила преобразования кубических корней и способы их приближенного вычисления, а также анализ ряда кубических уравнений, оставшихся не исследованными Омаром Хайямом и его последователями. А в конце 15 века крупнейший математик того времени Лука Пачиоли, подводя итоги минувшего, с сожалением заключает, что алгебра так и не дала общего метода решения кубических уравнений подобно тому, как геометрия за два тысячелетия так и не смогла решить проблему квадратуры круга.

Выводы Пачиоли не внушали оптимизма. Но уже его младший современник профессор Болонского университета **Сципион дель Ферро** приходит к решению кубического уравнения $x^3 + ax = b$ с произвольными значениями параметров a и b . Это было началом

реши́тельного прорыва в алгебре. Однако, дель Ферро, тщательно оберегая свое открытие от постороннего глаза, отказался сообщить кому-либо о своих результатах...

В то время в Италии были в моде удивительные поединки. Соперники пытались превзойти друг друга в красноречии и знании трудов церковных авторитетов. Однако зачастую



Никколо Тарталья
1499 – 1557

они предлагали противнику решить серию каверзных математических задач. Естественно, победитель приобретал славу и любовь сограждан... Один из таких поединков, состоявшийся в 1535 году, привлек особое внимание. Еще бы! В нем собирался принять участие сам **Никколо Тарталья**. Будучи прямым предшественником Галилея, Тарталья открыл, что брошенное тело летит по параболе. Он же указал, что для того, чтобы добиться максимальной дальности полета тела, его следует запустить под углом в 45^0 . Обладая обширными познаниями и богатым опытом участия в подобных поединках, Тарталья не сомневался в легкой победе над своим молодым соперником. Однако незадолго до намеченного дня он получает известие

о том, что его противник приходится зятем тому самому дель Ферро и владеет таинственным способом решения уравнений. За считанные дни Тарталья сам находит общий вид решения уравнения. Его безоговорочная победа в поединке показала, что в анализе кубических уравнений он продвинулся дальше своего предшественника.

Подобно дель Ферро, Тарталья отклоняет многочисленные просьбы обнародовать свои результаты. Но, в конце концов, он не устоял и поделился своими открытиями с неким **Джероламо Кардано**. Тот дал страшную клятву не разглашать результаты Тарталья... Однако в 1545 году Кардано издает книгу "*Высокое искусство*", в которую он включает метод Тарталья решения кубического уравнения. Справедливости ради отметим, что, нарушив клятву, Кардано честно заявляет, что автором этих результатов является именно Тарталья. Тем не менее, формула решения кубического уравнения впоследствии была названа *формулой Кардано*...



Джероламо Кардано
1501 – 1576

Не следует, однако, думать, что Кардано в своей книге ограничился изложением лишь чужих выводов. Он дает там решение кубического уравнения общего вида $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Кардано первым использует понятие *кратного корня*. Это означает, к примеру, что квадратное уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$ имеет не единственный корень $x = 1$, а два равных между собой решения, т.е. указанный корень имеет кратность 2. Это обстоятельство чрезвычайно важно для основной теоремы алгебры, о которой еще будет позднее. Ну и, наконец, Кардано приходит к понятию *комплексного числа*.

Среди последователей Кардано следует упомянуть его ближайшего ученика **Лудовико Феррари**, решившего уравнение четвертой степени. И еще был **Раффаэле Бомбелли**. Если Кардано, натолкнувшись на комплексные числа, не принимает их всерьез, считая их вымышленными, т.е. *мнимыми*, то для Бомбелли это реально существующие объекты. Он тщательно исследует их свойства и провозглашает равноправие между действительными и комплексными корнями. В результате теория алгебраических уравнений до четвертого порядка приобрела законченный вид... Эпоха Возрождения завершилась.

Королевский советник

К концу 16 века Италия уже во многом утратила свои позиции. Значительная ее часть оказывается под властью Испании – крупнейшей мировой державы того времени... Как не похожи эти две средиземноморских страны. Италия подобно Древней Греции представляла собой множество мелких княжеств, постоянно враждующих между собой. Ну а Испания – сродни Древнему Риму. Такая же мощная империя, стремящаяся к мировому господству. Только вот почему-то искусство и наука в империях не очень-то

процветают. Рим не дал своего Платона, Евклида или Эсхила. А в Испании не было никого, кто мог бы подняться до уровня Данте, Микеланджело и Леонардо да Винчи. Сервантес и Веласкес придут позднее... И математиков уровня Тартальи, Кардано и Бомбелли в Испании тоже нет. С другой стороны, могучий испанский флот не имеет себе равных. Ну а на суше Испании пока еще упорно противостоит Франция, в которой недавно пришел к власти умный и энергичный король Генрих IV.

Война между Испанией и Францией носит затяжной характер. В такой ситуации многое решает разведка. Испанский король спокоен. Его заверили, что никому не под силу расшифровать его секретные донесения. Однако с некоторых пор все сокровенные тайны мадридского двора становятся известны противнику, вследствие чего французы смогли переломить ход войны в свою пользу. Испанский король в отчаянии пишет гневное послание папе римскому: короля Генриха следует отлучить от церкви, поскольку только с помощью дьявола он мог расшифровать тайную переписку испанцев. Однако французам помогал не дьявол, а один штабной офицер, личный советник короля. Впрочем, из-за придворных интриг он вскоре потерял место при дворе и полностью посвятил себя математическим исследованиям. А в результате теория уравнений, да и математика в целом вступили на новый этап своего развития. Его звали **Франсуа Виет**.

Прекрасно знакомый с работами итальянских математиков, Виет решил разработать единую теорию алгебраических уравнений. И он осознал, что таковая невозможна без специальной математической символики. И Виет использует буквенные обозначения как неизвестных величин и коэффициентов уравнения, применяет скобки при записи арифметических выражений. Трудно себе представить, как можно было проводить математические исследования без привычного нам языка формул. Кое-какие элементы символики были у Кардано и Бомбелли, и даже у Диофанта. Но они носили эпизодический характер.



Франсуа Виет
1540 – 1603

Все рассуждения проводились исключительно словесно, сопровождаясь при необходимости соответствующими чертежами. И лишь для Виета емкие четкие формулы становятся основой математических выкладок.

Обладая несравненно более совершенным инструментом, Виет продвинулся существенно дальше своих предшественников. Если их результаты оставались в значительной степени разрозненными, то он разработал единую теорию решения алгебраических уравнений до четвертой степени включительно. Пытался Виет решить и уравнение пятой степени. Но как-то не получилось... Однако он всё же смог привести пример одного такого уравнения, имеющего пять решений.

А кто не слышал про знаменитую *теорему Виета*, позволяющую выразить коэффициенты уравнения через его корни? Так ведь она справедлива для уравнения $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$. Степень уравнения n здесь произвольна. Задачи столь общего вида еще никем не рассматривались. Наводит на определенные мысли и тот факт, что n корней уравнения позволяет восстановить все n его коэффициентов, т.е. число корней алгебраического уравнения напрямую связано с его степенью.

Мы не будем здесь говорить о блестящих результатах Виета в других математических дисциплинах. Отметим, что лишь через двести с лишним лет математика смогла превзойти тот уровень, на который он вывел алгебру. И для этого потребовались поистине титанические усилия величайших математиков мира.

Время титанов

После Виета в теории уравнений остались не решенными две проблемы. Стоило Кардано и его предшественникам подобрать ключ к решению кубического уравнения, как тут же Феррари указал способ решения уравнений четвертой степени. Казалось, так же быстро будет найдено решение уравнения пятой степени. Если переход от степени 3 к

степени 4 оказался столь простым, то и выход к следующей степени не должен, как будто, вызывать особых затруднений. Эту задачу просто обязан был решить, если не Бомбелли, то Виет... Но ничего подобного почему-то не произошло...

Но, если не получается формула для решения алгебраических уравнений старших степеней (начиная с пяти), то, быть может, удастся хотя бы оценить количество этих решений. Уже аль-Хорезми знал, что квадратное уравнение имеет два корня. После введения Кардано кратных корней и использования комплексных чисел стало ясно, что кубическое уравнение всегда должно иметь три решения. Ну а Виет говорил про n корней уравнения n -ой степени. Но можно ли строго доказать, что любое алгебраическое уравнение n -ой степени имеет в точности n решений (некоторые из них могут совпадать, имея кратность больше единицы)? Это утверждение, получившее громкое название *основной теоремы алгебры*, пока еще не было обосновано.

Решение уравнения пятой степени, на первый взгляд, казалось более простой задачей. Ведь в основной теореме алгебры говорится об уравнении произвольной степени. Естественно, конкретный случай проще общего. Однако найдя решение, мы автоматически доказываем его существование, в то время как, установив сам факт наличия корня, мы его еще не получаем. В задаче нахождения решения уравнения пятой степени долгое время никто ни мог ничего добавить сверх того, что было получено Виетом. Но каждое поколение математиков упорно пыталось доказать основную теорему алгебры.

Формулировку основной теоремы дал немецкий математик Петер Роте уже через несколько лет после смерти Виета. А вскоре Альбер Жирар и Рене Декарт предприняли отчаянную попытку ее доказательства, но так и не добились успеха. В восемнадцатом веке различные доказательства основной теоремы алгебры дали такие блистательные математики, как Колин Маклорен, Леонард Эйлер, Жозеф Луи Лагранж, Пьер Симон Лаплас. Но их рассуждения не отличались должной строгостью... Ближе других подошел к решению задачи один из крупнейших математиков восемнадцатого века Жан Д'Аламбер. Однако и его доказательство содержало один пробел, а значит, не могло быть признано удовлетворительным. Всё говорило о том, эта проблема так и перейдет в девятнадцатый век... Однако под самый конец века, в 1799 году основная теорема алгебры была-таки, наконец, окончательно доказана. Это сделал **Карл Фридрих Гаусс**, которого по праву называли королем математики.

Его гениальность проявилась уже в детские годы. И до глубокой старости он продолжал свой титанический труд. Чего стоит лишь перечисление научных открытий Гаусса... Он первым пришел к идее неевклидовой геометрии и заложил основы дифференциальной геометрии. Дал интерпретацию комплексных чисел и описал гиперкомплексные числа. Разработал метод наименьших квадратов и теорию ошибок. Предложил метод решения систем линейных алгебраических уравнений (метод Гаусса). Ввел понятие нормального (гауссова) распределения вероятности. А еще были теория квадратичных форм и теория групп, законы взаимности в теории чисел и целые (гауссовы) комплексные числа, правила интерполирования и численного интегрирования, распределение простых чисел, понятия эквивалентности, нижней и верхней грани, фактор-множество и многое, многое другое... Он был выдающимся астрономом, долгие годы возглавляя обсерваторию в Гёттингене. Ему принадлежат блестящие открытия в физике: достаточно упомянуть теорию тяготения, теорию магнетизма (вспомним, что магнитную индукцию измеряют в гауссах), вариационные принципы, теорию капиллярности...

Основную теорему алгебры Гаусс считал одним из главных дел своей жизни. Дав ее полное доказательство в молодые годы, он еще не раз возвращался к ней в дальнейшем. И на свет появлялись качественно новые доказательства. Видимо, что-то его не удовлетворяло в предшествующих рассуждениях, отличающихся, как будто, безупречной



Карл Фридрих Гаусс
1777 – 1855

строгостью. Может быть, ему хотелось обосновать это утверждение чисто алгебраическими средствами, не пользуясь аппаратом математического анализа? Но ведь решение уравнения ищется на множестве комплексных чисел, которые, подобно действительным числам, образуют непрерывный континуум, а значит, сами по себе (в отличие от целых и рациональных чисел) не могут быть определены на основе лишь алгебраических конструкций. Но до осознания этого удивительного факта математике предстояло пройти еще достаточно долгий путь...

Так или иначе, проблема существования решения алгебраического уравнения общего вида была закрыта. Но хотелось бы еще найти формулу, выражающую решение уравнения пятой степени. Прошло уже двести лет со времени выхода в свет работ Виета – и никаких серьезных сдвигов. И вот в конце восемнадцатого века за решение этой проблемы взялся великий французский математик **Жозеф Луи Лагранж**...

Лагранж оставил яркий след практически во всех разделах математики. Он заложил основы вариационного исчисления и теории дифференциальных уравнений. Он вывел формулу конечных приращений, определил двойной и тройной интегралы, обосновал разложение функций в степенной ряд, получил глубокие результаты из теории чисел и теории функций комплексного переменного. Его блистательный труд "*Аналитическая механика*" фактически превратил механику из физической дисциплины в раздел прикладной математики и предопределил повсеместное существование в наше время механико-математических факультетов. Настал черед алгебры...

Итак, дано уравнение $x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$. Его корни должны зависеть от коэффициентов a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , образуя нечто, подобное школьной формуле решения квадратного уравнения. У Лагранжа возникает такая мысль. Вот мы имеем некое выражение, зависящее от параметров, например, $(a_1 + a_2 + a_3)a_4a_5$. А какие перестановки коэффициентов не меняют это выражение? Можно, к примеру, заменить первый из них на второй, второй – на третий, а третий – на первый. В результате получается выражение $(a_2 + a_3 + a_1)a_4a_5$, равное исходному. А еще можно поменять местами четвертый и пятый параметр, и в результате получим $(a_1 + a_2 + a_3)a_5a_4$, т.е., в сущности, то же самое. Если же выполнить сначала одно такое преобразование, называемое *подстановкой*, а потом другое, то непременно получится точно такое же выражение, т.е. в результате *композиции* двух подстановок непременно получится новая подстановка. Так, обозначая первую из определенных выше подстановок через A , вторую – через B , а результат композиции этих преобразований – через $A \bullet B$, мы приходим к выражению $(a_2 + a_3 + a_1)a_5a_4$, равное предыдущему. Если выполнить композицию подстановки $A \bullet B$ с произвольной подстановкой C , то итог будет точно такой же, как если мы возьмем композицию A с подстановкой $B \bullet C$. Существует и тождественная подстановка, когда мы вообще ничего не меняем в данном выражении. Наконец, любой подстановке соответствует *обратная подстановка*: ее композиция с данной подстановкой дает тождественную подстановку. Так, обратной к определенной выше подстановке A является подстановка, состоящая в замене второго коэффициента на первый, третьего – на второй, а первого – на третий. Выражаясь современным математическим языком, мы скажем, что множество всех подстановок с указанной композицией образует *группу*. Любопытно, что к такому же математическому объекту независимо приходит и Гаусс, но в теории чисел.



Жозеф Луи Лагранж
1736 – 1813

Диофант, аль-Хорезми, Тарталья, Виет... Все они решали уравнения путем различных преобразований. Каждое преобразование приводило к новому уравнению со своим набором коэффициентов. Следовательно, целью исследования является такое преобразование коэффициентов уравнения, при котором уравнение станет более простым.

И Лагранж, пытаясь решить уравнение пятой степени, занимается поиском такого преобразования коэффициентов, которое позволило бы понизить его степень. После титанических усилий ему удалось подобрать преобразование, как будто бы обладающее желаемыми свойствами. С его помощью квадратное уравнение сводилось к линейному, кубическое – к квадратному, уравнение четвертой степени – к кубическому. Вся известная теория конкретных алгебраических уравнений естественным образом получалась из конструкций Лагранжа... Вот только после применения преобразования Лагранжа к уравнению пятой степени вместо ожидаемого уравнения четвертой степени получилось уравнение степени шесть. Это был тупик... Почему?

Лагранж и Гаусс. Величайшие математики, навсегда вошедшие в историю человечества. Они страстно желали решить проблему алгебраических уравнений. Они блестяще владели алгебраическим аппаратом и оба вышли на теорию групп, которой было суждено сыграть в этой истории решающую роль. Это были титаны. Казалось бы, кому, как не им, было предначертано судьбой решить эту задачу? Но этого не произошло.

Чтобы найти верный ответ, надо, прежде всего, задать правильный вопрос. А для этого требовалось взглянуть на проблему совершенно иначе. В такой ситуации успех зачастую приходит не к маститым корифеям, а к людям молодым и дерзким, способным решительно сломать установившиеся традиции и усомниться в том, что всем кажется очевидным.

Дерзость юных

Норвежец **Нильс Абель** заинтересовался алгебраическими уравнениями в школьные годы. Самостоятельно изучая работы классиков, он выходит на проблему решения уравнения пятой степени. В 21 год он объявляет о том, что искомое решение найдено. Однако тщательная проверка показала, что в его рассуждениях вкралась ошибка. Что бы сказали в подобной ситуации Гаусс или Лагранж? Я допустил ошибку? Но это не страшно! Надо ее исправить и работать дальше. Надо трудиться. Проблема поставлена – и должна быть решена! Но не так рассуждает молодость. Я не смог решить задачу? Как такое могло произойти? Я просто не мог ее не решить! Но если мне это всё-таки не удалось, значит, задача просто не имеет решения. А иначе я бы ее непременно решил!

Эта мысль может показаться дикой. Как вообще такое могло прийти в голову? Разве Гаусс не доказал, что уравнение пятой степени должно иметь пять решений? Значит, надо направить все силы на поиск соответствующей формулы. Так поступали все – Бомбелли, Виет, Лагранж... Вот только что они пытались найти? Формулу, выражающую зависимость корня уравнения от его коэффициентов, некое подобие школьной формулы решения квадратного уравнения. Туда, как известно, входят коэффициенты, над которыми проводятся соответствующие арифметические операции и процедура извлечения квадратного корня. В формуле Кардано появляется кубический корень, а у Феррари – корень четвертой степени. Решение уравнения пятой степени должно, по идее, включать в себя корень пятой степени и ничего более. Конечно же, искомое решение должно быть выражено через коэффициенты с помощью арифметических операций и корней. Как же иначе? Именно такие решения искали все – и Виет, и Лагранж. Сам термин "*корень*", т.е. решение уравнения, восходит к процедуре извлечения корней, обратной к процедуре возведения в степень неизвестной величины. Ну а максимальная степень искомой величины и является "*степенью*" уравнения – его главной характеристикой. Это же так естественно!

Гаусс убедительно доказал, что решение существует. Но Абель говорит, что решения нет. Здесь вспоминается одна мысль, высказанная Эйнштейном: *"Все знают, что это невозможно. Находится кто-то один, кто этого не знает. Он приходит и делает это"*. Так на чем же основана безумная идея Абеля? У нас есть простенькое уравнение в целых



Нильс Хенрик Абель
1802 – 1829

числах $2x = 6$, и его решением оказывается заурядное целое число $x = 3$. Но вот уже перед нами аналогичное уравнение: $6x = 2$, и ситуация изменилась. Имеет ли оно решение? Нет, если оперировать лишь с целыми числами. Но стоит расширить класс допустимых объектов, включив в него рациональные числа, как мы находим решение $x = 1/3$. Вот задано равенство $a + x = b$, связывающее неизвестную величину x с известными параметрами a и b . Решение этого уравнения определяется по формуле $x = b - a$, выражающей искомое значение через известные величины с помощью арифметической операцией "вычитание". А для уравнения $ax^2 = b$ уже невозможно получить формулу решения на основе одних только арифметических операций. Следует ли из этого, что решение вообще не существует? Нет. Просто к числу допустимых процедур нужно добавить извлечение квадратного корня. Собственно, эта операция и была придумана с той единственной целью, чтобы выразить решения квадратного уравнения или, что аналогично, находить гипотенузу треугольника по известным катетам. Точно также когда-то были искусственно введены дроби исключительно для того, чтобы можно было решать задачи типа честного раздела одного яблока на двух человек, что соответствует решению алгебраического уравнения $2x = 1$.

Нет, Абель нисколько не подвергал сомнению утверждения Гаусса о том, что уравнение пятой степени непременно имеет решение. Он лишь высказал гениальную догадку о том, что не существует решения, выраженного через коэффициенты уравнения исключительно с помощью арифметических операций и корней. А ведь исключительно в таком виде пытались найти решение задачи! Вот Абель и говорит, что это примерно то же самое, как пытаться решить уравнение $2x = 1$, оперируя только целыми числами, или уравнение $ax^2 = b$, прибегая лишь к арифметическим операциям.

Справедливости ради, следует отметить, что первым такая мысль приходит в голову итальянскому математику **Паоло Руффини**. Для ее обоснования Руффини прибегает к той самой теории подстановок, на основе которой Лагранж пытался найти решение задачи. Любопытно, что свои результаты Руффини опубликовал в том самом 1799 году, когда Гаусс доказал основную теорему алгебры. К сожалению, доказательство Руффини содержало серьезные пробелы...

А вот решение Абеля оказалось безупречным. Взяв на вооружение всё ту же теорию подстановок (фактически, теорию конечных групп), Абель смог доказать, что решение алгебраического уравнения общего вида старших степеней (начиная со степени 5) невозможно выразить через коэффициенты уравнения с помощью лишь арифметических операций и корней. Это полностью объясняло неудачи, которые преследовали величайших математиков на пути решения уравнения пятой степени.

В то время Абелю было 24 года, и он был никому не известен. Его выкладки слишком сложны, а выводы – слишком необычны. Кто бы смог в них разобраться? Ближе всего к этому подошел Лагранж. Но его уже нет в живых. Тогда Гаусс? Но король математиков живет отшельником. Углубившись в свою работу, он практически ни с кем не общается. Через некоторое время Абель направит в один журнал свою статью, посвященную теории *эллиптических функций*, весьма специфических функций комплексного переменного. Редактор ничего не понял из содержания статьи, но у него хватило ума направить ее на рецензию Гауссу. Вопреки ожиданиям, ответ пришел незамедлительно. В нем Гаусс просил больше не направлять ему подобных работ. Редактор осторожно попросил мэтра уточнить, что конкретно он имеет в виду. И Гаусс ответил, что присланная работа – просто великолепна, что он сам когда-то работал в том же направлении и получил нечто весьма близкое. Он всё думал, стоит ли печатать свои результаты, но теперь понял, что не стоит. Пусть Абель их и публикует, тем более что ему удалось продвинуться значительно дальше. А вообще, Гаусс просит его больше не беспокоить, поскольку он очень занят...

Нет, к Гауссу не пробиться... И Абель отправляется в Париж. Ведь там работает Коши, один из крупнейших математиков того (да и не только того) времени, доказавший, помимо всего прочего, ряд глубоких результатов в области теории подстановок. Уж он-то должен во

всем разобраться... Но увы... Коши не заинтересовался странными результатами Абеля. Не получив признания во Франции, Абель возвращается на родину, где его особо никто и не ждет...

А вскоре на математическом небосклоне зажглась новая звезда. В свои пятнадцать лет юный парижанин **Эварист Галуа** хорошо знал, чем ему следует заняться. Взяв в библиотеке книги выдающегося французского математика Адриена Мари Лежандра по теории чисел и геометрии, он получил предварительные знания. Следующей на очереди была книга Лагранжа "*Решение численных уравнений*". Интересно, как бы развивалась математика, если бы Лежандр описал в своих книгах собственные безуспешные попытки доказать теорему Ферма или обосновать пятый постулат Евклида? А ведь Галуа мог бы взяться за решение этих проблем! И кто знает... Но, не устояв перед чарующей красотой рассуждений Лагранжа, он с головой уходит в проблему исследования алгебраических уравнений...

В шестнадцать лет Галуа приходит к выводу, что ему, удалось решить уравнение пятой степени. Но, обнаружив ошибку, он, как и незадолго до этого Абель, заключает, что неудача его объясняется исключительно тем, что решения в искомой форме попросту не существует. В 17 лет он строго обосновывает это предположение... Галуа показывает эти результаты своему учителю. А тот вспоминает, что нечто похожее сравнительно недавно было опубликовано в ведущем математическом журнале Германии. То была статья Абеля... Обидно, что кто-то тебя опередил, причем всего на несколько лет. Но всё же удивительно приятно осознавать, что ты – на верном пути!



Эварист Галуа
1811 – 1832

И тут к Галуа приходит озарение. Результаты Абеля не дают полного решения проблемы! Абель (подобно самому Галуа) доказал, что для уравнения степени выше четырех в общем случае невозможно получить формулу решения, включающую в себя арифметические операции и корни. Но ведь иногда это всё же удастся сделать. Значит, остается еще выяснить, когда это возможно, а когда нет... Вот только как же Абель? За прошедшие несколько лет он наверняка должен был уйти далеко вперед и непременно решить последнюю великую проблему теории алгебраических уравнений.

И тут Галуа узнает, что гениальный Нильс Хенрик Абель умер от туберкулеза в возрасте двадцати шести лет, так и не получив признания... Галуа остается один... И он углубляется в решение проблемы. Она оказалась фантастически сложной. Потребовалось разработать качественно новый математический аппарат – теорию групп и числовых полей. Кстати, термин "*группа*" ввел он сам... Галуа отчаянно работал... И, в конце концов, проблема была полностью решена! Но, как и в случае с Абелем, никто из современников не смог разобраться в его результатах. И никто не взял на себя смелость опубликовать его труды...

Жизнь Галуа была бурной. Он провалился на вступительном экзамене по математике в знаменитую Политехническую школу (что-то вроде политехнического института). Галуа просто не мог понять, что от него хотят экзаменаторы, задавая столь очевидные вопросы. Тогда он поступает в Нормальную школу, аналог педагогического института. Однако уже через год его исключают за участие в студенческих волнениях. Галуа попадает в тюрьму... Ну когда он еще успевал работать?

А дальше была какая-то темная история, закончившаяся дуэлью. В ночь перед дуэлью Галуа лихорадочно пишет письмо, в котором обращается к одному из своих друзей с просьбой передать все его немногочисленные рукописи какому-нибудь серьезному математику. Что бы не случилось, его работа не должна пропасть... А дальше была дуэль... Абель умер в 26 лет. Он прожил очень долгую жизнь. Галуа было двадцать!

Трудно себе представить, каким был бы сейчас наш мир, доживи он хотя бы до сорока... А ведь многие крупнейшие математики – Ньютон, Эйлер, Гаусс, Вейерштрасс, Гильберт, дожив до глубокой старости, продолжали активно работать. Тот самый Лежандр, на книгах которого Галуа постигал вершины математики, доказал частный случай теоремы Ферма, когда ему уже перевалило за семьдесят...

Что было потом? Через некоторое время после смерти Галуа его труд был опубликован ведущим математическим журналом Франции. Редактор журнала, Жозеф Лиувилль, сам первоклассный математик,



предсмертное
письмо Галуа

снабдил эту публикацию кратким предисловием. Там было сказано, что сам Лиувилль так и не смог понять совершенно необычные рассуждения автора. Однако он чувствует, что за всем этим стоит что-то очень серьезное...

В 1870 году **Камиль Жордан** публикует солидный трактат под названием "*Теория подстановок*". Во введении он отмечает, что этот труд представляет собой всего лишь комментарии к небольшой работе Галуа, изданной четверть века назад. Жордан был великолепным математиком, обладающим выдающимся педагогическим талантом и несомненным литературным даром. Да и математика за прошедшие десятилетия прошла немалый путь. Так или иначе, но после выхода в свет книги Жордана работы Абеля и Галуа получили всеобщее признание. Наступила новая эпоха...

Ну а как всё-таки завершилась история с уравнениями пятой степени? Согласно Гауссу они имели решения, но, как показали Абель и Галуа – не в той форме, в которой решались уравнения младших степеней. Следовательно, функциональная зависимость решения уравнения от коэффициентов должна быть выражена иными средствами. Но какими? В 1858 году другой французский математик **Шарль Эрмит** доказал, что решение уравнения пятой степени может быть выражено в эллиптических функциях – тех самых, с которыми в свое время работал Абель... Быть может, он предвидел такой исход?

Ну а как дальше развивалась алгебра? Под влиянием работ Лагранжа и Гаусса и, в еще большей степени, Абеля и Галуа постепенно становилось ясно, что тот математический аппарат, который был разработан для решения алгебраических уравнений, представляет самостоятельный интерес. Средства решения задачи оказались существенно важнее цели. Теория алгебраических уравнений постепенно отступала на задний план. А вперед уверенно выходили группы, поля, кольца и другие объекты, наделенные различными операциями. Силами ближайших последователей Жордана – **Феликса Клейна** и **Софуса Ли** они нашли важнейшие применения в геометрии и теории дифференциальных уравнений. А со временем алгебраические конструкции (в первую очередь, теория групп) реформировали всю математику, глубоко проникли в физику, причем влияние их неуклонно возрастает. Но это уже предмет отдельного разговора...

Литература

1. Белл Э. Т. Творцы математики. Предшественники современной математики. – М., Просвещение, 1979.
2. Володарский А. И. Очерки истории средневековой индийской математики. – М., Наука, 1977.
3. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины 19 столетия. – М., Физматгиз, 1966.
4. Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. – М., Наука, 1982.
5. Инфельд Л. Эварист Галуа. – М., Мол. Гвардия, 1958.
6. Никифоровский В. А. В мире уравнений. – М., Наука, 1987.
7. Оре О. Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. – М., Физматгиз, 1961.
8. Розенфельд Б. А., Юшкевич А.П. Омар Хайям. – М., Наука, 1965.
9. Сираджинов С. Х., Матвиевская Г. П. Ал-Хорезми – выдающийся математик и астроном средневековья. – М., Просвещение, 1983.

Дополнение. Эрмит-Виет, см. лекции

Что такое разрешимость уравнения в радикалах? Это возможность его сведения к цепочке уравнений вида $x^m = a$. Вопросы:

- Когда это возможно?
- Необходимое и достаточное условие сводимости уравнения к цепочке квадратных уравнений, т.е. чтобы корни уравнения можно было бы построить с помощью циркуля и линейки

Повысить драматизм: Коши – существенно продвинул вперед теорию групп подстановок, но не воспринял Абеля и Галуа