

Сила разума в том, что он признает существование множества вещей, ему непостижимых.

Блез Паскаль

Совсем недавно вступил в свои права двадцать первый век. Начало нового тысячелетия не столь уж богато яркими научными событиями мирового класса. Математический мир, пожалуй, может похвастаться только одним результатом высшего разряда.

Проблема Пуанкаре... Она была поставлена одним из величайших умов в истории цивилизации. Она была решена одним из наиболее ярких и противоречивых фигур современной науки. Вокруг этого выдающегося события уже несколько лет не прекращаются бурные споры...

Так в чем же суть этой загадочной проблемы? Попытаемся немного разобраться.

1. Проблемы, проблемы, проблемы...

Рождение двадцатого века в математике было ознаменовано Вторым Международным Конгрессом математиков в Париже. На нем с программной речью выступил прославленный **Давид Гильберт**. Его называют последним из великих математиков, единственным математиком двадцатого века, величие которого ни у кого не вызывает сомнения. Кто другой – может быть... Ну а Гильберт – уж точно гений!



Давид Гильберт
1862 – 1943

Это был, возможно, единственный случай в истории мировой цивилизации, когда один человек дерзновенно выдвинул программу развития целой науки (и какой!), рассчитанную на целый век. Его *двадцать три проблемы* охватывают важнейшие направления математики. Оставивший неизгладимый след практически во всех ее разделах, Гильберт включил в свою программу задачи из теории чисел и математической логики, алгебры и анализа, геометрии и топологии, теории дифференциальных уравнений и вариационного исчисления... Ученый, решивший хотя бы частично любую из этих проблем, был просто обречен на бессмертие. И, надо признаться, в минувшее столетие математика в значительной степени развивалась по пути, указанным Гильбертом.

Завершившийся двадцатый век в значительной степени оправдал ожидание Гильберта. Подавляющее большинство из его проблем действительно нашли в той или иной степени свое решение. И возник естественный вопрос – что дальше?

Современный математический мир, безнадежно расколотый на великое множество научных направлений, в значительной степени утративших связь между собой, уже, казалось, смирился с невозможностью прихода нового Гильберта. Появление мыслителя такого масштаба, способного обозреть своим взглядом всю математику в целом, как-то уже и не ожидалось... И тогда роль коллективного Гильберта взяла на себя математическая общественность.

В 24 мая 2000 года Математический институт Клея, основанный незадолго до этого американским миллиардером Лэндоном Клеем, выдвинул **Математические проблемы тысячелетия** (Millennium Prize Problems). На двадцать три проблемы сил уже явно не хватало... Их набралось только семь. Интерес к этому делу подогревался в значительной степени тем обстоятельством, что за решение любой из них предлагался приз в миллион долларов. Итак, о чем же идет речь?

1. *Проблема равенства классов сложности* относится к теории алгоритмов.
2. *Гипотеза Ходжа* связана с алгебраической геометрией.
3. *Гипотеза Пуанкаре* является проблемой топологии.

4. *Гипотеза Римана* (единственная из проблем Гильберта, попавшая и в новый список) восходит к теории чисел.

5. *Теория Янга–Миллса* является математической задачей, возникшей в физике элементарных частиц.

6. *Уравнения Навье–Стокса* возникли в гидродинамике и относятся к теории дифференциальных уравнений с частными производными.

7. *Гипотеза Берча и Свиннертона-Дайера* находится на стыке алгебраической геометрии и теории чисел.

Последователи Гильберта, видимо, не отличались его оптимизмом. Назвав свои задачи проблемами тысячелетия, они, должно быть, совсем не рассчитывали на их скорое решение. Однако уже через несколько лет одна из них была признана окончательно решенной... Гипотеза Пуанкаре.

Анри Пуанкаре. Старший современник Гильберта. Если того называют последним из великих математиков, то предпоследним из великих был, несомненно, Пуанкаре. В конце девятнадцатого века и в первые годы века двадцатого эти двое безоговорочно царили в математическом мире. Но в то время, когда Гильберт еще делал в математике только первые шаги, слава Пуанкаре была уже в зените.

Его вклад в математику (да, собственно, и в физику) трудно переоценить. К примеру, в небесной механике возникает задача трех тел, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона, например, движение Солнца, Земли и Луны. Двести лет крупнейшие математики безуспешно пытались найти решение этой задачи по аналогии с движением двух тел, описанным самим Ньютоном. А Пуанкаре доказал, что в общем случае эта задача не допускает точного решения.

Пуанкаре ввел метод малого параметра, успешно применяющийся во многих разделах математики. Заложил основы качественной теории дифференциальных уравнений. Был одним из основоположников топологии – того самого раздела математики, к которому и относится обсуждаемая проблема. Существенно продвинул вперед математическую физику, теорию функций комплексного переменного, теорию интегральных уравнений, неевклидовы геометрии...



Анри Пуанкаре
1854 – 1912

А чего стоит его вклад в специальную теорию относительности? Он разработал математический аппарат преобразований Лоренца. Задолго до Эйнштейна ввел общий принцип относительности и четырехмерное пространство-время. И здесь любопытно отметить, что и Гильберт впоследствии конкурировал с Эйнштейном, но уже в разработке общей теории относительности...

Но чему же все-таки посвящена эта самая гипотеза Пуанкаре, первая из решенных проблем тысячелетия? Дадим ее строгую формулировку.

*Любое замкнутое односвязное трёхмерное
многообразие гомеоморфно трёхмерной сфере.*

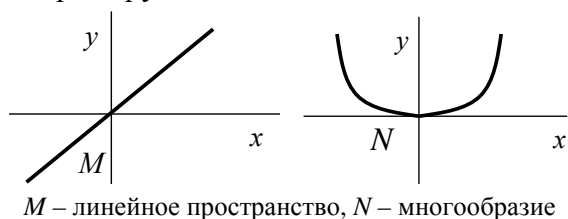
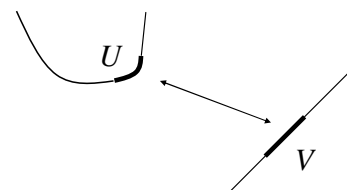
Что же стоит за этой туманной фразой?

2. Что бы это значило?

Непосвященному читателю приведенная формулировка представляется нагромождением непонятных терминов, туманный смысл которых лежит далеко за пределами понимания нормального человека. Однако чтобы постигнуть изощренную мысль Пуанкаре совсем не обязательно иметь специальное математическое образование. Давайте попробуем разобраться в этой мудреной терминологии. Из приведенной фразы, пожалуй, лишь слово "любое" не нуждается в каких-либо комментариях.

Основным объектом гипотезы Пуанкаре является понятие **многообразия**. Оно служит некоторым обобщением *линейного пространства*, множества, элементы которого можно складывать и умножать на число. Так, в физике в результате сложения масс получают массу, а масса, умноженная в несколько раз, снова оказывается массой. В геометрии сумма векторов является вектором, а при умножении вектора на число также получается вектор. В алгебре, если x является решением системы линейных однородных алгебраических уравнений, а y – другое решение той же системы, то сумма $x+y$ и произведение решения x на произвольное число также будут решениями той же системы. В этой связи говорят, что множества масс, векторов и решений данной системы уравнений образуют линейные пространства. Естественными примерами линейных пространств являются прямая, плоскость и *евклидовы пространства* большего числа измерений.

Возможность выполнения алгебраических операций над элементами линейных пространств позволяет достаточно эффективно использовать при их исследовании хорошо разработанный алгебраический аппарат. В общем случае, когда рассматриваемый объект уже не образует линейного пространства, такая возможность, вообще говоря, отсутствует. Однако существует класс объектов, где подобные методы еще работают, хотя и в более слабой форме по сравнению с линейными пространствами. Это и есть **многообразия**, которые представляют собой геометрические объекты, имеющие локальное строение линейного пространства. Под этим подразумевается, что для любой достаточно малой области U многообразия можно установить взаимно однозначное соответствие с некоторой областью V линейного пространства.

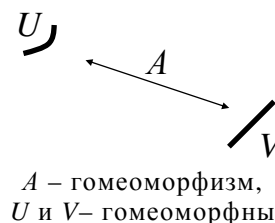


M – линейное пространство, N – многообразие

и y , удовлетворяющих равенству $y = x$, образует линейное пространство, а множество точек с координатами, подчиняющимися условию $y = x^2$, представляет собой многообразие. В малой области многообразия с достаточно высокой степенью точности

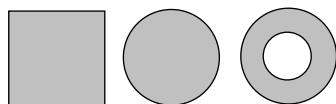
сохраняют прекрасные алгебраические свойства линейных пространств.

А теперь поясним, что значит слово "**гомеоморфно**". Преобразование называется **гомеоморфизмом**, если оно является взаимно однозначным, причем как прямое, так и обратное преобразования непрерывны. Множества **гомеоморфны**, если они связаны гомеоморфизмом. Гомеоморфные множества можно непрерывно деформировать одно в другое. Свойства непрерывности выводят нас в **топологию** – раздел математики, где непрерывность исследуется с наиболее общих позиций. Собственно, гипотеза Пуанкаре как раз и относится к топологии, одному из ведущих направлений современной математики.



A – гомеоморфизм, U и V – гомеоморфны

Если, к примеру, деформировать круг, то легко можно получить эллипс. Путем непрерывной деформации из круга можно сделать и квадрат, но никак не кольцо. Для



Круг гомеоморфен прямоугольнику, но не кольцу

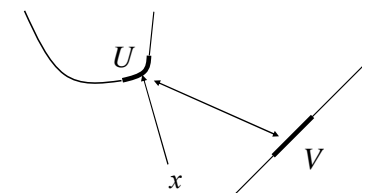
получения кольца требуется уже вырезать какую-то внутреннюю часть круга, т.е. выполнить разрывное преобразование. Тем самым, круг и прямоугольник гомеоморфны или, что то же самое, обладают одинаковыми топологическими свойствами. Следовательно, с топологической точки зрения круг и прямоугольник не различаются, т.е. фактически являются эквивалентными объектами. А вот топологические свойства круга и кольца уже существенно различаются.

А теперь возвращаемся к формулировке гипотезы Пуанкаре:

*Любое замкнутое односвязное трёхмерное
многообразие гомеоморфно трёхмерной сфере.*

Согласно данному утверждению произвольное многообразие, обладающее некоторыми заданными свойствами (а именно, замкнутое, односвязное и трехмерное), топологически эквивалентно некому конкретному объекту (трехмерной сфере). Тем самым, один из этих двух объектов можно непрерывно деформировать в другой и наоборот. Таким образом, нам остается уточнить, какое многообразие является замкнутым, односвязным и трехмерным, а также выяснить, что такое трехмерная сфера.

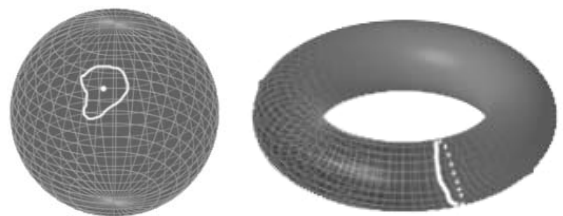
Отметим, что свойства множества быть замкнутым, односвязным и трехмерным как раз и относятся к числу топологических свойств. Тем самым замкнутое множество может быть гомеоморфно (топологически эквивалентно) исключительно замкнутому множеству, односвязное – односвязному, а трехмерное – трехмерному. В частности, в гипотезе Пуанкаре, как раз и говорится о том, что некий трехмерный объект общего вида (замкнутое односвязное многообразие) с топологической точки зрения сводится к конкретному трехмерному объекту – сфере. Здесь следует лишь добавить, что топологические свойства имеют смысл не для всякого многообразия. Как мы уже отметили, для любой достаточно малой области многообразия общего вида можно установить взаимно однозначное соответствие с некоторой областью линейного пространства. Нас же будут интересовать исключительно *топологические многообразия*, для любой точки которых существует окрестность, гомеоморфная множеству некоторого евклидова пространства.



Окрестность U точки x многообразия гомеоморфна области V евклидова пространства

Так что же в действительности стоит за этими свойствами? Прежде всего, отметим, что множество называется *открытым*, если любая его точка обладает окрестностью, принадлежащей этому множеству. Множество – *замкнуто*, если его дополнение (множество точек, ему не принадлежащих) открыто. В частности, открытым будет любой интервал (a, b) . Действительно, для любой точки x , удовлетворяющей неравенству $a < x < b$, можно подобрать такое достаточно малое положительное число ε , что множество $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, т.е. ε -окрестность данной точки будет принадлежать рассматриваемому интервалу. Открытыми будут и полубесконечные интервалы $(-\infty, a)$ и $(b, +\infty)$, а также их объединение. А вот отрезок $[a, b]$, включающий точки a и b , открытым не будет, поскольку никакая ε -окрестность, к примеру, точки a отрезку никак не принадлежит. Это множество оказывается замкнутым, поскольку дополнением к нему служит объединение указанных полубесконечных интервалов, являющееся открытым множеством. Отметим, что замкнутое многообразие непременно включает в себя все свои граничные точки.

Множество называется *односвязным*, если любой замкнутый контур на нем может быть непрерывно стянут в точку, оставаясь все время в данном множестве. В частности, сферическая поверхность (граница шара) является односвязным множеством. Действительно, можно нарисовать на поверхности шара произвольную замкнутую кривую, а потом непрерывно стянуть ее в точку, постоянно оставаясь на этой поверхности. С другой стороны, тор (поверхность бублика) не является односвязным.



сферическая поверхность односвязна, а тор – нет

В частности, в качестве замкнутого контура можно выбрать малую (поперечную) окружность. Ее никак нельзя стянуть в точку, находясь все время на поверхности тора. Если для поверхности шара разрез по любому замкнутому контуру разделяет поверхность

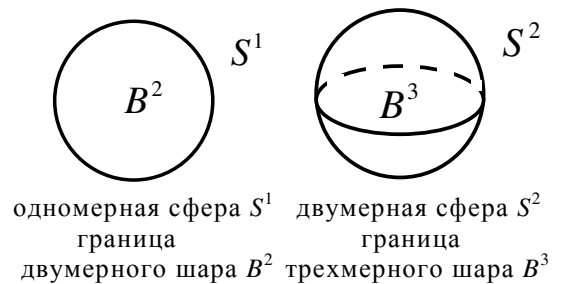
на две независимые части, то в результате разреза по указанному контуру тора получается единый объект, который ассоциируется с боковой поверхностью цилиндра.

Понятие *размерности* проще всего определяются для линейных пространств. Грубо говоря, пространство называется *n-мерным*, если любую его точку можно охарактеризовать *n* числами (координатами). В частности, прямая R^1 – одномерна, плоскость R^2 – двумерна, а пространство R^3 – трехмерно. Евклидово пространство R^n естественно оказывается *n-мерным*.



Теперь обратимся к определению размерности топологического многообразия. Как мы знаем, для любой его точки существует окрестность, гомеоморфная множеству некоторого евклидова пространства. Так вот, оказывается, что, если многообразие составляет единое целое (т.е. не представимо в виде двух независимых частей), то любая такая окрестность оказывается гомеоморфной множеству одного и того же конкретного евклидова пространства R^n . Соответствующее число *n* и называют *размерностью* многообразия. Таким образом, многообразия называют **трехмерным**, если для любой его точки существует окрестность, гомеоморфная (топологически эквивалентная) какому-либо множеству трехмерного евклидова пространства.

Нам остается определить понятие трехмерной сферы. *Сферой* называют множество точек, находящихся на равном расстоянии от некоторой точки, называемой ее центром. Сфера служит границей соответствующего шара. В частности, шар B^n – это такое множество точек евклидова пространства R^n , которые лежат на расстоянии, не превосходящем заданного значения (радиуса шара) от некоторой точки (центра). Естественно, шар B^n является *n-мерным*. А вот граница его имеет размерность на единицу меньше, т.е. оказывается $(n-1)$ -мерным множеством, обозначаемым через S^{n-1} . В частности, одномерная сфера S^1 (окружность) является границей двумерного шара (круга) B^2 , двумерная сфера S^2 (поверхность шара) является границей трехмерного шара B^3 и т.д.



Таким образом, в гипотезе Пуанкаре речь идет о **трехмерной сфере** S^3 , границе четырехмерного шара B^4 . Отметим, что сфера является замкнутым односвязным множеством. Собственно, так и должно было быть. В противном случае сфера S^3 никак не могла бы обладать такими же топологическими свойствами, что и замкнутое односвязное трехмерное многообразие.

Ну и теперь можно подвести итог. Повторяем формулировку гипотезы Пуанкаре:

Любое замкнутое односвязное трёхмерное многообразие гомеоморфно трёхмерной сфере.

Согласно данному утверждению произвольное трехмерное многообразие, обладающее дополнительно свойствами замкнутости (содержащее все свои граничные точки) и односвязности (любой контур на нем может быть непрерывно стянут в точку) имеет в точности такую же топологическую структуру, что и трехмерная сфера (граница четырехмерного шара). Тем самым такой геометрический объект можно непрерывно деформировать в эту самую сферу.

Ну а теперь – краткая история вопроса...

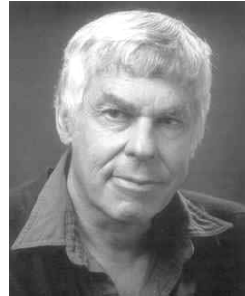
3. Как это было?

В том самом 1900 году, когда Гильберт выдвинул свои знаменитые проблемы математики двадцатого века, Анри Пуанкаре публикует статью, посвященную топологическим свойствам трехмерной сферы. В этой работе доказывалось утверждение, являющееся усиленным вариантом обсуждаемой гипотезы. Однако спустя некоторое время Пуанкаре обнаружил ошибку в своем доказательстве. А в 1904 году он выдвигает свою знаменитую гипотезу, которую так и не смогли обосновать ни он сам, ни его ближайшие последователи. Наука того времени еще не знала средства для решения подобных задач...

В математике зачастую для анализа какой-то сложной конкретной задачи переходят к задаче более общей, которую иной раз удастся решить более простыми методами. В данном случае было бы естественным попробовать не привязываться к конкретной размерности, а попытаться обосновать более общее утверждение, которое называют *обобщенной гипотезой Пуанкаре*.

*Любое замкнутое односвязное n -мерное
многообразие гомеоморфно n -мерной сфере.*

Отказ от конкретизации размерности принес свои плоды. В 1960 году американский тополог **Стивен Смейл** доказывает обобщенную гипотезу Пуанкаре... но не для общего случая. Метод Смейла прекрасно работал при $n \geq 5$ и оказывался принципиально не применимым в случае меньшей размерности. А в 1982 году другой американский математик – **Майкл Фридман** качественно иным способом обосновывает обобщенную гипотезу Пуанкаре для $n = 4$. Но трехмерный случай, который и соответствовал основной (не обобщенной) гипотезе Пуанкаре по-прежнему не поддавался анализу...



Стивен Смейл
р. 1930 г.



Майкл Фридман
р. 1951 г.

Странная получалась ситуация. Вся история развития математики, казалось бы, говорила о противоположном – чем выше размерность, тем сложнее задача. К примеру, решение квадратного уравнения по силам любому школьнику. С кубическим уравнением уже возникают проблемы, хотя и оно решается. Еще сложнее выглядит формула решения уравнения четвертой степени. А вот для более высоких степеней решение алгебраического уравнения общего вида уже принципиально нельзя выразить в радикалах... Теория уравнений Навье – Стокса на плоскости достаточно хорошо разработана уже давно. А вот аналогичные результаты для пространства до сих пор отсутствуют. Собственно, эти вопросы, выводящие на физическое явление турбулентности, как раз и составляют одну из Математических проблем тысячелетия... Но с многообразиями картина получается совершенно иная. Многообразия сколь угодно большой размерности гораздо легче поддаются анализу, чем четырехмерные. А трехмерный случай почему-то вообще оказывается самым сложным... А вот двумерный случай, напротив, был известен уже самому Пуанкаре, что в еще большей степени подчеркивает особый характер именно трех измерений.

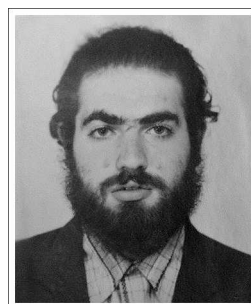
Двадцатый век так и не смог осилить гипотезу Пуанкаре. Вот так она и попала в число важнейших математических проблем нового тысячелетия. Так неужели на ее решение и впрямь отводится тысяча лет? Ответа на этот вопрос долго ждать не пришлось...

11 ноября 2002 года в Интернете была выставлена некая странная статья (см. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0211159>). А 10 марта 2003 года в дополнение к тем 39 страницам опять-таки в Интернете появляется новая работа (<http://arxiv.org/abs/math.DG/0303109>) на 22

страницах. Ее автор, назвавшийся Гришей (именно так!) Перельманом, объявляет о том, что ему удалось обосновать гипотезу Пуанкаре...

В течение нескольких лет ведущие математики всего мира тщательно проверяют представленное доказательство. И выносят однозначную резолюцию – доказательство верно! В 2006 году Перельману присуждают наиболее престижную из математических наград – *медаль Филдса*, а влиятельный научный журнал *Science* называет это достижение главным научным результатом года. Это был первый случай, когда таким образом отмечалось исследование в области математики – уж очень далека ее современная проблематика от понимания простыми людьми! В 2007 году Перельман попадает в Список ста ныне живущих гениев по версии газеты *The Daily Telegraph*, где занимает девятое место. Другая известная газета *The Guardian* называет Перельмана самым умным человеком на планете. И, наконец, 18 марта 2010 года Математический институт Клея объявляет о том, что гипотеза Пуанкаре (одна из проблем тысячелетия) официально признается решенной, а Перельману присуждается премия в один миллион долларов. Так кто же он, **Григорий Перельман**, человек, обосновавший гипотезу Пуанкаре?

Промелькнуло сообщение, что это сын того самого Якова Перельмана, изумительными книгами которого "*Занимательная физика*", "*Занимательная астрономия*", "*Живой учебник геометрии*" и др. зачитывалось не одно поколение школьников. Вроде бы и похоже... Наш Перельман – Яковлевич, оба они из Ленинграда... Вот только умер тот Перельман в 1942 году, за двадцать с лишним лет до рождения Григория. Значит, эта версия не годится... Так что же мы о нем знаем в действительности?



Григорий Перельман
р. 1966 г.

Григорий Перельман заявил о себе в 1982 году, взяв золотую медаль на Международной математической олимпиаде школьников в Будапеште. Начало многообещающее... Однако ежегодно кто-нибудь да побеждает на школьных олимпиадах... И где они сейчас, эти вчерашние победители?

Ну а Перельмана принимают без экзаменов в Ленинградский университет, где он учится отлично и даже становится ленинским стипендиатом... Впрочем, мало ли у нас отличников в каждом вузе?

А дальше – аспирантура, успешная защита кандидатской диссертации... Обычное начало карьеры молодого перспективного ученого. Открывалась неплохая перспектива защитить докторскую диссертацию лет эдак через десять, стать со временем уважаемым профессором в каком-нибудь приличном университете. А там, возможно, возглавить кафедру, печатать добротные статьи в приличных журналах, обрасти учениками, сидеть в президиуме различного рода конференции, выигрывать международные гранты...

Ну а Перельман в конце восьмидесятых получает приглашение на работу в США... Немало толковых молодых ученых во времена перестройки и развала Советского Союза нашли себе достойное пристанище в Америке или в Европе... Впрочем, в Америке он надолго не задержался, а вернулся в родной Ленинград, что уже само по себе было не столь типично... В 1996 году тридцатилетний Перельман был принят на работу ведущим научным сотрудником Ленинградского отделения Математического института Российской Академии наук имени Стеклова. Ну а что было дальше – известно...

В 2002 году ему уже было 36 лет. Не столь уж юный возраст для большого математика... Галуа умер в 20 лет, Абель – в 26, Риман – в 39. Гаусс превзошел своих современников, когда ему едва перевалило за двадцать... Впрочем, время тогда было другое... А в конце двадцатого века Эндрю Уайлс доказал теорему Ферма, имея сорок лет от роду...

Но вернемся к Перельману. Было в этом что-то странное... Вместо того, чтобы послать свою работу в серьезный профильный журнал, где она сразу же привлечет внимание ведущих мировых специалистов, он выставляет свое доказательство в Интернете, этой свалке всевозможной (чаще всего, не доброкачественной) информации...

Так не принято в научном мире... Ну а зачем нужна эта странная подпись – Гриша Перельман?

К тому же доказательство его в значительной степени носило характер тезисов. Для того чтобы претендовать на медаль Филдса или премию Клея, доказательство положено дать полное, причем опубликовать его непременно следует в солидном журнале. От Перельмана этого и ждали, полагая, что выход в Интернет нужен был ему, чтобы утвердить свой приоритет... Однако никаких активных действий со стороны Перельмана больше не наблюдалось... Впрочем, нет... Один шаг он все же сделал – уволился с работы и стал фактически безработным... Он даже не защитил докторскую диссертацию. И это в то время, когда в любом дворовом ПТУ (пардон, университете!) поголовье докторов наук исчисляется десятками...

А тем временем группа американских и китайских математиков по тем двум статьям Перельмана тщательно восстанавливает полное доказательство гипотезы Пуанкаре. В результате получился трактат, объемом более четырехсот страниц... Потом некоторые участники этой работы будут говорить, что они-то и решили проблему тысячелетия, в то время как Перельман окончательного результата не имел...

Но крупнейшие математические авторитеты высказались четко и однозначно – в статьях Перельмана уже содержится все, что надо. Автор доказательства – он и никто другой... А дальше ему присудили медаль Филдса, игнорируя в виде особого исключения тот факт, что доказательство не было опубликовано по всем правилам и вообще не было полным... А что же Перельман? Он... отказывается от медали, не желая даже внятно объяснить свою позицию. Его пытаются уговорить, но безрезультатно...

Президент Международного союза математиков Джон Болл лично приезжает в Санкт-Петербург и два дня умоляет Перельмана отправиться в Мадрид и принять заслуженную награду из рук самого короля Испании. Но Перельман остается непреклонным. Он не появляется на публике. Не желает ни с кем встречаться. Скрывается от журналистов. Живет затворником с матерью в плохонькой квартире на окраине Петербурга, фактически не имея особых средств к существованию... И решительно отказывается от заманчивых предложений, поступающих из ведущих университетов мира. Отказывается и от премии Европейского математического сообщества...

А дальше – присуждение премии Клея в миллион долларов... И вот уже домохозяйки на кухне заключают пари – возьмет или не возьмет? Уже забыта проблема Пуанкаре и прочая математика... Только и разговору вокруг... Возьмет! Нет, не возьмет! А вдруг не устоит? Этот нездоровый ажиотаж прекрасно отразил в своих стихах Игорь Иртеньев:

*Что ты уперся как баран?
Хорош держать фасон!
Кончай ломаться, Перельман,
Возьми свой миллион.*

Не взял. Но почему так? Трудно сказать... Не всё поддается объяснению с позиции элементарной логики и здравого смысла... Бывают такие люди... Вспоминается блистательный Ферма, занимающийся математикой для души, в свободное от работы время и даже не задумывающийся о необходимости публикации своих результатов... Великий Гаусс, запершийся в обсерватории и отказывающийся общаться с людьми... Гениальный Галуа, провалившийся на вступительном экзамене по математике в университет... Янош Бояи, один из основоположников неевклидовой геометрии, вообще забросивший математику и умерший в неизвестности... Александр Гротендик, один из крупнейших математиков двадцатого века, решительно отошедший от дел, находясь в зените славы...

"Я исполнен глубокой симпатии и восхищения к его внутренней силе и чистоте, к его способности быть верным себе, — говорит американский учёный Уильям Тёрстон, известный тополог, обладатель медали Филдса за 1982 г. *— Мы научились у Перельмана*

математике. Возможно, нам также стоит подумать о себе и поучиться его отношению к жизни".

О чем думает Григорий Перельман? Принесет ли он миру еще какие-то новые открытия? А что этот мир может дать Перельману?

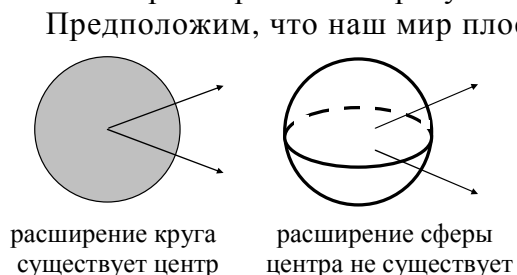
Заключение

Всё это прекрасно... Но возникает еще такой вопрос – а какое дело нам, простым смертным, до этой самой трехмерной сферы, в которую по мысли Пуанкаре, подтвержденной Перельманом, можно отобразить это самое многообразие? Это представляется какими-то заоблачными премудростями, совершенно оторванными от наших реалий. Но так ли уж всё это абстрактно?

В 1929 году американский астроном **Эдвин Хаббл** экспериментально установил явление, названное впоследствии *законом Хаббла*. Согласно этому эффекту скорость разбегания галактик в любом направлении тем больше, чем больше расстояние до них. На основе этого явления было сделано заключение о том, что Вселенная расширяется. Попробуем как-то с этим разобраться...



Эдвин Хаббл
1889 – 1953



Предположим, что наш мир плоский, имеет форму круга, а мы находимся в самом его центре. Вокруг нас на различных расстояниях располагаются звезды и галактики. Пусть теперь этот наш круг расширяется, и мы измеряем скорость движения галактик. Очевидно, чем дальше галактика будет располагаться от нас (от неподвижного центра круга), тем выше будет ее скорость удаления. Нечто подобное и обнаружил Хаббл...

Однако описанная модель расширяющейся Вселенной имеет существенный изъян – она предполагает существование центра Вселенной, в котором якобы мы и находимся. Приятно, конечно, считать себя центром мироздания, но хотелось бы все-таки соблюсти объективность! Из этой ситуации можно легко выйти, если предположить что наша Вселенная – не круг, а поверхность шара. Если теперь этот шар расширяется, то окажется, что чем дальше располагаются две точки на этой поверхности друг относительно друга, тем быстрее они будут разбегаться. Мы получаем тот же самый закон Хаббла, но все точки Вселенной (точки на сфере) оказываются совершенно равноправными.

Этот вариант представляется более естественным. Но как круг, так и поверхность шара являются двумерными, в то время как наш мир, как будто, трехмерен... Так какую же форму тогда может иметь Вселенная? Если это какое-то подобие шара, то мы вновь (как и в случае круга) приходим к существенному неравноправию ее точек и наличию абсолютного центра. В плоском случае мы вышли из этого положения, перейдя от круга (двумерного шара) к поверхности трехмерного шара. Значит, для трехмерной Вселенной нам, по-видимому, следует перейти от трехмерного шара к поверхности шара четырехмерного. А это уже будет... Да, да! Та самая трехмерная сфера Пуанкаре!

А почему обязательно сфера? Возможно, это будет какой-то другой геометрический объект, сохраняющий основные (топологические!) свойства трехмерной сферы? Что это может быть? Не об этом ли говорит гипотеза Пуанкаре? Трехмерное замкнутое связное многообразие!

От закона Хаббла отталкивается господствующая в наше время космологическая теория *Большого Взрыва*, согласно которой Вселенная возникла из некоторой сингулярной точки, после чего она постоянно расширяется, т.е. подвергается некоторому преобразованию. А в гипотезе Пуанкаре идет речь о гомеоморфизмах – преобразованиях, которые обратимы, причем как прямое, так и обратное преобразования непрерывны. Расширение – преобразование непрерывное. Обратным к нему будет также непрерывное

преобразование сжатия. Значит, наряду с расширением Вселенной из точки можно рассмотреть и обратное преобразование сжатия в точку. Но о стягивании в точку также говорить в гипотезе Пуанкаре... Похоже, что утверждение это не столь уж абстрактно и проливает некоторый свет на возможную структуру мироздания...

В бескрайних просторах Вселенной среди великого множества звезд есть одна, на первый взгляд ничего особо не примечательная. На одной из ее планет когда-то по неясным причинам появилась жизнь. А потом обитатели этого мира обрели разум и стали селиться в городах. На окраине одного из таких городов под названием Санкт-Петербург в маленькой квартире живет Григорий Перельман, безработный кандидат наук...

Литература

1. Комацу М. Многообразие геометрии. – М., Знание, 1981.
2. Проблемы Гильберта. Сборник под редакцией П. С. Александрова. – М., Наука, 1969.
3. Рид К. Давид Гильберт. – М., Наука, 1977.
4. Тяпкин А., Шибанов А. Пуанкаре. – М., Молодая гвардия. – 1982.
5. Шаров А. Человек, открывший взрыв Вселенной: Жизнь и труд Эдвина Хаббла. – М., Наука, 1989.
6. Devlin K. The Millennium Problems: The Seven Greatest Unsolved Mathematical Puzzles of Our Time. – Basic Books, 2002.
7. Perelman G. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, 2002. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0211159>.
8. Perelman G. Ricci flow with surgery on three-manifolds, 2003. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0303109>.