

## С.Я. Серовайский ДОСТИЖЕНИЕ ПРЕДЕЛА

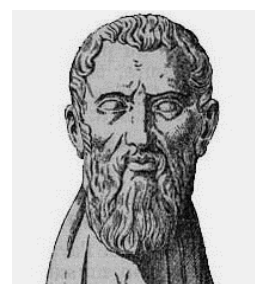
*Здание анализа в значительной мере возведено на песке.*

Герман Вейль

Математический анализ является в определенном смысле стержнем всей математики. Ну а в его основе лежит удивительное понятие предела. С помощью предела определяются непрерывная функция, ряд, производная, интеграл, без которых современная математика просто не мыслима. А потому понимание смысла предела открывает путь к глубинам настоящей математики. Первым шагом на пути постижения понятия предела была посвящена наша статья “*В поисках предела. Начала анализа*” (См. **Математика**. Республиканский научно-методический журнал, 2009, №№ 4-6). Дальнейший ход развития событий в этом направлении является предметом данной работы.

### На подходах

В предшествующей статье мы уже говорили о бурных событиях, произошедших в Греции примерно две с половиной тысячи лет назад. В пятом веке до нашей эры некий философ по имени **Зенон** выдвинул ряд хитроумных рассуждений, имевших далеко идущие последствия. Так, по замыслу Зенона знаменитый герой Ахиллес отправился в погоню за медлительной черепахой. Ахиллес, понятно, передвигается намного быстрее. Но пока он пробежит путь, разделявший его и черепаху изначально, та уползет вперед. На преодоление полученного расстояния быстрому Ахиллесу потребуется совсем немного времени. Но упорная черепаха за это время куда-то уползет. А когда Ахиллес достигнет того места, где только что была черепаха, та хоть немного, но продвинется вперед.



Зенон  
5 в. до н.э.

Очевидно, эти рассуждения можно повторять произвольное число раз... А значит, - заявляет торжествующий Зенон, - Ахиллес так и не догонит черепаху, как бы он не старался.

Всё это, казалось бы, вступает в противоречие со здравым смыслом. Ведь догонит же наш бравый герой черепаху в некоторой точке! Она-то и мыслится как *предел последовательности* точек, в которых пребывал Ахиллес в соответствующие моменты времени... Но Зенон не столь уж наивен. Его логика безупречна. Разве не бесконечен описанный им процесс? А если так, то каким же образом он может оказаться завершённым?

С Зеноном вступает в ожесточенный спор его младший современник **Демокрит**. По мнению Демокрита, должен существовать предел дробления, дальше которого выполнять описанные действия уже никак нельзя. Всё решится в тот самый момент, когда Ахиллеса и черепаху будет разделять интервал минимально допустимой длины. И вот уж тогда он её успешно догонит. А ведь верно! Предположив существование малого неделимого отрезка, мы благополучно минуем ту изощренную ловушку, которую нам расставил коварный Зенон. Так значит, проблема, наконец, закрыта?

Нет, - решительно возражает Демокриту **Евдокс**, один из глубочайших математиков



Евдокс  
ок. 408 - ок. 355 до н. э.

древности. Предположение о существовании неделимых величин Евдоксу представляется искусственным. В противовес этому он выдвигает удивительную гипотезу, названную впоследствии *аксиомой Архимеда* (правильнее было бы ее назвать аксиомой Евдокса). Согласно этому утверждению для любой величины существует величина, ее превосходящая. Отсюда же следует, что любую величину можно неограниченно дробить. Бесконечный процесс приобретает тем самым строгую математическую форму. И Евдокс разработал мощный аппарат, названный *методом исчерпывания*

и предназначенный, главным образом, для вычисления длин, площадей и объемов. Фактически это была первая версия математического анализа, оставшаяся непревзойденной свыше двух тысячелетий.

Значительную роль в разработке этого направления сыграл **Архимед**, внесший серьезные усовершенствования в теорию Евдокса. К примеру, при вычислении площади витка спирали он пользуется конструкциями, включающими сумму бесконечно большого числа сколь угодно малых величин. Фактически здесь уже речь идет о построении интеграла. И Архимед успешно решает столь сложные задачи, к которым математика вернется лишь в семнадцатом веке.

Труды Архимеда были взяты на вооружение лучшими математиками средневекового Востока. И вот уже **Сабит ибн Курра**, живший в 9 веке, для вычисления площадей достаточно сложных фигур применяет метод, связанный с дроблением данной фигуры на более простые части. Их частей может быть произвольное количество. Но оно неизменно и конечно.

А вот блистательного астронома **Иоганна Кеплера**, работавшего в начале 17 века, бесконечность уже не пугает. Для него окружность – это



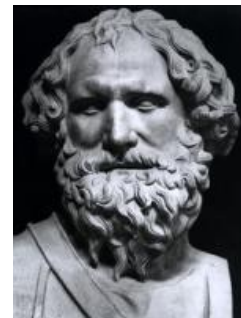
Иоганн Кеплер  
1571 – 1630

правильный многоугольник с бесконечным числом сторон. А тогда площадь круга – это не что иное как сумма площадей бесконечно малых треугольников с вершиной в центре круга и основанием, лежащим на окружности. Тем самым процесс построения площади у Кеплера оказывается завершенным. Собственно, здесь и процесса нет. Мы сразу получаем конечный результат. Небольшой трактат Кеплера под романтическим названием «*Стереометрия винных бочек*» с изложением указанных идей, приобретает широкую известность.

По следам Кеплера уверенно идет **Бонавентура Кавальери**, разработавший *метод неделимых*. Согласно Кавальери, плоскость состоит из чрезвычайно большого числа элементарных параллельных линий, а пространство представляет собой набор параллельных плоскостей. Фактически, это усовершенствованные конструкции Демокрита. Конечно, совсем не просто оценить, как много линий содержится в конкретной плоской фигуре, или участков плоскости – в конкретном теле. Однако если сравнивать две разные фигуры или два различных тела, то, пожалуй, можно достаточно точно указать, что из них больше и в какой степени.

А дальше были работы **Пьера Ферма**. Он, как известно, был одним из создателей (наряду с Декартом) аналитической геометрии, призванной установить мост между геометрией и остальной математикой. Действительно, с помощью *метода координат* можно любой точке на плоскости (или в пространстве) сопоставить два (соответственно, три) числа, выражающие ее координаты. Тем самым любой геометрический объект можно описать аналитически – с помощью формул. И Ферма с легкостью переводит конструкции Кавальери на язык формул. Это открывало качественно новые возможности. Всё более отчетливо становилось ясно, что направление это относится совсем не к геометрии, а к какому-то другому разделу математики...

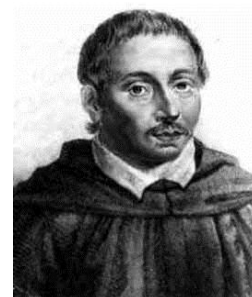
В середине 17 века к анализу этого комплекса проблем подключается всё большее число первоклассных математиков – Эванжелиста Торричелли, Жиль Роберваль, Рене



Архимед  
ок. 287 – 214 до н.э.



Сабит ибн Курра  
836 – 901



Бонавентура Кавальери  
1598 – 1647



Пьер Ферма  
1601 – 1665

Декарт, Блез Паскаль, Джон Валлис, Джеймс Грегори, Исаак Барроу... Результаты постепенно накапливались. И возникала острая необходимость в их систематизации и подведении итогов. Эта миссия выпала на долю двух величайших математиков – Исаака Ньютона и Готфрида Вильгельма Лейбница.

### Исчисление бесконечно малых

Величайшие заслуги Ньютона в области физики подчас заслоняют его выдающиеся достижения в математике. А ведь не зря четверть века занимал он в Кембридже именно кафедру математики. И его вклад в разработку оснований математического анализа трудно переоценить. Анализ у его предшественников от Демокрита до Ферма статичен, а, стало быть, и математическим анализом не может быть назван в полной степени. Да, бесконечный процесс присутствует в рассуждениях Зенона, но там вообще нет никакой математики. Динамика в неявной форме содержится в трудах Евдокса и Архимеда. А вот исследователи последующих двух тысячелетий фактически вернулись назад к Демокриту, отталкиваясь от его концепции атома как неделимой величины.

**Исаак Ньютон** вернул в математику бесконечность, опираясь на новейшие достижения своих непосредственных предшественников, в частности, Декарта и Ферма. Оба они в геометрических исследованиях использовали метод координат, т.е. аналитические



Исаак Ньютон  
1643–1727

конструкции. Декарт к тому же оперировал понятием переменной величины. И Ньютон для решения рассматриваемого комплекса проблем предлагает так называемый *метод флюксий*. Центральными понятиями здесь являются флюэнты и флюксии. Под *флюэнтами* Ньютон понимает переменные величины, а под *флюксиями* – скорости их изменения. Соответственно, ставятся две главные задачи. Прямая задача состоит в определении флюксий по известным флюэнтам, а обратная – в нахождении флюэнта по имеющемуся соотношению между флюксиями.

Конструкции Ньютона становятся вполне естественными, если интерпретировать их с позиций механики. Под флюэнтай можно понимать путь  $x$ , пройденный некоторым телом. Конечно, величина эта меняется, т.е. зависит от времени  $t$ . Тем самым речь идет о *функции*  $x = x(t)$ . Если за некоторое время от  $t$  до  $t + \Delta t$  тело, изначально находившееся в точке  $x(t)$ , переместится в точку  $x(t + \Delta t)$ , то оно проходит путь, равный  $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ . Средняя скорость  $v$  движущегося тела на данном интервале времени равна отношению  $\Delta x / \Delta t$ . А уже мгновенная скорость тела (скорость тела в конкретный момент времени  $t$ ) как раз и характеризует скорость изменения со временем пройденного пути, т.е. является флюксией. Она получается, как предел указанного отношения при неограниченном убывании длины интервала времени  $\Delta t$ . Этот предел называется *производной* рассматриваемой функции в данной точке и обозначается  $x' = dx / dt$ .

Итак, прямая задача у Ньютона предполагает определение скорости движения тела по известному закону изменения пройденного пути. Описанная процедура соответствует вычислению производной от заданной функции, т.е. ее *дифференцированию*. Задача эта относится к разделу математического анализа, называемого *дифференциальным исчислением*.

Ну а обратная задача состоит в отыскании пути, пройденного телом за известное время, при данной скорости  $v$  его движения. Речь здесь идет о восстановлении функции по известному значению ее производной, т.е. о нахождении такой зависимости  $x = x(t)$ , которая удовлетворяет равенству  $x' = v$ . Поскольку искомая величина  $x$  входит в это соотношение под знаком производной, полученную задачу называют *дифференциальным*

уравнением. Решить это уравнение – значит, выполнить процедуру, обратную к дифференцированию. Таковой является операция *интегрирования*. В этой связи сформулированную Ньютоном обратную задачу относят к *интегральному исчислению*.

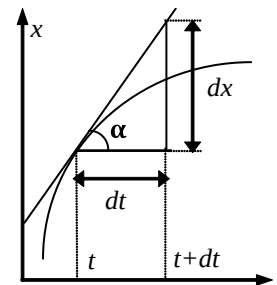
Ключевым этапом при выполнении дифференцирования и интегрирования является переход к пределу, подразумевающий бесконечный процесс. Впрочем, определение самого предела у Ньютона отсутствует, а значит, результаты его при всей их значимости проблеме не закрывают... Ньютон еще долго размышлял над открывшимися ему новыми мирами, постепенно совершенствуя разрабатываемый математический аппарат. А тем временем у него появился мощный конкурент.

**Готфрид Вильгельм Лейбниц** был поразительно разносторонним человеком. Он был крупнейшим философом своего времени и профессиональным дипломатом. Он является одним из основоположников математической логики, с которой прозорливо связал двоичную систему счисления. Он сконструировал вычислительное устройство, способное выполнять арифметические операции, возводить в квадрат и куб и извлекать квадратный и кубический корни. Он проповедовал эволюционизм в биологии и геологии, выдвинул идею парового двигателя, занимался сравнительным языкознанием, комментировал китайскую философию. Да и математиком он был высочайшего класса. Первая публикация, относящаяся к новой математике, была сделана Лейбницем. Это предопределило впоследствии бурную дискуссию том, кто же был истинным основоположником исчисления бесконечно малых – Ньютон или Лейбниц?



Готфрид Лейбниц  
1646 – 1716

Для Лейбница последовательность – это набор значений некоторой функции, а разность между двумя элементами последовательности есть разность  $d$  между соседними значениями функции. В частности, для произвольной функции  $x = x(t)$  можно рассмотреть два сколь угодно близких значения аргумента  $t$  и  $t + dt$ . Затем в точке  $t$  проводится касательная к рассматриваемой кривой. Тогда тангенс угла  $\alpha$  наклона касательной представляет собой



отношение длин соответствующих катетов, т.е. значение  $dx/dt$ . Получаемую в результате величину  $dx = tg\alpha \cdot dt$  Лейбниц называет *дифференциалом* функции. Отсюда берут начало термины «дифференцирование» и «дифференциальное исчисление». А дальше Лейбниц разрабатывает основные правила работы с дифференциалами, дифференцирует известные функции, вводит понятие интеграла...

Практически вся терминология и символика, используемая в настоящее время в математическом анализе, восходит к работам Лейбница... Так значит, именно Лейбницу мы обязаны разработкой основ математического анализа? Нет, у него также отсутствует понятие предела, а значит, все эти результаты должной строгостью не обладают... Прав был Герман Вейль, один из крупнейших математиков двадцатого века, утверждая: «Здание анализа в значительной мере возведено на песке»...

### Определение предела

Еще около ста лет понадобилось математике, чтобы приблизиться пониманию того, чем же все-таки является этот загадочный предел... Немалую роль здесь сыграл выдающийся французский мыслитель **Жан Лерон Д'Аламбер**. Он был (наряду с Дидро) одним из авторов



Жан Д'Аламбер  
1717 – 1783

грандиозного проекта упорядочения всей системы знаний, названного «Энциклопедией, или Толковым словарем наук, искусств и ремесел» и послужившего прообразом всех последующих энциклопедий. Отчетливо понимая суть проблемы, Д'Аламбер писал *"теория пределов составляет основу истинной метафизики и дифференциального исчисления"*. Пытаясь как-то прояснить ситуацию, он утверждает, что одна величина является пределом другой, если эта вторая величина может приблизиться к первой сколь угодно близко. По сути своей, предел действительно обладает описанным свойством. Казалось бы, после этого Д'Аламбер должен был разработать строгую теорию пределов и построить на ее основе математический анализ. Но ничего подобного у него мы так и не найдем...

Первым, кто дал безупречное определение предела, был чешский математик и философ **Бернард Больцано**. Он впервые строго определил понятия непрерывной функции и ее производной, а также сходимости ряда. Ему же принадлежит ряд глубоких теорем, ныне входящих в любой курс математического анализа. К сожалению, жил он в Праге, на периферии математического мира, и результаты его долгое время оставались незамеченными. А ведь какой мощный импульс могла бы получить математика, стань они известными в своё время! К примеру, основные положения теории множеств Больцано изложил почти за полвека до Кантора.



Бернард Больцано  
1781 – 1848



Огюстен Луи Коши  
1789 – 1857

Но идеи уже витали в воздухе... Париж начала девятнадцатого века был крупнейшим центром мировой культуры. А среди множества первоклассных математиков Парижа на первое место постепенно выдвигается **Огюстен Луи Коши**. Уверенно идя по пути, проложенным Д'Аламбером, и не подозревая, что совсем недавно здесь уже прошел Больцано, Коши дает такое определение предела: *"если значения, последовательно приписываемые одной и той же переменной, неограниченно приближаются к фиксированному значению, так что в конце концов отличаются от него сколь угодно мало, то последнее называют пределом всех остальных"*. Ну а дальше Коши строго определяет производную, устанавливает ее связь с дифференциалом, исследует соотношение между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Коши принадлежит первое безупречное определение интеграла. Разрабатывая математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления, он переоткрывает результаты Больцано и продвигается еще дальше. Математический анализ постепенно приобретает очертания, знакомые нам по учебникам высшей математики. Казалось бы, дело близко к завершению...

Однако **Карл Вейерштрасс** считал, что математика всё еще не обладает должной степенью строгости. Ну как можно строго оценить близость различных величин, если до сих пор всё еще нет четкого определения понятия числа? Это просто поразительно! Евдокс, живший за две с половиной тысячи лет до указанных событий, всё-таки дал весьма удовлетворительное определение числа как отношения двух произвольных длин. Под это определение подпадали не только рациональные числа (отношения двух целых чисел), но и числа иррациональные, будучи отношениями длин несоизмеримых отрезков.



Карл Вейерштрасс  
1815 – 1897

Каких только высот не достигла математика за эти два тысячелетия! А вот в плане постижения природы *действительных чисел* вслед за Евдоксом сразу идет Вейерштрасс. Именно он (и независимо от него, Рихард Дедекинд и Георг Кантор) дает безупречно

строгое определение действительного числа. И только после этого математика обретает тот самый "язык  $\varepsilon$  и  $\delta$ ", на котором принято изъясняться и в наше время. Так, функция  $x = x(t)$  называется *непрерывной* в точке  $t_0$ , если для любого действительного числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что для любых значений  $t$ , удовлетворяющих условию  $|t - t_0| < \delta$  справедливо неравенство  $|x(t) - x(t_0)| < \varepsilon$ . Ну а *последовательность*  $\{x_k\}$  *сходится* к некоторому значению  $x$ , называемому ее *пределом* (указанное утверждение имеет краткую запись  $x_k \rightarrow x$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое натуральное число  $n$ , что для любого номера  $k$ , большего  $n$ , справедливо неравенство  $|x_k - x| < \varepsilon$ .

Современное изложение классического математического анализа связывается именно с Вейерштрассом. И вот теперь теория пределов, казалось бы, сама достигла своего предела. Но, как говорится, нет предела совершенству. Математика не стоит на месте. К началу двадцатого века в ней начинают появляться новые идеи, требовавшие уточнения понятия предела...

### Новые пределы

До сих пор речь шла о пределе последовательности чисел. Однако жизнь диктовала необходимость рассмотрения более сложных объектов. К примеру, положение тела (материальной точки) в пространстве характеризуется не одним числом, а уже тремя, составляющими его координаты. Тем самым объектом исследования становится уже не число, а вектор, задающий положение тела в пространстве. Тогда обретает смысл определение предела последовательности векторов, причем произвольной размерности. Мы же можем рассматривать, например, не одно изолированное тело, а несколько тел, взаимодействующих между собой... Точка на прямой характеризуется одним числом, точка на плоскости – парой чисел или вектором размерности 2, точка в пространстве – тремя числами или вектором размерности 3. Ну а  $n$  чисел, соответствующих вектору размерности  $n$ , характеризуют точку в  $n$ -мерном пространстве.

Впрочем, сходимость последовательности векторов произвольной размерности сводится к сходимости числовых последовательностей их компонент и никаких особых



Давид Гильберт  
1862 – 1943

осложнений не вызывает. Но вот **Давид Гильберт** определяет *бесконечномерное пространство*. Его элементы также можно интерпретировать как точки. Тогда последовательность функций можно понимать как последовательность точек в бесконечномерном пространстве, называемым *функциональным пространством*. Но аргумент  $t$  функции  $x = x(t)$  имеет бесконечное множество значений. И что же тогда назвать пределом функциональной последовательности  $\{x_k\}$ , где  $x_k = x_k(t)$ ? Видимо, совокупность всевозможных пределов

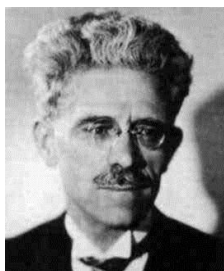
числовых последовательностей  $\{x_k(t)\}$ .

Но ведь функции бывают разные – непрерывные, дифференцируемые, интегрируемые и т.д. Нам бы хотелось, чтобы предел последовательности был объектом того же класса (точкой того же самого пространства!), что и элементы самой последовательности. Предположим, все функции  $x_k = x_k(t)$  являются непрерывными, и для любого  $t$  имеет место сходимость  $x_k(t) \rightarrow x(t)$ . Только вот окажется ли получаемая в пределе функция  $x = x(t)$  обязательно непрерывной, т.е. будет ли она точкой пространства непрерывных функций? Рассмотрим, к примеру, непрерывные функции, определяемые равенствами  $x_k(t) = t^k$  на отрезке  $[0,1]$  для любого номера  $k$ . Очевидно, для всех значений  $t$  из этого

отрезка числовая последовательность  $\{x_k(t)\}$  сходится. Соответствующая предельная функция определяется равенством  $x(t)=0$  для всех точек  $t$ , меньших единицы. Однако при  $t=1$  мы получим значение  $x(1)=1$ . Так можем ли мы считать получаемую в результате предельную функцию  $x = x(t)$  непрерывной на всем отрезке  $[0,1]$ ? Едва ли.

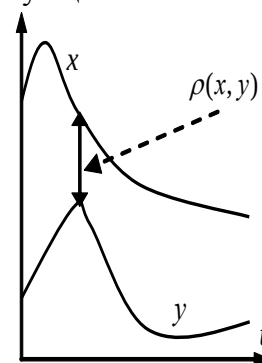
Работа с объектами в бесконечномерных пространствах требовала разработки более тонкого математического аппарата. От Гильберта берут начала методы анализа, составившие предмет самостоятельной математической дисциплины, названной *функциональным анализом*.

Французский математик **Морис Фреше** предложил взять за основу оценки близости



Морис Фреше  
1878 – 1973

двух произвольных математических объектов понятие *метрики*, выражающее расстояние между ними. В частности, для чисел  $x$  и  $y$  расстояние  $\rho(x, y)$  между ними равно модулю разности  $|x - y|$ . Для векторов  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  расстояние  $\rho(x, y)$  можно определить как корень квадратный из суммы квадратов их компонент – классическая формула



расстояния между точками в  $n$ -мерном пространстве. Ну а в качестве значения метрики  $\rho(x, y)$  для непрерывных функций  $x = x(t)$  и  $y = y(t)$  можно выбрать максимум величины модуля разности  $|x(t) - y(t)|$  по всем значениям  $t$  из области определения рассматриваемых функций. Множество, в котором определена метрика, т.е. имеется возможность дать количественную оценку степени близости любых двух объектов, называется *метрическим пространством*.

Сходимость последовательности  $\{x_k\}$  в метрическом пространстве к некоторой величине  $x$  (точке того же пространства) соответствует сходимости числовой последовательности  $\{\rho(x, x_k)\}$  к нулю. Итак, сходимость последовательности элементов метрического пространства реализуется, если расстояние между элементами этой последовательности и ее пределом стремится к нулю. Естественно, обычная сходимость последовательности чисел или векторов получается в виде частного случая метрической сходимости.

А вот немецкий математик **Феликс Хаусдорф** дал столь общее определение предела, что из него были вообще исключены какие-либо количественные характеристики. Центральным здесь оказывается понятие *окрестности*. К примеру, в метрическом пространстве под окрестностью произвольной точки  $x$  можно понимать множество всевозможных точек  $y$ , находящихся от  $x$  на расстоянии, меньшем некоторого значения  $\varepsilon$ , т.е. таких, что  $\rho(x, y) < \varepsilon$ . Ну а в общем случае окрестность задается аксиоматически, причем не обязательно с количественной оценкой. Последовательность  $\{x_k\}$  теперь сходится к некоторой точке  $x$ , если все ее элементы, начиная с некоторого номера, попадают в произвольную окрестность этой точки. Так определяется предел в *топологическом пространстве*.



Феликс Хаусдорф  
1868 – 1942

Что же произойдет, если воспользоваться этим определением для метрического пространства? Топологическая сходимость  $x_k \rightarrow x$  связана с рассмотрением произвольной окрестностью ее предела, т.е. множества точек  $y$ , удовлетворяющих

неравенству  $\rho(x, y) < \varepsilon$  для произвольного числа  $\varepsilon > 0$ . Согласно Хаусдорфу, эта сходимость предполагает, что для произвольной окрестности предела, т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  все элементы  $x_k$  последовательности, начиная с некоторого номера  $n$ , попадают в указанную окрестность, т.е. удовлетворяют неравенству  $\rho(x, x_k) < \varepsilon$ . Тем самым получается сходимости  $\rho(x, x_k) \rightarrow 0$ , что в точности соответствует метрическому случаю. Однако не всякое топологическое пространство является метрическим. Более того, как правило, оно таковым и не является.

Понятие топологического предела оказывается предельно общим и охватывает практически все мыслимые приложения современного анализа. Казалось бы, на этом теория пределов достигла своего долгожданного завершения. Но была еще проблема практического нахождения предела, требующая весьма серьезной проработки.

### Нахождение предела

В приложениях мы, как правило, имеем дело с алгоритмом, который задает некоторую последовательность  $\{x_k\}$ . Желаемый результат должен получиться как предел этой последовательности. При этом возникает вопрос, как узнать, сходится ли наша последовательность или нет?

Согласно имеющемуся определению последовательность сходится, если ее элементы неограниченно приближаются к предельному значению. Это утверждение остается в силе и для чисел, и для векторов, и для точек метрического или топологического пространства. Вот только как можно проверить на практике, приближаются ли элементы последовательности к пределу, если на данном этапе исследования мы не только не знаем сам предел, но даже еще не уверены в его существовании?

Похожая проблема возникает при практическом решении задачи на компьютере. У нас есть алгоритм, который генерирует некоторую последовательность. На какой-то стадии вычислений алгоритм следует прервать. Прерывание алгоритма производится при достижении желаемой степени точности. А точность определяется отклонением имеющейся величины (результата данного шага вычисления, т.е. текущего элемента последовательности) от искомого значения, т.е. предела. Но как мы можем оценить имеющуюся погрешность, если сам предел нам не известен?

Итак, определение предела оказывается не конструктивным, т.е. его использование возможно только в том случае, когда сам предел известен. На это обстоятельство естественно обратили внимание те математики, которые дали определение предела. В частности, Коши предложил для решения указанной проблемы специальный прием, названный впоследствии критерием Коши. Впрочем, и здесь его опередил Больцано, но работы его так и остались не замеченными.

Да, конечно, - замечает Коши (и Больцано тоже!), - мы не сможем проверить на практике, приближаются ли элементы последовательности  $\{x_k\}$  к своему пределу, не зная самого предела. Однако мы можем узнать, сближаются ли элементы последовательности между собой, т.е. будет ли стремиться к нулю величина  $|x_k - x_n|$  при неограниченном возрастании номеров  $k$  и  $n$ . Для этого знание самого предела явно не требуется! Последовательности, обладающие таким свойством, были названы *фундаментальными*. А дальше Коши (и Больцано тоже!) утверждает: любая фундаментальная последовательность сходится. В этом-то и состоит *критерий сходимости Коши* (а Больцано опять забыт!).

Понятие фундаментальности последовательности в отличие от ее сходимости является конструктивным, поскольку требует знания исключительно элементов самой последовательности. Кстати, и при решении задачи на компьютере прерывание алгоритма по достижению желаемой точности осуществляется в том случае, когда два элемента вычисляемой последовательности будут различаться на достаточно малую величину.

Как же осуществляется теперь решение задачи? Сначала разрабатывается алгоритм, генерирующий некоторую последовательность  $\{x_k\}$ . Затем проверяется, будут ли ее элементы неограниченно сближаться, т.е. является ли данная последовательность фундаментальной. Если это так, то в силу критерия Коши последовательность оказывается сходящейся. И на завершающем этапе исследования доказывается, что получаемый предел действительно будет решением поставленной задачи. Именно таким способом, к примеру, французский математик **Эмиль Пикар** в конце девятнадцатого века исследует дифференциальные уравнения. А польский математик **Стефан Банах** распространяет этот метод на общие (операторные) уравнения.

Казалось бы, имея в распоряжении критерий Коши, мы действительно сможем находить пределы любых последовательностей? Но реальность оказалась намного сложнее. Вот у нас есть некая последовательность элементов какого-то множества, которая оказалась фундаментальной. Но сможем ли мы наверняка установить ее сходимость к некоторому пределу?

Пусть на множестве положительных чисел рассматривается последовательность  $\{x_k\}$ , характеризуемая равенством  $x_k = 1/k$ . Понятно, что ее элементы сближаются с ростом номера  $k$ . Но какое положительное число является пределом этой последовательности? Такого явно не существует! А значит, наша последовательность  $\{x_k\}$  на множестве положительных чисел не сходится.

Да, конечно, эта последовательность сходится к нулю. Но ведь нуль-то положительным числом не является! А математика так устроена, что о сходимости последовательности нельзя говорить без указания множества рассматриваемых объектов. Точно также бессмысленно говорить о том, что некая задача имеет решения без указания того, на каком множестве это решение определяется. Одна и та же задача может иметь решение на одном множестве объектов и не иметь – на другом. К примеру, долгое время считалось, что уравнение  $x^2 = -1$  решения не имеет. Это действительно так, если под решением понимать действительные числа. Но если расширить класс рассматриваемых объектов до множества комплексных чисел, то окажется, что уравнение имеет два решения, а именно,  $i$  и  $-i$ , где  $i$  есть мнимая единица.

Приходится смириться с мыслью о том, что критерий Коши действует не всегда. В этой связи все математические пространства подразделяются на два класса – полные и неполные. В *полных пространствах* критерий Коши работает, а вот в *неполных* – увы... К полным пространствам относятся множества действительных чисел, векторов любой размерности, непрерывных функций с определенной ранее метрикой. А вот множество положительных чисел полным не является. Как доказывать сходимость последовательности в полном пространстве, более или менее понятно. А вот как быть в том случае, когда пространство не является полным? Вопрос этот приобретает особую актуальность, если учесть, что абсолютное большинство математических пространств не полны. Стало быть, критерий Коши там не работает. Эта проблема стоит особенно остро в бесконечномерных пространствах. И как быть в такой ситуации?

Путь к решению этой проблемы подсказал великий немецкий математик **Георг Кантор**.



Георг Кантор  
1845 – 1918

Основоположник теории множеств имел и другие великолепные результаты. Ранее уже упоминалось, что Кантор был одним из тех, кто дал определение действительным числам. Для нас важно, как он это сделал. За исходный материал было выбрано множество рациональных чисел  $Q$ . А потом рассматривались всевозможные фундаментальные последовательности рациональных чисел. Возьмем, к примеру, следующую последовательность  $\{x_k\}$ . Определяем  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 3.1$ ,  $x_3 = 3.14$ ,  $x_4 = 3.141$ ,  $x_5 = 3.1415$  и так далее. На каждом новом шаге

добавляется следующая значащая цифра, входящая в определение числа  $\pi$ . Нет сомнения в том, что элементы этой последовательности неограниченно сближаются, т.е. мы имеем дело с фундаментальной последовательностью на множестве  $Q$ . Однако не существует такого рационального числа, которое является ее пределом. Тем самым критерий Коши не срабатывает, а множество  $Q$  не является полным.

Но ведь мы-то знаем, что эта последовательность сходится к числу  $\pi$ ! Однако оно не является рациональным числом, т.е. лежит за пределами множества  $Q$ . А иррациональные числа пока еще не определены. И Кантор говорит: действительные числа – это пределы всевозможных фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Но как можно говорить о пределах последовательности, которая не сходится? Вспомним, что у нас есть только элементы множества  $Q$ . Только с ними и разрешается работать!

Отметим для начала, что с числом  $\pi$  можно связать также убывающую последовательность  $\{y_k\}$ , определяемую равенствами  $y_1 = 4$ ,  $y_2 = 3.2$ ,  $y_3 = 3.15$ ,  $y_4 = 3.142$ ,  $y_5 = 3.1416$  и т.д. Шаг за шагом здесь тоже появляются все значащие цифры, входящая в определение числа  $\pi$ . Эта последовательность рациональных чисел также фундаментальна. Характерно, что элементы последовательностей  $\{x_k\}$  и  $\{y_k\}$  неограниченно сближаются, т.е. разность  $|x_k - y_k|$  стремится к нулю при неограниченном возрастании номера  $k$ . Фундаментальные последовательности рациональных чисел, обладающие таким свойством, Кантор называет *эквивалентными*. После этого все множество фундаментальных последовательностей рациональных чисел разбивается на классы. Все элементы каждого конкретного класса по определению эквивалентны между собой. Каждый такой класс представляет собой конкретный реально существующий математический объект, четко определенный исключительно на основе рациональных чисел. Его-то Кантор и называет *действительным числом*.

Естественно, любое рациональное число  $x$  можно связать с фундаментальной последовательностью рациональных чисел, все элементы которого равны  $x$ . Ей будут эквивалентны все последовательности, имеющие  $x$  в качестве предела. Таким образом, каждому обычному рациональному числу можно однозначно поставить в соответствие конкретный класс сходящихся фундаментальных последовательностей, т.е. конкретный элемент определенного таким образом множества  $R$  действительных чисел. Тогда какая-то часть действительных чисел (та, которая связана исключительно со сходящимися фундаментальными последовательностями) ассоциируется с рациональными числами. Ну а *иррациональные числа* определяются фундаментальными последовательностями, которые не сходятся. К таковым и относится известное число  $\pi$ .

А затем Кантор наделяет построенное им множество действительных чисел всеми свойствами, которые принято связывать с числами, т.е. указывает, как можно выполнять над ними естественные арифметические операции, оценивать их близость, определять, которое из двух чисел больше и т.д. Таким образом, любая процедура, которую мы

привыкли выполнять над числами, здесь применима, причем с теми же результатами, которые мы ожидали получить. Тем самым действительные числа строго определяются с помощью чисел рациональных...

Ну ладно, ввел Кантор действительные числа своим весьма оригинальным способом. А какое всё это имеет отношение к обоснованию сходимости в неполных пространствах? Кантор перешел от неполного множества  $Q$  рациональных чисел к множеству  $R$  действительных чисел. Так вот последнее оказалось полным. А это значит, что та самая фундаментальная последовательность рациональных чисел, которая ранее не сходилась, теперь обрела предел. Он, правда, принадлежит не  $Q$ , а более широкому множеству действительных чисел. И вот теперь, наконец, проясняется мысль Кантора о том, что действительные числа могут быть получены как пределы фундаментальных последовательностей чисел рациональных.

Ну ладно, Кантор пополнил множество рациональных чисел, добавив к ним понимаемые в некотором особом смысле пределы всевозможных фундаментальных последовательностей. Но годится ли эта процедура для произвольного неполного метрического пространства? Годится! Это доказал тот самый Феликс Хаусдорф, определивший топологическое пространство. Таким образом, критерий сходимости Коши работает всегда. Просто в условиях полноты любая фундаментальная последовательность сходится к элементу исходного пространства. А в неполных пространствах предел оказывается элементом более широкого множества, являющегося его *пополнением*.

Итак, мы все-таки имеем конструктивный метод обоснования сходимости. Следует ли отсюда, что любая математическая задача может быть решена указанным способом? Вспомним, что нам нужно сначала построить некоторую последовательность, которая должна нам дать решение поставленной задачи. А как ее строить? Затем следует показать, что последовательность оказывается фундаментальной. А ведь она может и не быть таковой, а просто расходиться! Ну и пусть она даже фундаментальна. Тогда она действительно сходится, если не на самом множестве, с которым мы работаем, то, по крайней мере, на его пополнении. Но откуда мы знаем, что получаемый в результате предел действительно окажется решением нашей задачи? Словом, одного умения выполнять предельный переход еще не достаточно для решения задачи. Но обладая мощным аппаратом, разработанным лучшими математиками за многие сотни лет, вы имеете шанс решить чрезвычайно сложные математические задачи. Дело – за вами.

### Литература

1. Белл Э. Т. Творцы математики. Предшественники современной математики. – М., Просвещение, 1979. – 255 с.
2. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М., ИЛ, 1963. – 292 с.
3. Даан-Дельмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. – М., Мир, 1986. – 432 с.
4. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. – М., Просвещение, 1967. – 560 с.
5. Стиллвелл Дж. Математика и ее история. – Москва, Ижевск, Институт космических исследований, 2004. – 530 с.
6. Фрейман Л. С., Никифоровский В. А. Рождение новой математики. – М., Наука, 1976. – 197 с.