

С.Я. Серовайский
НА ПУТИ К ЭКСТРЕМУМУ. Часть 1.

Всё к лучшему в этом лучшем из миров.

Франсуа Мари Вольтер

Мы поговорим о математических методах поиска минимумов и максимумов. Это интереснейшее направление выводит на широкий комплекс разнообразных задач значительной сложности с важными практическими приложениями. Именно в рамках этого направления решаются задачи о выборе такого варианта развития событий, который обеспечил бы в наилучшей степени достижение желаемой цели. Над этими проблемами работали величайшие математики всех времен – Ферма и Лейбниц, Эйлер и Лагранж, Вейерштрасс и Гильберт, и многие, многие другие. Данная работа – первая из двух. В ней охватывается период от древнейших времен до 18 века, завершающийся работами Леонарда Эйлера.

1. Что такое теория экстремума?

Тысячелетиями развитие человечества упорно шло по экстенсивному пути. Когда стая неожиданно обнаруживала, что вокруг уже недостаточно вкусных плодов, она перекочевывала на новое место, где еще было, чем поживиться. Когда еще недавно тучные пастбища оскудевали, племя спокойно перегоняло скот в более благодатные земли. Когда разведанные запасы полезных ископаемых истощались, люди отправлялись на поиски новых месторождений. Когда мускульных усилий человека и животных оказывалось уже не достаточно для поддержания комфортной жизни, в дело пошло электричество. Когда возникли трудности с передвижением по освоенной территории, на смену медлительной маломощной карете пришли паровоз, автомобиль и самолет. Когда человечество стало не справляться со всё возрастающим потоком информации, на помощь были призваны быстрые компьютеры...

Однако со временем становилось всё более отчетливо ясно, что имеющиеся в нашем распоряжении резервы далеко не безграничны. Все мало-мальски пригодные для жизни земли уже давно освоены. Новые богатые месторождения полезных ископаемых можно теперь обнаружить лишь в трудно доступных местах – на большой глубине, на дне моря, в тундре, где их добыча сопряжена с большими денежными затратами. Всё более быстрые и комфортные виды транспорта требуют огромных затрат топлива и создают серьезную угрозу для окружающей среды, а ущерб от транспортных катастроф уже сопоставим со стихийными бедствиями и локальными войнами. Фундаментальные научные открытия мирового класса, определявшие ход развития цивилизации в течение последних тысячелетий, становятся всё более редкими...

И в этих условиях всё более настойчиво приходит в голову мысль о том, что неплохо было бы не столько делать ставку на поиск еще не задействованных резервов, сколько подумать над рациональным использованием тех ограниченных средств, которые уже имеются в нашем распоряжении. И здесь нам приходит на помощь один из наиболее глубоких, бурно развивающихся и практически важных разделов математики – *теория экстремума*.

Любое произошедшее явление природы и общества непременно обусловлено какими-то причинами. Меняется причина – изменится и следствие из нее. Но коль скоро мы способны регистрировать разные варианты причины и следствия, существуют какие-то характеристики на входе и выходе системы, принимающие различные количественные значения. Отталкиваясь от соответствующих законов природы, мы, в принципе, можем установить функциональную зависимость выходных характеристик системы от ее входных характеристик. Математические соотношения, выражающие такую зависимость, образуют *математическую модель* исследуемого процесса. Все мыслимые приложения математики неизменно предполагают наличие какой-либо математической модели рассматриваемого явления и основаны на всестороннем анализе этой самой модели.

Если мы не имеем принципиальной возможности активного вмешательства в рассматриваемый процесс, то все последующие события будут строго детерминированы в том смысле, что произойдут сами собой. А нам остается лишь пассивно наблюдать за ходом происходящего, ограничившись, быть может, прогнозом ожидаемого исхода. Другое дело, когда предоставляется определенная свобода выбора условий проведения процесса, когда мы можем в той или иной степени вмешаться в него. Это означает, что имеется какая-либо величина (или даже несколько таких величин), которую мы можем менять по собственному разумению. Эта величина, называемая *управлением*, непременно должна входить в математическую модель изучаемого явления.

В таких условиях рассматриваемая система оказывается управляемой, и тогда перед нами открывается возможность поставить задачу рационального выбора управляющего воздействия. Тем самым предполагается наличие некоторого *критерия оптимальности*, меняющегося в зависимости от выбора управления и последующих в этой связи изменений состояния данной системы. Цель задачи здесь состоит в таком управлении системой, чтобы имеющийся критерий оптимальности достиг своего *экстремума* – минимума или максимума. К примеру, мы можем пожелать добиться максимального выхода выпускаемой продукции, достижения ее наивысшего качества, проведения процесса с наименьшими затратами, за минимальное время, с наименьшими рисками и т.д.

Ну и еще следует иметь в виду, что возможности управления системой, как правило, весьма ограничены, т.е. управление следует выбирать с учетом заданных *ограничений*, которые могут иметь различный характер. Так например, мы можем быть связаны денежными или сырьевыми ресурсами, техническими возможностями системы, технологией производства, принятыми обязательствами и т.д.

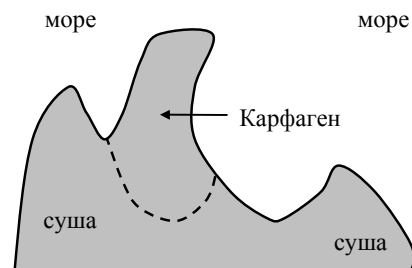
В итоге получается *задача оптимального управления*, которая состоит в выборе такого управления, чтобы имеющийся критерий оптимальности, связанный с управлением посредством математической модели процесса, достиг своего минимального или максимального значения при соблюдении имеющихся ограничений. Задача эта относится к *теории экстремума*, предметом которой как раз и является поиск экстремумов величин различного вида на произвольных множествах.

2. Предыстория

Решением экстремальных задач люди занимались с глубокой древности. К примеру, известно предание об основании города Карфагена. Легенда гласит о том, что финикийская царевна **Дидона** где-то в 9 веке до нашей эры высадилась на средиземноморском побережье Африки в районе современного Туниса и обратилась к вождю местного племени с просьбой выделить ей некоторую территорию. Угрюмый вождь был не очень-то склонен идти на уступки неведомым и незванным пришельцам. Упорной Дидоне с немалым трудом удалось выклянчить у него самую малость – часть территории, которую можно было бы охватить одной шкурой быка. Должно быть, туземцы долго смеялись над наивными чужестранцами...

Однако хитрая Дидона разрезала шкуру на узкие ремни, сплела из них веревку и огородила ею изрядную территорию, на которой и был основан Карфаген. Естественно, при этом возникла задача: как охватить данной веревкой максимальную территорию? *Задача Дидоны* обладает всеми признаками указанных ранее задач оптимального управления. Здесь уже есть управление – форма кривой, ограничивающей территорию;

есть критерий оптимальности – площадь объекта, ограниченного выбираемой кривой; есть и ограничение на систему – длина кривой (той самой веревки) заранее фиксирована. Понятно, что замкнутая кривая, ограничивающая фигуру максимальной площади – это окружность. Однако в том случае, когда события происходят на морском побережье с достаточно сложной береговой границей, которая не берется в расчет (веревкой огораживается только часть суши), задача Дидоны оказывается далеко не тривиальной...



Вслед за финикийскими мореплавателями в море отправились греки. Зарождение практически всех математических направлений восходит к Древней Греции. Естественно, греческие математики не обошли своим вниманием и простейшие экстремальные задачи, возникающие, как правило, в геометрии. В частности, у **Евклида** мы встречаем задачу определения ближайшего расстояния от точки до прямой, у **Архимеда** – задачу определения прямоугольника заданного периметра с максимальной площадью, у **Аполлония** – совсем уже не простую задачу определения минимального расстояния от заданной точки до эллипса... Однако эти блестящие геометры еще не владели какими-либо общими методами поиска экстремумов.

Работы греческих математиков вдохновили крупнейших мыслителей средневекового Востока. Так, в 9 веке выдающийся арабский математик **Сабит ибн Курра**, переводчик и комментатор Архимеда, характеризует наибольшие и наименьшие сечения цилиндра, обладая значительными познаниями в области отыскания экстремумов...

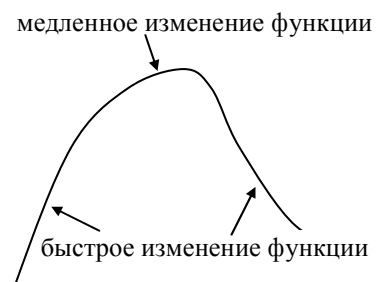
Труды восточных мудрецов со временем проникают в Европу, где начиналась эпоха Возрождения. И вот уже в 14 веке француз **Николя Орем** высказывает глубочайшую мысль о том, что в окрестности точки экстремума скорость изменения функции практически сходится к нулю. В последствии из этого наблюдения и зародилась математическая теория экстремума. Существенный шаг в этом направлении сделал выдающийся немецкий астроном **Иоганн Кеплер**...



Иоганн Кеплер
1571 – 1630

А всё началось с того, что в один год выдался небывалый урожай винограда. А вот винных бочек не хватало... И тут кому-то из виноделов пришлось в голову обратиться за помощью к Кеплеру, славившемуся своим умением мастерски проводить разнообразные расчеты. Его попросили рассчитать формы бочек максимальной вместимости. Прекрасно знакомый с работами греческих и арабских математиков, Кеплер с энтузиазмом взялся за решение этой проблемы. Итогом стал небольшой труд под удивительным названием "*Новая стереометрия винных бочек*". В нем фактически были заложены основы дифференциального и интегрального исчисления. А решая задачу о повышении вместимости бочек при заданных затратах материала (вспомним близкую по смыслу задачу Дидоны), Кеплер

замечает, что основной признак максимума состоит в том, что отличие значения самого максимума от предшествующих и последующих значений весьма незначительно. Тем самым в окрестности максимума функция, выражающая объем тела, практически не меняется. Эта мысль, высказанная ранее Оремом, подтверждалась здесь строгими расчетами и иллюстрировалась геометрическими примерами...



Идеи Кеплера были подхвачены математиками следующего поколения. И лишь с этого момента можно уже говорить о полноценном начале теории экстремальных задач.

3. Начала теории экстремума

Вообще-то, он был совсем не математиком, а юристом по образованию. И проработал он всю свою жизнь юридическим советником при муниципалитете города Тулузы – центра французской провинции Гасконь, известной миру благодаря бессмертным творениям Дюма. Кстати, и время действия совпадает – первая половина 17 века, когда во Франции царил Людовик XIII, при котором и совершали свои подвиги отважные мушкетеры. Однако в истории мировой цивилизации главным гасконцем того времени был никак не бравый Д'Артаньян, а этот скромный муниципальный чиновник... Его звали **Пьер Ферма**.

При имени Ферма естественно вспоминается его знаменитая теорема, будоражившая в течение столетий умы величайших математиков. Но дело не только в этом загадочном утверждении. Ферма стоит у истоков многих разделов математики. Это, конечно же, относится к теории чисел, где та самая теорема является лишь наиболее известным, но далеко не единственным результатом. Это относится и к аналитической геометрии, где ему принадлежит метод координат (Ферма пришел к нему раньше Декарта). А в математическом анализе он владел элементами дифференциального и интегрального исчисления еще до Ньютона и Лейбница. А еще его считают одним из основоположников теории вероятностей, комбинаторики, теории игр. Что же касается теории экстремума, то здесь можно сказать просто – настоящая математическая теория экстремума начинается именно с Ферма.



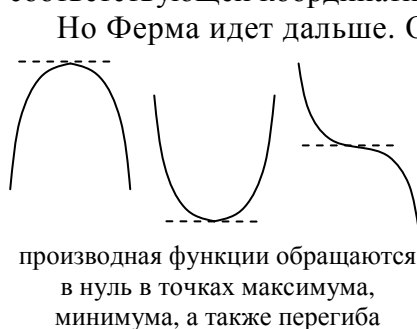
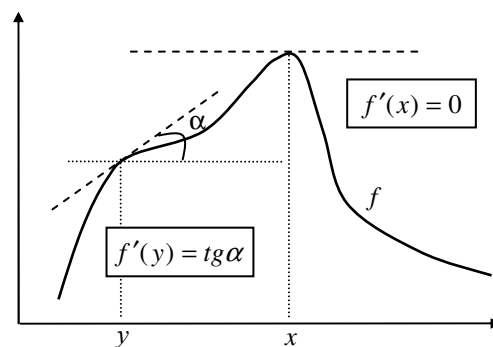
Пьер Ферма
1601 – 1665

Отметим, что Ферма обладал явными преимуществами по сравнению со своими предшественниками. Все они от древних греков и до Кеплера работали главным образом с геометрическими объектами. Однако в отличие от них Ферма уже мог представить геометрический объект аналитически – с помощью некоторой функциональной зависимости. Собственно, в этом-то и состоит смысл введения декартовой системы координат, к которой он, как уже отмечалось, пришел раньше самого Декарта. Владел Ферма и математической символикой, введенной ранее Франсуа Виетом и усовершенствованной Декартом. Тем самым Ферма был первым исследователем, у которого был на руках необходимый аппарат для решения главной задачи – найти общий метод отыскания экстремума функции. И такой метод был им действительно разработан.

На современном языке основной результат Ферма звучит так – *функция в точке экстремума имеет производную, равную нулю*. Таким образом, для нахождения экстремума некоторой функции $f = f(x)$ следует вычислить ее производную $\frac{df}{dx}$, обозначаемую для краткости f' , и приравнять эту производную нулю. Если в некоторой точке x данная функция имеет экстремум, то ее производная $f'(x)$ в этой точке непременно обращается в нуль. Таким образом, мы приходим к необходимости нахождения таких значений x , которые удовлетворяют соотношению $f'(x) = 0$. Поскольку производная от известной функции сама является конкретной функцией, последнее соотношение оказывается алгебраическим уравнением относительно искомой величины x . Тем самым Ферма указал общий принцип нахождения экстремумов функций, сведя поставленную экстремальную задачу к решению алгебраических уравнений. К примеру, если дана функция, характеризуемая равенством $f(x) = x^2$, т.е. парабола, то ее производная $f'(x) = 2x$ обращается в нуль в единственной точке $x = 0$. Это и есть точка минимума параболы.

Как известно, производная функции характеризует скорость ее изменения. Утверждение

Ферма таким образом означает, что в точке экстремума скорость изменения функции равна нулю, т.е. в окрестности этой точки функция практически не меняется. Этот результат является четким математическим воплощением той самой мысли, высказанной ранее Оремом и Кеплером. С геометрической точки зрения, производной функции в точке соответствует тангенс угла наклона касательной к рассматриваемой функции в этой точке. Тогда в геометрической интерпретации утверждение Ферма говорит о том, что в точке экстремума тангенс угла наклона касательной равен нулю, а значит, сама касательная оказывается параллельной соответствующей координатной оси.



производная функции обращается в нуль в точках максимума, минимума, а также перегиба

Но Ферма идет дальше. Он замечает, что производная обращается в нуль в равной степени в точках минимума и максимума функции, а также в точках ее перегиба. Тем самым полученное им равенство оказывается *необходимым*, но, вообще говоря, не достаточным *условием экстремума*. И Ферма дает рекомендации – определив всевозможные решения x уравнения $f'(x) = 0$, следует проанализировать поведение функции в окрестности этих решений. Если при переходе через точку производная функции меняет знак с плюса

на минус, то мы имеем дело с максимумом, а если с минуса на плюс – то с минимумом. Ну а когда производная в данной точке не меняет знак, сама функция оказывается монотонной, а значит, здесь мы имеем дело уже с точкой перегиба. Таким образом, правила исследования функций на экстремум, знакомые ныне школьникам, в полной степени восходят к работам Ферма.

Однако и здесь Ферма не останавливается. Этот самый юрист, занимающийся и математикой-то исключительно на досуге в свободное от работы время, обращается вслед за этим почему-то... к оптике. Он задается вопросом – *как распространяется свет в неоднородной среде?* Весьма актуальный вопрос для чиновника муниципалитета...

И он выдвигает поразительную мысль, вошедшую в учебники физики под названием *принципа Ферма*. Оказывается, *свет от одной заданной точки к другой распространяется таким образом, чтобы время его движения было минимальным*. Понятно, что в однородной среде скорость света постоянна, а потому он распространяется прямолинейно. А вот в неоднородных средах ситуация меняется. И Ферма блестяще выводит из своего принципа *законы преломления света*, крайне важные, к примеру, для расчета всевозможных оптических приборов.

Обратим внимание на тут легкость, с которой Ферма обращается с таким понятием, как скорость света, за сотни лет до Эйнштейна. Отметим и то, что здесь впервые было показано, что законы природы могут быть сформулированы на языке экстремальных задач. Сама природа оказывается устроенной в некотором смысле рационально, коль скоро среди всех потенциально возможных маршрутов движения света по каким-то загадочным причинам выбирается именно тот, который соответствует минимальному времени на преодоления пути от одной заданной точки к другой. А действительно, почему так?

Однако для теории экстремума важно другое. Принцип Ферма являл собой качественно более сложную математическую задачу. Здесь искомой величиной оказывалась траектория движения света от одной точки к другой, т.е. некоторая функция в целом. И каждой такой функции соответствовало число – время на преодоления пути света по выбранной траектории. В математике преобразования, которые ставят в соответствие каждой функции конкретное число, называются *функционалами*. Принцип

Ферма тем самым был связан с задачей минимизации функционалов, ставшей впоследствии ведущим направлением теории экстремума.

Для функции одной переменной аргументом служит число, для функций многих переменных – сразу несколько чисел, которые можно интерпретировать как компоненты вектора соответствующей размерности. Функция одной или нескольких переменных, таким образом, оперирует с объектами *конечномерной* природы. А вот аргументом функционала служит уже вся функция в целом (в данном случае, траектория движения света). Ее принципиально невозможно описать с помощью конечного числа параметров. Мы явно сталкиваемся здесь с *бесконечномерным* объектом.

Если при решении задач минимизации функции одной или нескольких переменных прекрасно работает аппарат классического математического анализа, то для эффективной работы с функционалами требуются существенно более мощные средства. Анализ бесконечномерных объектов или *функциональный анализ* появился только в начале 20 века. Его возникновение в значительной степени было стимулировано потребностями новой теории экстремума, истоки которой восходят к оптическому принципу Ферма. Однако для этой математики еще предстояло пройти долгий путь... А пока следом за Ферма к разработке теории экстремума подключались крупнейшие математики последующего поколения.

Прямым последователем Ферма был **Готфрид Вильгельм Лейбниц**, прославившийся наряду с Ньютоном разработкой дифференциального и интегрального исчисления. Человек он был на редкость разносторонним. К примеру, был он крупнейшим философом своего времени. Философ Лейбниц учил тому, что мир наш не является строго детерминированным. И если в мире происходят те или иные события, то это совсем не значит, что данный исход является единственно возможным. Напротив, допустимы, в принципе, и другие варианты развития событий. Так почему же тогда среди всех потенциально возможных вариантов на практике реализуется какой-то один? И Лейбниц уверенно отвечает – в мире всё рационально. Природа стремится к оптимуму. Среди всех возможных исходов на практике реализуется самый лучший. Стремление природы к наилучшему варианту развития событий является по Лейбницу главным законом мироздания. А все законы природы – не более чем следствия этого основополагающего принципа. Понятно, что оттапливался при этом Лейбниц от принципа Ферма, с работами которого он был прекрасно знаком.



Готфрид Лейбниц
1646 – 1716

Ну а как математик, Лейбниц усилил результаты Ферма. Если тот работал исключительно с многочленами, то Лейбниц распространил условие равенства нулю производной в точке экстремума на функции общего вида. Уж он, как разработчик дифференциального исчисления, с производными умел работать лучше, чем кто бы то ни было, если не считать, конечно, Ньютона...

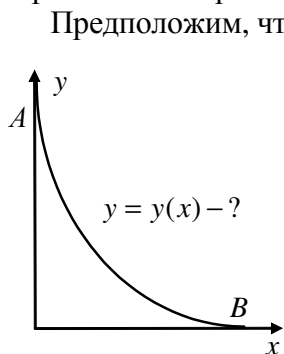
Кроме того, Лейбниц отметил особую важность знака второй производной при исследовании уравнения $f'(x) = 0$. В частности, если вторая производная данной функции $f''(x)$ на решении этого уравнения положительна, то мы имеем дело с минимумом функции, а если отрицательно – то с максимумом. Тем самым были получены *условия экстремума второго порядка* (по числу производных, используемых в процессе анализа).

С Лейбницем в теории экстремума связано еще одно чрезвычайно важное событие, на котором стоит остановиться особо.

4. Великое состязание

Одним из наиболее талантливых учеников Лейбница был **Иоганн Бернулли**. На самом финише 17 века в 1696 году он стал инициатором беспрецедентного состязания ведущих математиков того времени. Бернулли вспомнил об одной задаче, которую решал в самом начале этого века Галилей. Речь идет о движении тела под действием

собственного века. Если речь идет просто о падении, то ситуация предельно ясна – тело падает вертикально вниз... Ну а если начало и конец располагаются не на одной вертикальной прямой? И что тогда? Тогда как-то непонятно...



Предположим, что мы имеем две точки A и B в вертикальной плоскости. Мы соединяем их гибким проводом, через который пропускаем некое тело, имеющее отверстие. Задача состоит в том, чтобы определить, какую форму следует придать этому проводу, чтобы тело, двигаясь исключительно под действием собственного веса, преодолело путь от верхней точки до нижней за минимальное время? Нечто похожее рассматривал Ферма при установлении законов преломления света. Но там-то фактически рассматривался случай, когда среда состояла из двух частей, каждая из которых однородна, а значит, свет в ней распространяется прямолинейно. Искомая кривая была

тем самым ломаной линией... Ну а здесь искомым объектом является полноценная кривая совершенно неясного вида. Математика того времени еще не располагала какими-либо средствами решения подобных задач...

И что же сделал Бернулли? Он разослал постановку этой задачи во все крупнейшие научные центры Европы, благо таковых в то время было совсем не много. Крупнейшим математикам было предложено в заранее оговоренные сроки представить ее решение и продемонстрировать тем самым свою научную состоятельность. Да, это был настоящий вызов... Только вот кому?

В математическом мире конца 17 века безраздельно царили два величайших гения. Ими были, конечно же, Ньютон, а также Лейбниц, учитель Бернулли. Бросать вызов этим титанам науки было совершенно бессмысленно... Слов нет, Иоганн Бернулли был блестящим математиком. Но Ньютон и Лейбниц – вне всякой конкуренции. Математиков такого уровня за всю историю по пальцам посчитать можно. Нечего и думать было о том, чтобы их в чем-то превзойти... Ну если не они, то кто ж тогда?

Если не считать Ньютона и Лейбница, то математика того времени знала лишь одного человека, который пользовался в научном мире большей известностью, чем молодой Бернулли. Вот с ним-то и стоило потягаться... Словом, спор здесь мог идти, если можно так выразиться, за бронзовую медаль. Так кто же он – этот конкурент, единственный математик, уступавший двум непревзойденным исполинам, но превосходящий всех остальных. Его звали... Как бы вы думали? Бернулли. Якоб Бернулли, старший брат Иоганна и основоположник этого блистательного семейства математиков. История математики (а возможно, и науки вообще) не знает другого случая, когда одна семья дала миру более десятка первоклассных ученых, среди которых трое, пожалуй, могут быть признаны великими. Это двое упомянутых братьев, а также Даниил – сын Иоганна.



Иоганн Бернулли
1667 – 1748



Якоб Бернулли
1654 – 1705

математиков. История математики (а возможно, и науки вообще) не знает другого случая, когда одна семья дала миру более десятка первоклассных ученых, среди которых трое, пожалуй, могут быть признаны великими. Это двое упомянутых братьев, а также Даниил – сын Иоганна.

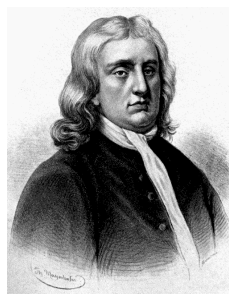
Якоб Бернулли – ближайший сподвижник Лейбница. Вслед за Ньютоном и Лейбницем он раньше других подключился к разработке основ математического анализа – дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов, теории функций. И немало в этом преуспел. Были у него и собственные оригинальные результаты, не имеющие аналогов у его прославленных старших современников. Взять, к примеру, закон больших чисел – один из глубочайших результатов теории вероятностей...

Якоб был первым учителем Иоганна. Это он познакомил того с Лейбницем и привлек его к настоящей научной работе. Ну а потом... Возможно, Якоб Бернулли, если можно так выразиться, «засиделся на третьем месте» и не заметил, как его юный брат (разница в возрасте у них – более десяти лет) уже состоялся как математик высочайшего класса. А

Иоганну, видимо, страстно захотелось показать, что он уже не в чем не уступает своему старшему брату и бывшему наставнику...

Так или иначе, состязание было объявлено. И к указанному сроку стали поступать решения задачи... Стоит ли удивляться тому, что одно из них представил сам инициатор состязания. Было бы странным, если бы Иоганн Бернулли не принял активного участия в этом деле. И было бы просто позором на весь мир, если бы он сам не смог бы эту задачу решить, притом, что кто-то другой нашел бы ее решение... Нет, задачу он решил мастерски. Однако оказался при этом далеко не единственным...

Как ни странно, к состязанию подключился сам Лейбниц. В то время было ему уже пятьдесят лет – возраст для математика не самый юный. Главные научные достижения, как будто, уже позади... А тут еще этот вызов... И возможно, Лейбниц заподозрил, что вызов брошен именно ему. Ведь это он – признанный глава научной школы, а Иоганн Бернулли – его ученик, как, впрочем, и его старший брат. Так, может быть, молодой и не в меру самоуверенный Бернулли решил показать, что способен в чем-то превзойти своего учителя? Ну уж нет! У Лейбница силы еще есть... И он еще на многое способен... Вот и эта, чрезвычайно сложная задача оказалась ему по плечу...



Исаак Ньютон
1643 – 1727

А еще одно решение пришло из Англии. Оно не было подписано, но, как было сказано, "по когтям узнаю льва" (есть такая римская пословица). В Англии был только один человек, способный решить эту задачу. **Исаак Ньютон**. Надо отметить, что как раз в то время шла отчаянная борьба между Ньютоном и Лейбницем за приоритет в области разработки дифференциального и интегрального исчисления.

– Кто же не знает, – с пеной у рта заявляли сторонники Ньютона, – что почтенный сэр Исаак пришел к своим открытиям гораздо раньше. А этот ваш Лейбниц подключился к делу, когда практически всё уже было полностью готово!

– А вот и нет! – решительно возражали их противники. – Всем известно, что результаты великого Лейбница были опубликованы намного раньше. А этот ваш Ньютон издал свои труды позднее, будучи уже знакомым с гениальными творениями Лейбница.

– А вам разве не известно, что перед этим Лейбниц был с дипломатической миссией в Англии? И встречался там с самим Ньютоном. Вот он, Лейбниц, опытный дипломат, прожженный политик, и выведал у наивного Ньютона (святого человека!) все его важнейшие идеи. Ну а потом быстро-быстро опубликовал их под своим именем...

– Так кто же не знает, что Ньютон – человек крайне мнительный, что он никогда и ни с кем своими идеями не делился. И уж тем более не стал бы он откровенничать с Лейбницем – своим главным конкурентом...

– Так ведь в то время Ньютон никак не мог заподозрить, что Лейбниц не какой-то там заурядный дипломат, но еще и толковый математик!

– Так ведь в то время и сам Ньютон еще не пользовался столь широкой известностью за пределами Англии!

И вот в самый разгар столь яростных дебатов было объявлено это самое состязание... И кем? Одним из учеников Лейбница! Так не стоит ли за всем этим в действительности сам коварный Лейбниц, решивший показать математическому миру, что он умнее всех? И Ньютон уже никак не может уклониться от вызова... Ну а подписывать свой труд он не стал... Желаящий и впрямь узнать льва по когтям...

Еще одно решение пришло из Франции. Его автором был **Гийом де Лопиталь**, пожалуй, самый сильный французский математик на тот период, автор первого в истории учебника по математическому анализу. Он известен математическому миру главным образом по правилу Лопиталья раскрытия неопределенностей при переходе к пределу. Впрочем, в действительности этот выдающийся результат принадлежал тому самому Иоганну Бернулли...

Но едва ли не самым полным оказалось решение, представленное Бернулли старшим. Якоб в очередной раз показал миру, что он по праву находится, если и не на самом математическом троне (место занято!), то уж, по крайней мере, в непосредственной близости от него... Впрочем, генеральная линия развития теории экстремума, да и всей математики в целом пошла от его младшего брата. Дело в том, что учеником Иоганна Бернулли был Леонард Эйлер. Ну а *задача о брахистохроне* (именно так называлась эта самая искомая кривая) стала для его исследований отправной точкой.

5. Покорение функционалов

Леонард Эйлер был, несомненно, крупнейшим математиком 18 века. Да и вообще едва ли кто из математиков за всю ее историю может сравниться с ним по продуктивности. Даже совершенно ослепнув к старости, он продолжал столь же интенсивно работать, так что за ним даже не успевали записывать, обрабатывать и публиковать его многочисленные результаты. В итоге после смерти еще много лет продолжали выходить его великолепные труды, так что, если кто не знал, тот мог бы подумать, что великий мастер жив и продолжает творить в полную силу. Нет такого раздела математики, в который он не внес свой ощутимый вклад. Естественно, не мог он обойти вниманием и теории экстремума, в становлении которой немалую роль сыграл его учитель. Интерес к этому направлению в значительной степени определялся и потребностями физики, где Эйлер также был признанным классиком.



Леонард Эйлер
1707 – 1783

Пусть, к примеру, мы хотим оценить затраты энергии в процессе движения какого-либо тела. Если в течение некоторого интервала времени τ_1 тратится в среднем энергия E_1 , то затраты энергии составят $E_1\tau_1$. Если за последующий интервал τ_2 неизменно расходуется энергия E_2 , то за всё это время затраты энергии будут равны $E_1\tau_1 + E_2\tau_2$. Пусть теперь у нас имеется интервал времени от 0 до T , а энергия меняется со временем по некоторому закону $E = E(t)$. Затраты энергии за это время можно приближенно оценить следующим образом.

Отрезок $[0, T]$ разбивается на малые части $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$. На каждом участке τ_i выбирается среднее значение энергии E_i . Тогда затраты энергии за всё время можно

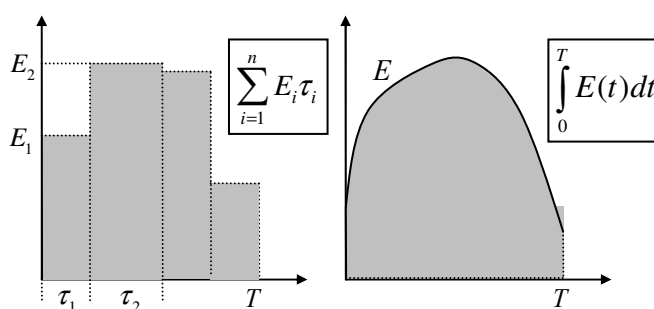
оценить суммой $\sum_{i=1}^n E_i\tau_i$. Этот результат будет тем точнее, чем больше мы выберем

участков на данном интервале. В пределе, когда разбиение неограниченно возрастает, а длина максимального из участков τ_i стремится к нулю, мы как раз и получаем желаемое значение затрат энергии. Определяемый таким образом математический объект называется

интегралом от функции E по заданному интервалу времени и обозначается через $\int_0^T E(t)dt$.

Этот интеграл геометрически будет равен площади фигуры, ограниченной кривой $E = E(t)$, прямыми $t = 0$ и $t = T$, а также осью t . В свою очередь, указанная ранее сумма складывается из площадей прямоугольников со сторонами τ_i и E_i . Понятно, что в пределе сумма

площадей этих прямоугольников стремится к площади указанной криволинейной фигуры, т.е. рассматриваемому интегралу.



Мы знаем, что энергия движущегося тела E складывается из его кинетической и потенциальной энергии. Кинетическая энергия определяется по формуле $\frac{mv^2}{2}$, где m есть масса тела, а v – его скорость. Учитывая, что скорость тела равна производной x' от его координаты x , находим значение $\frac{mx'^2}{2}$. Потенциальная же энергия, определяемая некоторой внешней силой F , равна работе, которая совершается при прохождении пути x под действием этой силы. Тем самым потенциальная энергия будет равна Fx . Подставляя найденные значения в формулу для затрат энергии, определяем величину

$$I = \int_0^T \left(\frac{mx'^2}{2} + Fx \right) dt.$$

Ну а дальше можно предположить, что тело будет двигаться по такому закону $x = x(t)$, чтобы затраты энергии в процессе движения были как можно меньше. Вспомним давнюю мысль Лейбница о том, что природа устроена рационально, что она стремится к оптимуму, к совершенству. И действительно утверждение о том, что среди всех возможных способов эволюции системы реализуется тот, который соответствует минимальным затратам энергии, называемое *принципом наименьшего действия*, является одним из глубочайших законов физики... Вот только как найти минимум от полученного интеграла?

Вот Ферма указал общий способ отыскания минимума функции $f = f(x)$. Для этого требуется приравнять нулю ее производную, т.е. решить алгебраическое уравнение $f'(x) = 0$. Этот результат без труда распространяется на функции многих переменных. В частности, если требуется минимизировать функцию $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то следует обратить в нуль ее производные по всем аргументам. В результате получаются соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

левая часть которого представляет собой производную от функции f по ее аргументу x_i . Принцип вычисления производных от заданной функции известен. Так, что последние равенства дадут систему n алгебраических уравнений относительно n неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$. А уж методы решения таких задач более или менее изучены...

Вот только в нашем случае минимизируется не функция одной или нескольких переменных, а функционал, определяемый интегралом I . Искомой величиной при этом оказывается не число x или набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые можно интерпретировать как вектор x с соответствующими координатами, а уже функция $x = x(t)$. Так обстояли дела и в задаче о брахистохроне. Но там речь шла об одной частной задаче. А Эйлеру хотелось бы разработать общий метод минимизации функционалов, подобно тому, как Ферма указал общий способ минимизации функций...

И Эйлер ставит задачу минимизации функционала, характеризуемого интегралом с подынтегральной функцией, произвольным образом зависящим от аргумента t , искомой функции x и ее производной x' . Таким образом, речь идет о поиске минимума интеграла

$$J = \int_0^T \Phi(t, x, x') dt,$$

где Φ есть известная функция своих аргументов. В частности, для задачи движения тела она равна

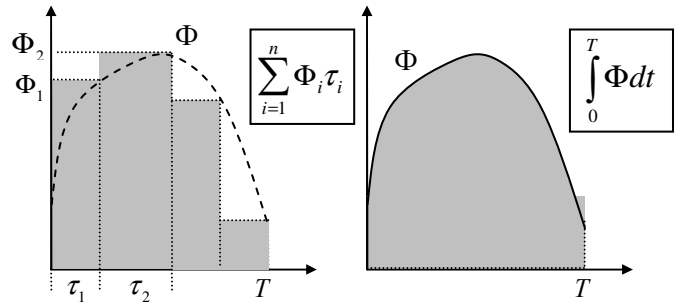
$$\Phi(t, x, x') = \frac{mx'^2}{2} + Fx,$$

где сила и масса считаются известными величинами.

Вот если бы речь шла о минимизации функции нескольких переменных, то эту задачу можно было бы решить уже известными методами. Но здесь-то искомой величиной, т.е. аргументом функционала является функция $x = x(t)$, т.е. объект, который характеризуется бесконечным числом параметров. Таковыми являются значения этой функции в произвольный момент времени из заданного интервала, а значений таких – бесконечное множество. И что же теперь делать?

Эйлер говорит: а давайте сведем эту задачу к минимизации функции многих переменных! Для этого отрезок $[0, T]$ можно разбить на части точками $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_n = T$.

Тогда, если точек этих выбрано достаточно много, то значение интеграла (т.е. площадь криволинейной фигуры, ограниченной функцией Φ), будет близко к сумме всевозможных значений $\Phi_i \tau_i$, т.е. площадей прямоугольников со сторонами $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ и Φ_i , в качестве которого



можно взять, например, значение функции Φ в точке t_i , т.е. величину $\Phi(t_i, x(t_i), x'(t_i))$.

Правда, сюда входит еще значение производной $x'(t_i)$ в данной точке, с которым не ясно как работать. Однако по определению производная – это отношение приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Приращение аргумента выбираем равным τ_i , а приращение функции – равным $x(t_i) - x(t_{i-1})$. Таким образом, при малых значениях τ_i производная $x'(t_i)$ будет примерно равна отношению

$[x(t_i) - x(t_{i-1})] / \tau_i$. В результате сумма $\sum_{i=1}^n \Phi_i \tau_i$, являющаяся приближенным значением

нашего интеграла J , будет зависеть не от бесконечного числа величин $x(t)$, где t – произвольная точка из отрезка $[0, T]$, а от конечного набора чисел $x_i = x(t_i)$, т.е. значений функции x исключительно на выбранном нами конечном наборе точек. В результате Эйлер получает ту самую задачу минимизации функции переменных x_i .

Ну а дальше – уже совсем просто. Вычисляем производные по каждой из этих переменных и приравниваем результат нулю. Ну а потом переходим к пределу, когда число рассматриваемых точек неограниченно возрастает, а длина максимального участка τ_i стремится к нулю. В итоге получилось соотношение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d\Phi}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial x'} = 0.$$

названное впоследствии *уравнением Эйлера*. Но вот что же это такое? Так сразу и не ясно.

Попробуем записать это равенство для полученного выше интеграла, выражающего затраты энергии. Очевидно, частные производные от имеющейся конкретной функции Φ по переменным x и x' принимают следующие значения:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x'} = mx'.$$

Подставим эти величины в уравнение Эйлера, учитывая, что производная по времени от произведения mx' равна произведению числа m на производную от скорости x' . Последняя же есть не что иное, как вторая производная x'' , т.е. ускорение. В результате получается равенство $F = mx''$, которое говорит о том, что сила равна произведению массы на ускорение. Но ведь это же... *второй закон Ньютона!*

Так что же мы получили вслед за Эйлером? Тот закон движения $x = x(t)$, который соответствует минимальным затратам энергии, в действительности характеризуется вторым законом Ньютона. Потрясающий результат! Ну это с физической точки зрения... А что же мы имеем в математике, и, в частности, в теории экстремума?

Точка минимума рассматриваемого конкретного функционала, выражающего затраты энергии, удовлетворяет равенству $F = mx''$, которое следует понимать как уравнение относительно искомой функции $x = x(t)$ (закона движения тела). Это уравнение называют *дифференциальным*, поскольку в него входит производная x'' от искомой величины. Дифференциальным оказывается и общее уравнение Эйлера, к которому сводится задача минимизации функционала J общего вида. Таким образом, если Ферма изобрел общий метод решения задачи минимизации функции путем сведения ее к алгебраическому уравнению (производная функции в точке минимума равна нулю), то Эйлер дал общий метод решения задачи минимизации функционала путем сведения ее тоже к уравнению, но теперь уже дифференциальному (уравнению Эйлера). Теория экстремума достигла тем самым значительных высот. Но впереди были еще более масштабные вершины...

Заключение. Что дальше?

А дальше пришел **Лагранж**, который разработал *метод вариаций*, ставший фундаментом классической теории экстремума – *вариационного исчисления*. А еще был **Лежандр**, научившийся отличать минимум функционала от его максимума. Были **Гамильтон** и **Якоби**, получившие новые законы вариационного исчисления. Было еще много великолепных результатов... А в середине 20 века силами **Беллмана**, **Понтрягина** и других математиков в теории экстремума сформировалось новое направление – *теория оптимального управления* со своей глубокой теорией и чрезвычайно важными приложениями. Но всё это – предмет отдельного разговора...

Литература

1. Белл Э.Т. Творцы математики. Предшественники современной математики. – М., Просвещение, 1979. – 255 с.
2. Белый Ю.А. Иоганн Кеплер. – М., Наука, 1971. – 295 с.
3. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины 19 столетия. – М., 1966. – 508 с.
4. Никифоровский В.А. Великие математики Бернулли. – М., Наука, 1984. – 176 с.
5. Погребысский И.Б. Готфрид Вильгельм Лейбниц. М., – Наука, 2004. – 271 с.
6. Тиле Р. Леонард Эйлер. Киев, Вища школа, 1983. – 191 с.
7. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М., Наука, 1986. – 190 с.