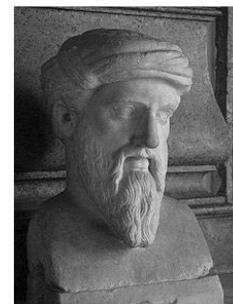


Предметом этой статьи являются драматические события, связанные со становлением математического анализа как самостоятельного раздела математики. Как-то принято здесь обычно начинать с работ Ньютона и Лейбница. Однако, нисколько не умаляя заслуг этих великих математиков, мы постараемся все-таки заглянуть вглубь истории и увидеть истоки данного научного направления в трудах крупнейших мыслителей Древней Греции. Я хотел бы выразить благодарность профессорам С.Ю. Симаранову (Москва) и Л.С. Сычевой (Новосибирск), которые ознакомились с рукописью статьи и сделали ряд ценных замечаний.

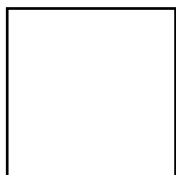
Всё – суть числа

Ранняя математика античного мира знала два направления – геометрию и арифметику. Геометрия занималась исследованием протяженных форм, и тем самым имела дело с непрерывными объектами. Арифметика же придавала объектам количественную характеристику и была дискретной по своей природе. Долгое время они развивались параллельно и практически не соприкасались. Но вот в шестом веке до нашей эры великий греческий мыслитель **Пифагор** провозгласил лозунг: "*Всё – суть числа*". Он учил о том, что в окружающем мире царит гармония, и выражена эта гармония в числах.

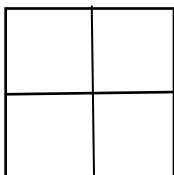
Со школьной скамьи мы знаем *теорему Пифагора*, связывающую длины сторон прямоугольного треугольника. Но сам Пифагор отчетливо видел за этим соотношением что-то еще, что, возможно, казалось ему более важным. Всё сводится к числам. И числа могут выражать геометрические образы. Так, если мы возьмем квадрат, то, поскольку он один, ему можно поставить в соответствие число 1. Но, если мы соединим середины противоположных сторон отрезками, то получаем уже четыре квадрата. Если же разбить стороны квадрата на три части, то в результате получатся уже девять квадратов. Числа 1, 4, 9, 16 и так далее, были названы *квадратными*. Они разлагаются в произведение двух



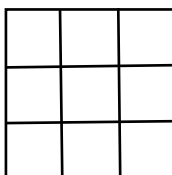
Пифагор
6 в. до н.э.



$$1 = 1 \times 1$$



$$4 = 2 \times 2$$

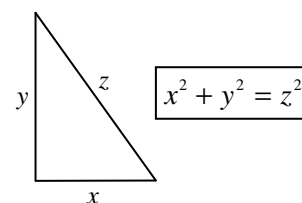


$$9 = 3 \times 3$$

равных сомножителей и численно равны площадям квадратов с целой длиной стороны. Так вот, если в геометрической интерпретации теоремы Пифагора сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, то в ее арифметической интерпретации одно квадратное

число представляется в виде суммы двух других квадратных чисел. Тем самым геометрия здесь оказалась неразрывно связанной с арифметикой, что явилось блестящей иллюстрацией утверждения Пифагора о сводимости к числам всего существующего. Это просто поразительно, что у самых истоков математики появился человек, попытавшийся (и не без успеха!) искать в ней объединяющий принцип. Но, как это потом будет происходить неоднократно, в процессе такого объединения почему-то появляется нечто, явно не входящее в планы исследователя.

Пифагор провозгласил, что всё на свете может быть сведено к числам. Естественно, прежде всего, это должно было относиться к геометрии – наиболее близкой к арифметике дисциплине. Блестящей иллюстрацией этой идеи была теорема Пифагора, допускающая как геометрическую, так и арифметическую интерпретацию. Но под числами в то время понимались либо целые положительные, т.е. *натуральные* числа, либо их отношения, т.е.



положительные *рациональные* числа. И к великому ужасу последователей Пифагора оказалось, что его теорема неминуемо выводит на существование несоизмеримых отрезков, что приводило к катастрофическим последствиям при их количественной интерпретации. К примеру, какое число следует сопоставить гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами единичной длины? А ведь такой треугольник реально существует! А еще мы можем легко построить квадрат, площадь которого равна целому числу, не являющемуся квадратным. Ну а чему равна длина его стороны?

Попытка описания непрерывной геометрии посредством дискретной арифметики неминуемо заводила в тупик. Философия Пифагора вступала в острое противоречие с его же теоремой. Возможно, это был первый в истории кризис оснований математики... Чтобы его разрешить, надо было как-то выйти за рамки той математики, которую знали последователи Пифагора, за пределы геометрии и арифметики. Требовалось что-то еще... И было совсем не понятно, где искать выход из создавшейся ситуации... И потребовался новый мощный удар по самым основаниям математики, прежде чем удалось примерить идеологию Пифагора с неприятными следствиями из его же теоремы. Удар этот был нанесен совершенно с неожиданной стороны...

В погоне за черепахой

Почему-то здесь вспоминается маленькое стихотворенье Пушкина:

*Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.
Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце ходит,
Однако ж, прав упрямый Галилей.*

Так кто же он был, человек, провозгласивший, что движения нет? Почему, несмотря на очевидную абсурдность этого утверждения, Пушкин считает его мудрецом? И какое отношение всё это имеет к предмету нашего обсуждения?

В Древней Греции было множество философских школ. Одной из наиболее оригинальных была элейская школа, названная в честь небольшого греческого города Элея. Ее возглавлял выдающийся философ Парменид, живший в 6 – 5 веках до н.э. Понимая, что мы познаем мир с помощью органов чувств, Парменид, тем не менее, предостерегал слишком полагаться на эти чувства. Действительно, размеры тел на расстоянии кажутся меньше, чем вблизи, хотя мы-то знаем, что их размеры остаются неизменными. Ночью, как говорится, все кошки серы, хотя мы знаем, что на самом деле цвет кошек не меняется. Мы видим, как солнце движется по небу с востока на запад, однако (см. выше строки Пушкина)... Вот Парменид и говорил:

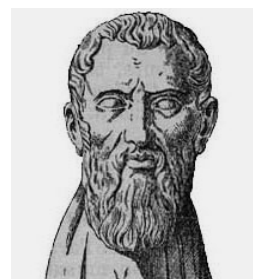
*Пусть не принудит тебя накопленный опыт привычки
Зренье свое утруждать, язык и нечуткие уши.
Разумом ты разреши эту задачу, данную мною тебе.*

И Парменид призывал полагаться исключительно на разум, на логику. Его и называют основоположником логики, прямым предшественником Аристотеля. А еще с ним связывают *принцип исключения третьего*. Это означает, что любое высказывание либо истинно, либо ложно. Третьего не дано! На этом основаны математические доказательства от противного. Вот нам надо установить справедливость некоторого утверждения. Мы предполагаем, что, напротив, оно ложно. Если в результате получается противоречие, то можно заключить, что наша гипотеза о ложности данного утверждения не верна, а значит, утверждение это является истинным. Кстати, именно таким образом было доказано, что

$\sqrt{2}$ и другие подобные числа не являются рациональными... А еще Парменид писал, что движения нет...

Учеником Парменида был **Зенон**, выдвинувший около 40 логических парадоксов – *апорий*. Лишь девять дошли до нас. И споры о них не прекращаются два с половиной тысячелетия...

Ахиллес. Быстроногий герой Ахиллес бежит за черепахой. Пусть изначально он находился в некоторой точке A_0 , а черепаха – в точке A_1 . Но, пока Ахиллес преодолеет путь, отделяющий его от черепахи, т.е. попадет в точку A_1 , черепаха уползет немного вперед и окажется в некоторой точке A_2 . Ахиллесу потребуется какое-то время, чтобы добраться до этого места, но черепаха к этому моменту успеет переместиться в некую точку A_3 . Поскольку процедура эта ничем не



Зенон
5 в. до н.э.



ограничена, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху. А значит, никакого движения и нет. Да здравствует Парменид!

Дихотомия. Движущееся тело за некоторое время проходит определенный путь. Однако до этого тело должно пройти половину всего пути. А еще раньше оно должно пройти половину от предшествующей половины и т.д. Указанный процесс ничем не ограничен. А значит, тело вообще никогда не сдвинется с места. Движенья нет!

Стрела. Пронаблюдаем за летящей стрелой. В каждый момент времени она находится в некоторой точке. Фиксируя там ее положение, мы фактически локализуем ее в пространстве. Тогда получается, что в любой момент времени стрела покоится, четко находясь где-то конкретно. Следовательно, весь процесс движения состоит из моментов покоя, а значит, вновь движения нет.

Приведенные рассуждения на первый взгляд кажутся совершенно абсурдными. То есть, как это движения нет? Но мы же его наблюдаем повсеместно! Не зря критик "братого мудреца" у Пушкина пытается его опровергнуть, демонстрируя это движение наглядно. Но, как прекрасно понимает Пушкин, наш мудрец не столь уж наивен. От его логики так просто не отмахнуться. И фактически здесь содержится вся проблематика математического анализа. Здесь неявно присутствует *бесконечность* (процессы разбиения движения на этапы в апориях "Ахиллес" и "дихотомия" бесконечны), *последовательность* (координаты точек A_0 , A_1 и т.д., фиксирующие положение Ахиллеса и черепахи, образуют последовательность), *предел* (точка встречи Ахиллеса с черепахой является пределом последовательности координат выше указанных точек), *итерационный процесс* (место встречи Ахиллеса с черепахой получается на основе алгоритма, в котором каждое последующее приближение A_{k+1} вычисляется по предшествующему приближению A_k), *ряд* (путь, пройденный Ахиллесом до встречи с черепахой, складывается из бесконечного числа слагаемых – расстояний между точками A_0 , A_1 и т.д.), *непрерывность* (траектория летящей стрелы непрерывна), *интегральная сумма* (длина кривой, соответствующей траектории летящей стрелы, складывается из сколь угодно большого множества сколь угодно малых частей)...

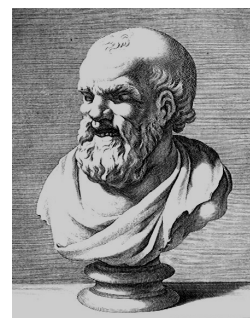
Зенон не был математиком, но его выводы потрясли математику до оснований. А ведь можно задуматься: что же еще могло быть в утеранных апориях Зенона? Может быть, вся математика пошла бы по иному пути, если бы последующие исследователи познакомились с его гениальными предвидениями в полном объеме? Скорее всего, до нас дошли именно эти апории потому, что они и были самыми важными... Хотя кто знает...

Вызов, брошенный миру Зеноном, требовал ответа. И ответ последовал на удивление скоро.

Всюду атомы

Знаменитый философ-материалист **Демокрит** был младшим современником Зенона. В противовес Зенону Демокрит выдвинуло концепцию *атома* – единой и неделимой частицы,

из которой складывается всё на свете. Согласно Демокриту все математические понятия являются реально существующими материальными объектами. Идеальных точек, линий и плоскостей не бывает. Объемные тела состоят из большого количества тончайших плоских слоев, плоскость – из тончайших линий, ну а линия – из элементарных атомов. Атом, будучи по определению не делимым, имеет минимально возможные размеры. Таким образом, существует предел дробления, а хитроумные конструкции Зенона получают тем самым разумное объяснение.



Демокрит
5-4 в. до н.э.

Действительно, логика Зенона работает вплоть до того момента времени, пока расстояние между Ахиллесом и черепахой не будет равно минимально возможной длине. А поскольку дальнейшее деление пути невозможно, то процесс завершается за конечное время, и тем сам Ахиллес благополучно догоняет черепаху. Аналогично, тело, проходящее некоторое расстояние, действительно сначала должно пройти его половину, а до того – половину от этой половины и т.д. Однако рано или поздно выяснится, что телу остается пройти лишь то самое минимальное расстояние. Дальнейшее измельчение пути невозможно, а значит, движение когда-то непременно начнется. И стрела будет двигаться, поскольку существует предел измельчения как пространственных, так и временных интервалов. На каждом минимально возможном интервале времени стрела действительно будет где-то находиться, но за последующий минимально возможный интервал времени она окажется в другом месте. Движение есть!

Но Демокрит был не только философом, но и математиком, причем очень даже не слабым. Основываясь на своей концепции атома, он обращается к вычислению объема пирамиды. Для него пирамида – это совокупность расположенных друг на друге слоев минимально возможной толщины. Каждый слой вполне материален и имеет некоторый объем. Остается только представить объем пирамиды как сумму объемов составляющих его слоев. И в результате получается хорошо известная нам формула объема пирамиды $V = \frac{1}{3}hS$, где h – высота пирамиды, а S – площадь ее основания. Вообще-то построения Демокрита сильно напоминают процедуру интегрирования, элементы которого отчетливо проглядываются и в рассуждениях Зенона.

Казалось, хитроумные парадоксы Зенона получили вполне удовлетворительное объяснение. Концепция атома Демокрита в математике оказалась весьма эффективной. Столь эффективной, что даже через две с лишним тысячи лет крупнейшие математики семнадцатого века Кеплер и Кавальери, Декарт и Ферма были вполне удовлетворены конструкциями Демокрита и в своих исследованиях пользовались близкой техникой...

Однако нашелся мыслитель, которого рассуждения Демокрита как-то не удовлетворили. Поразительно, но жил он далеко не в семнадцатом веке, а двумя тысячелетиями ранее, будучи младшим современником самого Демокрита. Он фактически смог придать рассуждениям Зенона строгую математическую основу. И, возможно, с этого времени у нас появляются серьезные основания рассматривать математический анализ как вполне самостоятельную математическую дисциплину.

Достижение предела

Звали его **Евдокс**. Жил он в 4 веке до н.э. Учился философии – у Платона, медицине – у крупнейших врачей того времени, астрономии – у египетских жрецов, математике – у Архита, известного решением задачи удвоения куба и доказательством существования несоизмеримых отрезков. Словом, весьма образованный был человек... Впоследствии он основал собственную научную школу, где преподавал математику, астрономию, географию, философию, медицину, теологию... Его научные результаты потрясают своей глубиной и разнообразием.

Его называют основоположником теоретической астрономии. Ему принадлежит первая в истории космологическая теория, усовершенствованная впоследствии Гиппархом и Птолемеем и позволяющая рассчитывать движение планет, Солнца и Луны. Он считал Землю шаром и дал оценку ее размеров. Он построил первую в Греции обсерваторию, где проводил измерения, некоторые из которых отличаются поразительной точностью. В частности, он заключил, что наибольшее угловое расстояние Венеры от Солнца составляет 45° , тогда как согласно современным данным эта величина равна $47^\circ 40'$.



Евдокс

А угол между эклиптической и небесным экватором он считал равным 24° , ок. 408 - ок. 355 до н. э. в то время как современные астрономы называют величину $23^\circ 27'$. А еще он составил каталог звезд с указанием их угловых координат. И здесь не грех напомнить, что метод координат был разработан, вообще-то, Декартом и Ферма лишь в 17 веке...

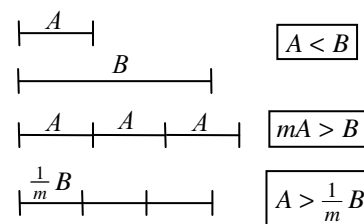
А еще он был оригинальным философом, весьма уважаемым Платоном и Аристотелем. Будучи моложе Платона, но старше Аристотеля, Евдокс поддерживал дружеские отношения с ними обоими, несмотря на определенные разногласия по ряду вопросов. Говорят, что философия Евдокса явилась своего рода переходным этапом от Платона к Аристотелю... Уж очень различались между собой воззрения этих двух величайших мыслителей – учителя и ученика. Должно же было быть между ними какое-то связующее звено...

А еще Евдокс написал большой трактат по географии, снабженный подробными картами, где было дано описание всех известных в то время грекам земель. Там впервые используется термин "климат", хотя и в несколько ином смысле. А еще ему приписывают изобретение горизонтальных солнечных часов. А еще он предложил календарь, в котором для каждого четвертого года к одному из месяцев добавляется день. А еще Евдокс высказывался о возможности создания механических устройств для счета, являясь тем самым провозвестником информатики... А еще он был математиком, возможно, самым глубоким математиком античного мира...

Следуя традиции Пифагора, Евдокс начал с разработки теории чисел, но такой, чтобы рациональные и иррациональные числа в ней присутствовали бы на равных правах. У Пифагора и его последователей число является первичным понятием. А Евдокс вводит сначала понятие *геометрической величины*, в качестве которой могут выступать длины, площади и объемы, т.е. на языке современной математики – *меры*. Число при этом появляется как отношение двух однородных величин (величин одного типа, т.е. двух длин или двух объемов), подобно тому, как рациональное число у Пифагора является отношением двух натуральных чисел. При этом одна из рассматриваемых величин может быть выбрана за эталон, что соответствует единичной длине, площади или объему. Тогда любая другая величина в выбранной системе измерения характеризуется числом, выражающим ее отношение к эталону. Естественно, проблема соизмеримости величин никакой особой роли здесь не играет, вследствие чего появляется возможность исследовать рациональные и иррациональные числа с единых позиций. А дальше Евдокс фактически разрабатывает аксиоматику сравнения величин. И здесь хорошо бы вспомнить, что всё это происходит в то время, когда "*Начала*" Евклида, ставшие знаменем аксиоматического подхода, еще и не были написаны.

Одна из аксиом состояла в том, что все однородные величины признавались сравнимыми, т.е. для любых двух величин всегда можно указать большую и меньшую, если конечно, они не равны. Часть величины тоже является величиной, которая меньше исходной. Если некоторую величину отложить какое-то количество раз, то в результате получится большая величина того же типа. И вот, наконец, ключевая аксиома, которая вошла в историю под названием *аксиомы Архимеда* (об Архимеде и его отношении к этому см. ниже). Итак, если имеется любые две величины, то, отложив меньшую из них некоторое количество раз, мы получим величину, превосходящую большую. Другими

словами, если имеются две величины, например, отрезки A и B , причем $A < B$, то всегда найдется такое натуральное число m , что отложив m раз отрезок A , мы получаем такой отрезок mA , что $mA > B$. Отсюда неминуемо следовало, что отрезка наибольшей длины не существует: какой бы отрезок мы ни взяли, всегда можно, отложив любой меньший отрезок какое-то количество раз, получить больший отрезок по сравнению с исходным. Но, если, растянув меньший отрезок A в m раз, мы получаем отрезок mA , который будет больше B , то что нам мешает выполнить обратную процедуру?



Сжав отрезок B в m раз, мы неминуемо получим отрезок, который будет меньше A . А вот это уже означает, что отрезок наименьшей длины также не существует, коль скоро для любого малого отрезка всегда можно подобрать еще меньший.

Если Демокрит постулирует существование отрезка наименьшей длины, то Евдокс от этого допущения отказывается. Гипотеза Демокрита представляется Евдоксу надуманной, не подтвержденной практикой и вызванной исключительно острым желанием как-то обойти каверзные вопросы Зенона. Идеалист Евдокс обвинял здесь материалиста Демокрита в разработке искусственных идеальных конструкций, находящихся в отрыве от реальной жизни. И вот теперь, на основе теории Евдокса, появилась возможность придать строгой математический смысл известным рассуждениям Зенона.

Но это еще не всё... Числа по Евдокса являются *пропорциями* или *отношениями* величин. Взяв одну из величин в качестве эталона (единицы измерения), мы автоматически переносим на числа все установленные ранее закономерности. Не существует наибольшего числа. Между любыми двумя числами всегда найдется третье число, которое меньше наибольшего, но больше наименьшего из них. В аксиоме Архимеда фактически присутствовала *потенциальная бесконечность*, связанная с процессом построения неограниченно убывающих или возрастающих величин. Если конструкции Демокрита статичны (размеры атома, в конце концов, можно заранее считать достигнутыми), то концепция Евдокса предполагает динамику, приближение. Отметим, что определение и анализ потенциальной бесконечности впервые дает именно Аристотель – близкий друг и младший товарищ Евдокса, с которым они вместе учились в Академии Платона. Было бы наивным полагать, что это – случайное совпадение.

А еще из *теории пропорций* (называемой также *теорией отношений*) Евдокса, в частности, из аксиомы Архимеда можно было вывести понятия *предела*, посредством которого выражаются все важнейшие концепции математического анализа – сходимости последовательности, непрерывность функции, суммирование ряда, дифференцирование и интегрирование. Явного определения предела у Евдокса нет, но фактически он с ним работает. А его теория чисел, в принципе, позволяет строго возводить любые конструкции классического математического анализа. Кстати, следующим математиком, который понял, что ключом к строгому обоснованию анализа служит единая теория рациональных и иррациональных (т.е. *действительных*) чисел был Карл Вейерштрасс. Жил он во второй половине 19 века. Отметим также, что незначительно усовершенствованная и изложенная современным языком теория пропорций Евдокса превращается в современную аксиоматическую теорию действительных чисел, разработанную Рихардом Дедекиндом, младшим современником Вейерштрасса. А Евдокс жил, вообще-то, немного раньше...

Теория пропорций позволила существенно расширить представление о числах. И теперь уже любой длине можно было сопоставить некоторое число. Тем самым идея Пифагора о сводимости геометрических объектов к числам была полностью реабилитирована...

Однако всё это лишь математический аппарат, с помощью которого Евдокс предполагает решать различные задачи. И не только предполагает, но и решает. Для этого он разработал *метод исчерпывания*. Его смысл заключается в следующем. Для нахождения некоторой величины рассматривается семейство других величин более

простой природы, неограниченно приближающихся к искомой. При этом показывается, что исследуемая величина является пределом последовательности аппроксимирующих ее простых величин. К примеру, площадь круга определяется посредством неограниченного приближения ее площадями вписанных и описанных многоугольников, т.е. полностью исчерпывается ими. Аксиома Архимеда служит здесь для обоснования возможности неограниченного приближения к искомому результату. Своим методом Евдокс доказывает и справедливость формулы Демокрита для объема пирамиды (за счет приближения ее набором призм), успешно показав, что для этого нет никакой необходимости в гипотезе атома. А заодно вычисляются объемы конуса и цилиндра, строится касательная к кругу. Фактически здесь мы имеем элементы дифференциального и интегрального исчисления, причем изложенные с единых позиций на весьма надежной основе...

Но если в работах Евдокса уже содержатся основы математического анализа, то чем же тогда занимались математики последующие два с лишним тысячелетия?

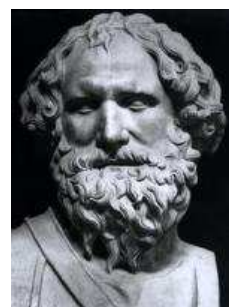
Утерянный предел?

Евдоксу страшно не повезло. Его труды не сохранились. Вообще не сохранились! Но тогда возникает вопрос, откуда же мы знаем об этих его исследованиях? А вот здесь уже можно говорить о поразительной удаче. Уже ближайшие поколения математиков выдвинули из своих рядов сразу двух человек, имена которых известны любому школьнику. Один из них дал подробное и ясное изложение важнейших результатов Евдокса, а второй убедительно продемонстрировал их необыкновенную мощь. Удача была просто фантастической, поскольку за последующие два с лишним тысячелетия никому из математиков не удавалось даже близко подступиться к этому уровню.

Первым был Евклид. В частности, теории пропорций посвящены Книги V и VI его "*Начал*", ну а метод исчерпывания и его приложения описываются там же в книге XII. По мнению специалистов, сам Евклид, оставаясь, прежде всего, геометром, не внес сколько-нибудь заметного вклада в развитие идей Евдокса. Но мы должны быть безгранично благодарны ему уже за то, что он подробно и доходчиво изложил эти результаты в самом известном математическом трактате за всю историю развития человечества...

Но был еще второй математик, который не только смог по достоинству оценить значимость теории Евдокса, но и сумел развить его аппарат, а также решить с его помощью столь сложные задачи, что и спустя два тысячелетия едва ли кто был в состоянии хотя бы всерьез разобраться в его рассуждениях... Это был **Архимед**.

Если Евдокс ограничивался построением касательной к кругу, то Архимед решает несравненно более сложные задачи построения касательных к параболе, гиперболе и спирали. Если Евдокс вычисляет площадь круга, что было получено (хотя и не столь строго) за сто лет до него, то Архимед находит площади фигур, ограниченных частью параболы и витком спирали, а также площадь поверхности шара, конуса и цилиндра. Евдокс умеет вычислять объем пирамиды, конуса и цилиндра, а Архимед – объем шарового сегмента, эллипсоида, параболоида и гиперболоида вращения. Словом всё то, что умел делать Евдокс, умеет и Архимед, причем для существенно более сложных задач.



Архимед
ок.287 – 214 до н.э.

Свои исследования Архимед обычно начинает с некоторых достаточно простых и наглядных конструкций, не отличающихся особой строгостью. При этом он порой пытается "угадать" ответ с помощью изошренных геометрических построений, либо отыскивает некоторую механическую аналогию. И лишь потом, получив желаемый результат, он берется за его строгое обоснование. И при этом руководствуется методом исчерпывания, опираясь главным образом на ту самую аксиому, которая в результате и была названа аксиомой Архимеда, хотя естественно сам Архимед так ее не называл. К примеру, в процессе вывода площади параболического сегмента он рассматривает неограниченно возрастающее семейство треугольников, суммарная площадь которых в

пределе и дает желаемый результат. В рассуждениях Архимеда мы встречаем описание интегральных сумм, более явное и совершенное, чем у Евдокса, насколько мы можем об этом судить по книге Евклида.

Трудно сказать, читал ли Архимед оригинальные труды Евдокса или он руководствовался "*Началами*" Евклида, с которыми был, несомненно, знаком? Как известно, Архимед учился в Александрии, где незадолго до этого работал Евклид и где в знаменитой библиотеке были собраны лучшие творения человеческой мысли. Впоследствии библиотека сгорела, и мир обеднел... Но произошло это значительно позднее. Так что есть основания полагать, что с работами Евдокса он был все-таки знаком. Но в любом случае Архимеду несомненно удалось продвинуться вперед.

И вот здесь главная загадка. Почему после Евдокса и Архимеда математике понадобилось целых две тысячи лет, чтобы пришли Ньютон и Лейбниц, по праву считающиеся основоположниками классического математического анализа? Но даже они не имели столь ясного представления о действительных числах и их месте в анализе, как их гениальные предшественники, вследствие чего строгое обоснование анализа было дано еще через двести лет.

Архимед жил в третьем веке до нашей эры. Греческая математика пока еще как будто бы переживала расцвет... Где-то рядом творит великий геометр Аполлоний. Через несколько сотен лет еще придут блистательные Птолемей и Диофант. А еще позднее – великие индийские и арабские математики. А потом – крупнейшие математики Европы Нового Времени... Но почему же так долго никому не удавалось даже близко подойти к тому состоянию, в котором оставил математику Архимед?

На это трудно дать однозначный ответ. Возможно, всё было связано с двойственностью позиции самого Архимеда. Почему, в совершенстве владея математическим аппаратом Евдокса, сумев успешно усовершенствовать этот аппарат, Архимед далеко не всегда сам придерживается математической строгости при изложении материала? Можно понять, что к той или иной формуле он пришел интуитивно, а ее строгое обоснование пришло позднее. Возможно, он хотел, чтобы читатель лучше понял ход его мысли, осознал не только сам результат, но и путь, пройденный автором в процессе его получения. Быть может, он просто боялся, что высокие абстракции в духе знаменитого трактата Евклида многих читателей просто отпугнут. А возможно, Архимед считал эти результаты предварительными и предполагал написать капитальный труд, где всё было бы изложено безупречно строго... Предполагал, но не успел... Как известно, он погиб в расцвете сил при штурме римлянами Сиракуз, его родного города.

Удивительно, но в ряде случаев Архимед даже обращается к методике Демокрита, казалось бы, давно устаревшей. Создается впечатление, что концепция Евдокса в чем-то его не вполне удовлетворяла. Возможно, всё дело в том, что Архимед был еще гениальным механиком и инженером. И для него, блистательного практика, материалистическая философия Демокрита была, по-видимому, намного ближе абстрактных воззрений Евдокса, ученика и сподвижника идеалиста Платона, Евдокса, решительно вставшего на сторону заумного Зенона в его заочном споре с прагматичным Демокритом. Похоже, Архимед не хотел отказываться от методики Демокрита, оказавшейся достаточно эффективной, пусть и не совсем строгой. А может быть, он надеялся, что со временем будет найдено примирение этих позиций... А ведь и вправду наступило время, когда выдвинутый Демокритом принцип прерывности, дискретности станет востребованным. Но до открытия квантовой механики, генетического кода и компьютеров было еще так далеко...

Трудно сказать, как это было на самом деле... Но, когда в начале 17 века европейские математики всерьез взялись за изучение трудов Архимеда, то, в первую очередь, они смогли понять его предварительные построения, навеянные идеями Демокрита. Это относится к Кеплеру и в еще большей степени – к Кавальери, разработавшему *метод неделимых*, являющийся фактически осовремененным изложением конструкций

Демокрита. Ферма, Декарт и другие крупнейшие математики середины 17 века мастерски владели многими приемами математического анализа, но так и не смогли выйти за рамки атомизма. И только Ньютон и Лейбниц сумели преодолеть эту преграду. Но лишь через сто лет математики осознали необходимость строгого определения понятия предела. Таковое было дано в начале 19 века Коши и Больцано. А еще через полвека Вейерштрасс осознал, что существующий анализ всё еще не может быть признан в полной степени обоснованным. И лишь после построения силами самого Вейерштрасса и его ближайших последователей (Дедекинда и Кантора) строгой теории действительных чисел проблема обоснования математического анализа могла считаться закрытой. И лишь тогда математика в полной степени смогла превзойти тот уровень, на который ее вывели величайшие мыслители Древней Греции... И перед математикой открылись новые чарующие рубежи... Но всё это произошло намного позднее, а мы обращаемся к истокам...

Пифагор. Зенон. Демокрит. Евдокс. Архимед. Помните их...

Литература

1. Белл Э. Т. Творцы математики. Предшественники современной математики. – М., Просвещение, 1979.
2. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М., ИЛ, 1963.
3. Ван-дер-Варден Л. Пробуждающаяся наука. – М., ИЛ. – 1959.
4. Лосев А.П., Тахо-Годи А. А. Платон. Аристотель. – М., Молодая гвардия, 1993.
5. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М., Наука, 1975.
6. Райк А. Е. Очерки по истории математики в древности. – Саратов, 1977.
7. Стилвелл Дж. Математика и ее история. – Москва, Ижевск, Институт космических исследований, 2004.