

С.Я. Серовайский В МИРЕ ЧИСЕЛ

Все вещи суть числа

Пифагор

Числа – основа всей математики. *Арифметика* – древнейшая из математических дисциплин. Мы познакомимся с важнейшими числовыми классами от обычных чисел, знакомых даже дошкольнику, до их современных обобщений, с которыми доводилось работать далеко не каждому профессиональному математику.

1. Рациональные числа

Уже на заре цивилизации перед человечеством встала насущная проблема количественной оценки различных объектов, возникла острая необходимость в счете. Числа были первыми математическими понятиями, с которыми столкнулось человечество. Речь при этом идет о том, что впоследствии было названо *натуральными числами* – о простейших величинах 1, 2, 3, ..., возникающих в процессе счета.

Со временем, однако, выяснилось, что натуральных чисел слишком мало. Жизнь ставила актуальные задачи, для решения которых требовалось что-то еще. Вот, к примеру, нужно разделить поровну три яблока на два человека. Задача эта, несомненно, имеет решение. Действительно, каждому из них вручается по одному целому яблоку, а оставшееся яблоко делится пополам. Так сколько же получил каждый? Определенно больше одного, но меньше двух. Так почему бы не ввести новое число $3/2$, понимаемое буквально, как результат деления натурального числа 3 (три яблока) на число 2 (два человека)? Так появились *дроби*... Ими пользовались, по крайней мере, в 3 тысячелетии до нашей эры в древнем Египте и Вавилоне.

Однако время шло, и по мере развития товарно-денежных отношений выяснилось, что не хватает уже и дробей. Вот, я отправился к торговцу для покупки некоего товара. И оказывается, что я не в силах полностью с ним расплатиться – товар стоит 10 монет, а у меня в наличии имеется только семь. Однако любезный торговец согласился дать недостающие три монеты мне в долг. Возникает вопрос: сколько же денег будет у меня после столь выгодной сделки? Понятно, денег у меня нет. Но в действительности мое финансовое положение еще хуже, поскольку, даже раздобыв где-то три монеты (добавив их к тому, что у меня есть на данный момент), я вынужден буду отдать их торговцу в счет долга. И после этого у меня действительно ничего не останется. Следовательно, в результате сделки денег у меня оказалось даже меньше чем нечего... Так как же

количественно описать имевшуюся у меня денежную сумму? Ее можно охарактеризовать, как число -3 , интерпретируемое как соответствующую величину долга. Математика обрела *отрицательные числа*. С ними уже работали, по крайней мере, во втором тысячелетии до нашей эры в Китае. Основы же теории отрицательных чисел были заложены в 3 веке нашей эры *Диофантом* и далее в 7 веке *Брахмагуптой*. Строгое же определение отрицательных чисел дает лишь в 16 веке итальянский математик *Рафаэле Бомбелли*.

Однако для полного описания всех *рациональных чисел*, т.е. как целых, так и дробных, как положительных, так и отрицательных, еще не хватало *нуля* – количественной характеристики отсутствия перечисляемых объектов. Какое-то смутное представление о нуле было еще в Вавилоне и у индейцев майя, а также у греческого астронома и математика *Птолемея*, жившего во втором веке нашей эры. Но именно индийская мысль, в которой *нирвана*, т.е. фактически ничто, воспринимается как нечто позитивное, создала математическую теорию нуля. Так, в 5 веке *Ариабхата* уже использует специальный символ обозначения для нуля, в 6 веке *Бхаскара I* описывает арифметические операции с нулем, в 7 веке *Брахмагупта* рассуждает о получении бесконечности в процессе деления на нуль, в 9 веке *Магавира* решительно заявляет о недопустимости деления на нуль, а в 12 веке *Бхаскара II* описывает правила возведения нуля в степень и извлечения из него корней.

Открытие нуля позволило индийским математикам разработать удивительно совершенную *позиционную систему счисления* для записи чисел. За основу было выбрано число 10, благо люди ведь начинали считать предметы на пальцах. Натуральные числа просто разлагались по степеням десяти. Так, выражение 275 понимается как сумма двух сотен $2 \cdot 10^2$, семи десятков $7 \cdot 10^1$ и пяти, т.е. $5 \cdot 10^0$. Дробь требовала использования отрицательных степеней числа 10. В частности, выражение 3.7 (вместо «точки» часто пишется «запятая») означает здесь три целых и семь десятых, т.е. сумма натурального числа 3 и дроби $7/10$ или в другой записи $7 \cdot 10^{-1}$. А для записи отрицательных чисел перед соответствующим выражением ставился знак «минус», например, -2.3 . Естественно, в отсутствии нуля совершенно непонятно, как в позиционной системе счисления обозначать, например, такие далеко не нулевые числа, как одна сотая или сто. Введение позиционной системы счисления позволило существенным образом упростить действия над числами и тем самым значительно продвинуло вперед всю математику.

В дальнейшем выяснилось, что в основание позиционной системы счисления могут быть положены и другие числа. Так, *Леонардо Фибоначчи* и *Лука Пачиоли* описывают двоичную систему счисления, доведенную практически до современного вида *Готфридом*

Вильгельмом Лейбницем и ставшую особо актуальной в нашу компьютерную эпоху. А жившие в середине 17 века *Джон Валлис* и *Блез Паскаль* рассматривают позиционные системы счисления с произвольным основанием.

Однако задолго до того, как теория рациональных чисел была изложена во всей полноте, выяснилась, что и она не может описать всё многообразие количественных характеристик, возникающих на практике.

2. Иррациональные числа

Вслед за арифметикой человечество постепенно осваивало *геометрию*. Одной из первых вершин геометрической мысли была *теорема Пифагора*, согласно которой в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Пусть задан прямоугольный треугольник со сторонами 3 и 4. Пользуясь теоремой Пифагора, мы можем легко установить, что длина его гипотенузы будет равна 5. Но что же произойдет, если у прямоугольного треугольника оба катета имеют длину 1? Какую длину будет иметь его гипотенуза? Ведь этот объект реально существует, а значит, его наверняка можно померить. Только вот какое число следует поставить в соответствие его длине?

Древнегреческому математику *Теодору Киренскому*, жившему в 5 веке до нашей эры, приписывается такой ход рассуждений. Сумма квадратов длин указанных катетов есть число 2, равное квадрату длины гипотенузы. Пусть длина гипотенузы есть рациональное число, т.е. отношение двух натуральных чисел p и q . Можно считать, что дробь p/q является несократимой, т.е. указанные числа не имеют общих делителей: в противном случае дробь можно сократить на эти самые делители и получить несократимую дробь. Из условия $2 = (p/q)^2$ следует, что $p^2 = 2q^2$. Правая часть этого равенства является четным числом. Однако такое возможно исключительно в том случае, когда само число p оказывается четным, а значит, имеет вид $p = 2r$, где r есть некоторое натуральное число. Тогда справедливо равенство $p^2 = 4r^2$, а значит, $q^2 = 2r^2$. Тем самым, число q также оказывается четным. Следовательно, числа p и q имеют общий делитель 2, будучи оба четными. Однако ранее отмечалось, что они не имеют общих делителей. Таким образом, наше предположение о том, что длина гипотенузы прямоугольного треугольника с единичными катетами, характеризуется некоторым рациональным числом, оказывается неверным. Однако гипотенуза реально существует, а значит, обладает какой-то длиной. Вот только рациональных чисел не достаточно для ее описания. Катет и гипотенуза оказываются несоизмеримыми.

Развитие геометрии предопределило появление иррациональных чисел. Живший в 4 веке до н.э. *Тезет* устанавливает критерий несоизмеримости отрезков, отмечает иррациональность квадратных корней, доказывает бесконечность множества иррациональных чисел и дает классификацию иррациональностей. Еще дальше идет его младший



Евдокс

ок. 408 - ок. 355 до н.э.

раньше выяснилось, чисел в математике по-прежнему не хватает...

современник *Евдокс*, определивший число как отношение длин отрезков или других одностипных величин. Фактически, Евдоксом была разработана единая теория чисел, как рациональных, так и иррациональных. То была первая теория *действительных чисел*. Она оказалась столь совершенной, что потребовалось почти две с половиной тысячи лет, прежде чем математика

смогла превзойти этот уровень. Однако намного

3. Комплексные числа

На этот раз запрос поступил со стороны *алгебры*. Этот раздел математики изначально был связан с исследованием уравнений. Собственно, уже нахождение гипотенузы прямоугольного треугольника x по известной сумме квадратов катетов y предполагает решение *квадратного уравнения* $x^2 = y$. Логика развития науки неминуемо привела к вопросу: а что будет, если известная величина y окажется отрицательной? Вполне естественно, что подобные мысли возникли у индийских математиков, в частности, у *Магавиры* и *Бхаскары II*, имеющих большой опыт работы с отрицательными числами. И они заключают, что в этом случае решение уравнения попросту не существует. К такому же выводу пришел и *Мохаммед аль-Хорезми*, разработавший общую теорию квадратных уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$. Так, два решения этого уравнения определяются по известной каждому школьнику формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если стоящая под корнем величина $b^2 - 4ac$ окажется отрицательной, то, по мнению аль-Хорезми, уравнение не имеет решения.

Вслед за квадратным было естественно рассмотреть и *кубическое уравнение*. В частности, решение уравнения $x^3 + px + q = 0$ находится по *формуле Кардано*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Собственно, первыми эту формулу получили жившие в 16 веке итальянские математики *Сципион дель Ферро* и *Никколо Тарталья*. Однако именно *Джероламо Кардано* принадлежит одно чрезвычайно важное наблюдение. Очевидно, выражение под знаком квадратного



Джероламо Кардано
1501 – 1576

корня может оказаться отрицательным при некоторых отрицательных значениях коэффициента p . Тогда по аналогии с квадратным уравнением, казалось бы, можно заключить, что кубическое уравнение не имеет решения при соответствующем сочетании параметров p и q . Однако в действительности это уравнение всегда имеет решение. Дело в том, что для любых значений этих

параметров число x можно выбрать столь большим, чтобы выражение $x^3 + px + q$ оказалось положительным, поскольку куб возрастает куда быстрее, чем линейная функция $f(x) = px + q$. В то же время, если x является достаточно большим по модулю отрицательным числом, то и величина $x^3 + px + q$ наверняка окажется отрицательной. Естественно заключить, что на интервале от этого отрицательного, до того положительного значения найдется такое x , для которого указанное выражение обратится в нуль. Но тогда мы непременно получим решение рассматриваемого уравнения.

Кардано имел на руках эффективную формулу для решения кубического уравнения, выведенную, как будто, без каких-либо ограничений на его коэффициенты. При определенных условиях эта формула не имела смысла (под корнем оказывалось отрицательное число), хотя уравнение имеет решение всегда. И Кардано отмечает, что данная формула сохранила бы смысл и в этом случае, если бы существовали некие *мнимые числа*, которые можно было бы интерпретировать как квадратные корни из отрицательного числа. А в процессе вычислений они сокращаются, так что в результате мы получаем обычное решение. Впрочем, заглянув в неожиданно открывшуюся перед ним бездну, Кардано в ужасе отшатывается назад. Сделав одно из величайших открытий в истории математики, он начинает оправдываться, заявляя, что, конечно же, на самом деле, никаких мнимых чисел нет и быть не может. Но вот если бы они

были, то вот тогда... Впрочем, их, конечно же, нет! Не зря же они были названы мнимыми, т.е. несуществующими!

Однако идущий следом *Раффаэле Бомбелли*, тот самый, который



Раффаэле Бомбелли
ок. 1526 – 1572

дал определение отрицательных чисел, рассудил иначе. Раз эти мнимые числа позволяют находить заведомо существующие корни кубического уравнения, а без них мы ничего такого сделать не сможем, значит, они и впрямь существуют. Трудно себе представить, что это такое... Но зато можно описать те их свойства, которые позволяют успешно

решать кубические уравнения, а, возможно, и еще что-то. И Бомбелли анализирует эти свойства, закладывая фактически основы теории *комплексных чисел*, объединяющих как обычные действительные числа, так и чисто мнимые числа, являющиеся квадратными корнями из отрицательных величин.

Идеи Бомбелли были подхвачены другими алгебраистами. И вот уже в самом начале 17 века сначала *Петер Роте*, а затем более строго *Альбер Жирар* высказывают утверждение, называемое *основной теоремой алгебры* и предопределившее широчайшее применение комплексных чисел в математике. Согласно этому результату, алгебраическое уравнение n -ого порядка

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

для любых действительных и даже комплексных значений коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$ всегда имеет решение на множестве комплексных чисел. Строгое обоснование основной теоремы алгебры впервые дал *Карл Гаусс* в 1799 году. И вот ведь что любопытно, теория алгебраических уравнений, разрешимых в комплексных числах, почему-то



Карл Гаусс
1777 – 1855

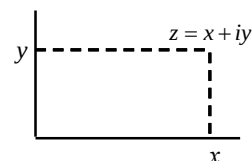
оказывается проще соответствующей теории уравнений, имеющих лишь действительные решения. Ведь даже на уровне квадратных уравнений аналог основной теоремы алгебры в классе действительных чисел не работает. А вот уравнения, разрешимые в рациональных, а тем более, в целых числах, называемые *диофантовыми уравнениями*, еще сложнее поддаются анализу. Этот

кажущийся парадокс (уж насколько целые числа проще рациональных, рациональные – действительных, а те – комплексных) имеет

естественное объяснение. Чем шире класс чисел, тем больше вероятность того, что конкретное уравнение имеет там решение.

Комплексные числа постепенно находили приложение практически во всех разделах математики. Однако их природа долгое время оставалась загадкой. Вследствие этого математиков не оставляло сомнение – а в праве ли они работать со столь туманным объектом? И лишь на рубеже 18 и 19 веков *Каспар Вессель*, *Жан Арган* и *Карл Гаусс* независимо друг от друга предложили геометрическую интерпретацию комплексных чисел.

Любое комплексное число z при этом понималось как точка на плоскости, одна из осей x которой соответствует действительным числам, а вторая ось y – мнимым числам. Тем самым



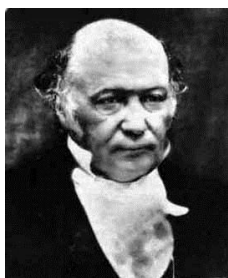
получается представление $z = x + iy$, где i есть *мнимая единица*, являющаяся квадратным корнем из числа -1 .

Естественность и наглядность такой интерпретации, а также колоссальный авторитет Гаусса устранили последние сомнения. И уже вскоре *Огюстен Луи Коши*, *Бернхард Риман* и *Карл Вейерштрасс* разрабатывают *теорию функции комплексного переменного*, ставшую мощнейшим инструментом математического анализа. А в двадцатом веке оказалось, что *уравнение Шрёдингера*, важнейшее уравнение квантовой механики непосредственно включает в себя эту самую мнимую единицу. Сама природа заговорила на языке комплексных чисел, еще недавно казавшихся нелепой выдумкой, призванной временно прикрыть отдельные прорехи абстрактных математических теорий.

И вставал неизменный вопрос – а есть ли еще что-нибудь?

4. Гиперкомплексные числа

Выдающийся ирландский математик *Уильям Гамильтон* понимал



Уильям Гамильтон
1805 – 1865

произвольное комплексное число $z = x + iy$ как пару действительных чисел (x, y) . На множестве таких пар он ввел операции сложения и умножения в соответствии с формулами:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

При этом любое известное свойство комплексных чисел оказывалось выразимо на этом языке. К примеру, мнимой единице у Гамильтона соответствовала пара $(0, 1)$, причем ее квадрат в соответствии с предложенной формулой умножения пар

давал пару $(-1,0)$. Согласно Гамильтону, это означало, что квадрат мнимой единицы равен действительному числу -1 .

Определение Гамильтона оказалась эквивалентным известной геометрической интерпретации. Но оно порождало новые мысли... Если переход от действительных чисел к комплексным есть, по сути, переход от обычных чисел к их парам, то почему бы не рассмотреть и тройки действительных чисел? Сложение таких троек определялось естественным образом, т.е. покомпонентно. А вот с умножением возникли серьезные проблемы. Определить умножение троек чисел так, чтобы при этом сохранялись важнейшие свойства действительных и рациональных чисел, никак не удавалось...

После долгих безуспешных попыток корректного определения троек Гамильтон обратился к четверкам действительных чисел (x_0, x_1, x_2, x_3) . И здесь его ждал успех. Для новых объектов, названных *кватернионами*, Гамильтон разработал соответствующую теорию, во многом напоминающую теорию комплексных чисел, но по ряду показателей отличающуюся от них. Любой кватернион (x_0, x_1, x_2, x_3) интерпретировался как сумма *скаляра* x_0 (действительного числа) и *вектора* $x_1i + x_2j + x_3k$ (именно таково происхождение термина «вектор»). В свою очередь, вектор характеризовался тройкой действительных чисел (x_1, x_2, x_3) и включал в свое определение некие объекты i , j и k , являющиеся аналогами мнимой единицы и подчиняющиеся специфическим правилам перемножения.

Можно было бы ожидать, что кватернионы, будучи естественным обобщением комплексных чисел, займут в математике не менее достойное место. Однако место это оказалось существенно более скромным. Дело в том, что кватернионы унаследовали все основные свойства действительных и комплексных чисел, кроме одного. Их умножение оказалось не *коммутативным*, т.е. результат перемножения может меняться от перестановки сомножителей. Выражаясь современным алгебраическим языком, множество кватернионов образует лишь *тело*, но не *поле*, как действительные и комплексные числа. Более того, как показал *Вейерштрасс*, выход за пределы множества комплексных чисел с сохранением всех алгебраических свойств последних принципиально невозможен.

Вслед за Гамильтоном выдающийся английский математик *Артур Кэли* вводит в рассмотрение восьмерки действительных чисел – так

называемые *октавы*. Для них столь же легко определяется покомпонентное сложение. Можно ввести и умножение. Однако оно оказывается уже не только не коммутативным, но даже и не *ассоциативным*. Это означает, что для произвольных октав a , b и c равенство $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ может нарушаться. Более того, как показал *Георг Фробениус*, существует единственное расширение комплексных чисел (кватернионы), сохраняющее все их свойства кроме коммутативности умножения. Дальнейшее расширение множества чисел возможно. Однако оно неминуемо сопровождается дальнейшей потерей каких-либо алгебраических свойств. Кватернионы, октавы и их естественные обобщения относятся к *гиперкомплексным числам*.

Математики так увлеклись обобщением действительных чисел, что как-то долго не замечали того обстоятельства, что сама их теория фактически всё еще остается в том состоянии, в котором ее когда-то оставил Евдокс. И настало время разработки теории действительных чисел, соответствующей современному уровню развития математики.

5. Действительные числа

Один из крупнейших математиков 19 века *Карл Вейерштрасс* считал, что математика должна обладать безупречной степенью строгости. Занимаясь обоснованием математического анализа, он пришел к необходимости строгого определения действительного числа. Вейерштрасс предложил понимать под действительным числом бесконечную десятичную дробь, т.е. взятое со знаком плюс или минус (в зависимости от того, положительное оно или отрицательное) выражение $\pm a_0.a_1a_2...a_n...$, где a_0 есть неотрицательное целое число, а все остальные

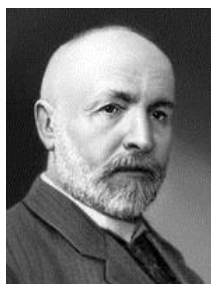


Карл Вейерштрасс
1815 – 1897

величины a_n принимают одно из значений $0, 1, \dots, 9$. При этом если выражение оканчивается бесконечным множеством девяток, например, $0.199999\dots$, то соответствующее число считается равным величине $0.200000\dots$, в которой последняя отличная от нуля цифра увеличивается на единицу, после чего ставятся нули. Если, начиная с какого-то разряда наборы цифр бесконечно повторяются, то соответствующее действительное число является рациональным (так, выражение $1.333333\dots$ соответствует дроби $4/3$). В противном случае

мы имеем дело с иррациональным числом. Это относится, к примеру, к известному числу π (отношению длины произвольной окружности к диаметру данного круга), которое имеет представление 3.141592....

Другой вариант определения действительных чисел дал *Георг Кантор*. Он взял за основу понятие *фундаментальной последовательности*



Георг Кантор
1845 – 1918

рациональных чисел – такой их последовательности $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$, элементы которых неограниченно сближаются, т.е. выражение $|x_k - x_m|$ стремится к нулю при неограниченном возрастании номеров k и m . Это относится, к примеру, к последовательностям рациональных чисел 1.3, 1.33, 1.333, 1.3333 и т.д. или 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415 и т.д. Кантор называет действительным числом соответствующим образом

определенные пределы таких последовательностей. Если же рассматриваемые последовательности имеют естественный предел (как в первом примере), то соответствующее действительное число считается рациональным (в примере, $4/3$). В противном случае предел доопределяется по описанной Кантором схеме, а действительное число оказывается иррациональным. В частности, вторая приведенная последовательность определяет число π .

Фактически конструкция Кантора обобщает определение Вейерштрасса, поскольку последовательность здесь не обязательно строится на основе десятичных представлений соответствующего действительного числа. Вот, к примеру, откуда мы заранее знаем десятичное разложение числа π ? Каким способом мы бы его задали в компьютере с заведомо конечной длиной ячейки? Известно, однако, что число π удовлетворяет соотношению

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

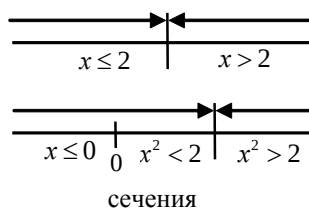
Тогда, следуя Кантору, в качестве элемента x_k последовательности, определяющей число π , можно выбрать сумму первых k слагаемых в правой части приведенного выше равенства, умноженную на 4.

Еще один вариант определения действительных чисел дает *Рихард*

Дедекинд. Он отмечает, что любое рациональное число, например, 2, разбивает всё множество рациональных чисел на две части. Первая из них содержит все рациональные числа, не превосходящие 2, а вторая – те, что больше 2. При этом каждое рациональное число принадлежит какой-то из этих частей, а любое число из первой части заведомо меньше любого числа из второй части. Такую пару



Рихард Дедекинд
1831 – 1916



частей Дедекинд называет *сечением* множества рациональных чисел. Далее он отмечает, что

существует сечения, которые не определяются каким-либо рациональным числом. К примеру, мы можем включить в первую часть сечения все

отрицательные рациональные числа с нулем, а также все положительные числа, квадраты которых меньше двух. Во вторую часть включаются все положительные рациональные числа, квадраты которых больше двух. Построенная таким образом пара множеств отвечает определению сечения, но не задается никаким рациональным числом. Таким образом, сечений рациональных чисел в определенном смысле оказывается больше, чем самих рациональных чисел. И Дедекинд определяет действительные числа как сечения рациональных чисел. Грубо говоря, сечения – это точки на числовой оси, которые разбивают эту ось на две части. Любопытно отметить, что определение Дедекинда в значительной степени оказалось современным изложением старой конструкции, предложенной Евдоксом.

Совершенно иначе подошел к определению действительных чисел Давид Гильберт. Его определение было не конструктивным, как у его



Давид Гильберт
1862 – 1943

предшественников, а аксиоматическим. Он задался целью установить, какие именно общие свойства характерны для всех действительных чисел и только для них. И он дал полный перечень этих свойств. Любой набор объектов, удовлетворяющий этим свойствам, должен, по мнению Гильберта, считаться множеством действительных чисел. Характерно, что определения Вейерштрасса, Кантора и Дедекинда

в равной степени удовлетворяли аксиоматике Гильберта, а значит, были эквивалентными.

6. Натуральные числа

Во второй половине 19 века движение математической мысли шло как в направлении открытия всё новых математических объектов, так и в сторону переосмысления всего достигнутого ранее. Еще до того, как Гильберт решил дать полный перечень свойств, характерных для всех действительных чисел и только для них, итальянский математик *Джузеппе Пеано* проделал аналогичную процедуру с натуральными



Джузеппе Пеано
1858 – 1932

числами. Его аксиоматика была достаточно простой. Прежде всего, рассматривался некий первичный объект, называемый числом 1 и считающийся натуральным числом. Далее, у любого натурального числа есть единственное последующее натуральное число, и у каждого натурального числа, кроме первичного, есть единственное предшествующее число. Кроме того, предполагалось, что если некое

свойство выполнено для первичного натурального числа, а из справедливости этого свойства для какого-то натурального свойства следует его выполнение для последующего числа, то указанное свойство реализуется для всех натуральных чисел (*принцип математической индукции*). Любой набор объектов, удовлетворяющий указанному перечню свойств, признавался за множество натуральных чисел. Однако из каких соображений выбирать этот первичный элемент, и как по данному натуральному числу строить последующее число, Пеано не говорит. Его цель иная – дать полное описание свойств, присущих всем натуральным числам.

В самом конце 19 века конструктивное определение натуральных чисел дает немецкий математик *Готлоб Фреге*, который отталкивается от разработанной Кантором *теории множеств*. Блестящим результатом Кантора была открытая им возможность сравнения множеств. Если между двумя множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то эти множества признавались эквивалентными. Сам факт эквивалентности свидетельствовал о наличии у них какой-то общей характеристики, названной *мощностью*. Если же одно множество оказывалось эквивалентным лишь части другого множества, в то время как второе множество не эквивалентно никакой части первого множества, то считалось, что первое из них имеет меньшую мощность, чем второе. К примеру, множество натуральных чисел эквивалентно множеству четных чисел, поскольку любому

натуральному числу n можно однозначно поставить в соответствие четное число $2n$. В то же время конечное множество, например, состоящее из чисел 1, 2 и 3, эквивалентно лишь части множества натуральных чисел, а значит, обладает меньшей мощностью.



Готлоб Фреге
1848 – 1925

Фреге взял за основу своей конструкции *пустое множество*, вообще лишенное каких-либо элементов. Оно имеет единственное *подмножество* – само пустое множество, поскольку, по определению любое множество содержит себя в качестве подмножества. И вот в качестве числа 1 (т.е. первичного элемента множества натуральных чисел) Фреге предлагает выбрать мощность совокупности всех подмножеств

пустого множества, благо Кантор дал четкое определение мощности любого множества. Далее, предположим, что у нас уже есть некое натуральное число, являющееся мощностью какого-то множества. Пополняем это множество произвольным элементом, ему не принадлежащим. Мощность полученного в результате множества и выбирается за последующее натуральное число.

Предложенные Фреге конструкции в полной степени отвечали определению Пеано, а значит, должны были считаться натуральными числами. Однако действительно ли эти объекты соответствуют нашему естественному представлению о натуральных числах, призванных реализовать процедуру счета?

Когда, к примеру, на заре цивилизации человек решил подсчитать число появившихся на горизонте мамонтов, он начинал загибать пальцы. Что же он делает? Он устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством мамонтов и множеством загнутых пальцев. Эти множества оказываются эквивалентными, а значит, имеют одинаковую мощность, которая применительно к конечному множеству как раз и соответствует числу его элементов.

Что же выбирает Фреге в качестве числа 1? Таковым является мощность совокупности X всех подмножеств пустого множества. Однако оно имеет единственное подмножество – само себя. Любое множество, эквивалентное X , также будет состоять из одного элемента. Последующее натуральное число определяется как мощность множества, полученного в результате добавления к X еще одного элемента. Но построенное таким образом множество будет состоять из двух элементов, т.е. иметь мощность 2. Это, согласно Фреге, и есть

следующее за единицей натуральное число. Добавив к полученному множеству еще один элемент, приходим к множеству с тремя элементами и т.д. Таким образом, мы получаем не что-нибудь, а те самые натуральные числа, с которыми привыкли работать...

В середине 19 века известный немецкий математик *Леопольд Кронекер* говорил: *«целые числа придумал Бог, всё остальное – дело рук человеческих»*. Теперь, как будто, настало время эту мысль скорректировать: Бог придумал множества, а уж люди определили на их основе сначала натуральные числа, а потом – и все остальные.

7. Что же еще?

Но исчерпывается ли многообразие мира чисел описанными выше объектами? Для ответа на этот вопрос следует разобраться, что вообще мы называем числами. Когда-то ведь и отрицательные числа полноценными числами не считались, не говоря уже о числах иррациональных, а, тем более, мнимых... Вот мы говорили о натуральных числах, как о мощностях. Но всякая ли мощность соответствует натуральному числу? Мощность пустого множества естественно считать нулем, поскольку оно вообще не имеет элементов, т.е. число его элементов равно нулю. Но вот мощность всего множества натуральных чисел уже явно не определяет никакое натуральное число, а хотя бы и любое другое из упомянутых ранее. Однако *Кантор* называет мощности *кардинальными числами*. И мы, вслед за ним, в принципе, можем считать любую мощность специфическим обобщением натурального числа. В частности, все множества, эквивалентные в указанном смысле множеству натуральных чисел, называются *счетными*. К таковым относятся рассмотренные ранее множества целых и рациональных чисел. А вот множества действительных и комплексных чисел, а также кватернионов и октав имеют большую мощность, называемую *континуумом*. Существует бесконечное множество мощностей, поскольку, как показал Кантор, мощность любого множества строго меньше мощности совокупности всех его подмножеств.

Кантору принадлежит и другой вариант обобщения натуральных чисел. Очевидно, числа можно упорядочить, располагая их, к примеру, по возрастанию. Аналогичным образом можно упорядочить и множества произвольной природы, если уточнить, что понимается под возрастанием. Два упорядоченных множества имеют один и тот же

порядковый тип, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющие порядок. Это означает, что если для каких-либо элементов x и x' первого множества выполнено неравенство $x < x'$, то для соответствующих им элементов y и y' второго множества выполняется условие $y < y'$ и наоборот. Для конечных множеств совпадение порядкового типа возможно исключительно в случае равенства их мощностей. Тем самым порядковые типы конечных множеств можно отождествить с натуральными числами. А вот в случае бесконечных множеств ситуация уже меняется.

Порядковый тип множества натуральных чисел обычно обозначают символом ω . Такой же порядковый тип будет иметь и последовательность рациональных чисел

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

Эту последовательность можно дополнить единственным элементом 1, являющимся ее пределом:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots, 1.$$

Получаемое в результате множество также счетно, причем все его элементы расположены строго по возрастанию. Однако оно не может иметь один и тот же порядковый тип с предшествующим множеством, поскольку, несомненно, обладает наибольшим элементом, отсутствующим в первом множестве. Порядковый тип построенного множества обозначается через $\omega+1$. Аналогичным образом можно определить и другие порядковые типы бесконечных множеств. Все они называются *трансфинитными числами*, т.е. выходящими за пределы конечных (финитных) объектов. Для них можно естественным образом задать стандартные арифметические операции. Вот только свойства этих операций будут не совсем обычные. К примеру, сложение трансфинитных чисел ассоциативно, но не коммутативно.

Однако и для ставших уже привычными действительных и комплексных чисел существует своя дополнительная классификация. Так, *алгебраическими числами* называются всевозможные решения уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

с рациональными коэффициентами. Числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*, что в переводе с латинского означает «выходящие за пределы». Действительно, они

оказывается настолько сложными объектами, что их практическое нахождение обычными средствами (за счет непосредственного решения соответствующих уравнений) оказывается принципиально невозможным. К числу алгебраических наряду с рациональными числами относятся, к примеру, иррациональное число $\sqrt{2}$ и мнимое число i , являющиеся решениями квадратных уравнений $x^2 = 2$ и $x^2 = -1$.

Понятие трансцендентного числа ввел *Лейбниц*. Однако первые серьезные результаты в этом направлении были получены в середине 19 века французским математиком *Жозефом Лиувилем*. Он привел примеры трансцендентных чисел и доказал их бесконечность. Затем другой французский математик *Шарль Эрмит* доказал трансцендентность числа e – основания натурального логарифма, а вслед за ним *Фердинанд Линдеман* получил аналогичный результат для числа π , закрыв тем самым проблему *квадратуры круга*. Таким образом, столь важные для математики и ее приложений числа e и π не только не являются рациональными, но даже не могут быть получены как корни какого-либо алгебраического уравнения. И, наконец, *Кантор* доказал, что множество всех алгебраических чисел счетно. Поскольку всё множество действительных чисел имеет мощность континуум, отсюда следовало, что абсолютное большинство чисел оказываются трансцендентными, т.е. во многом аналогичными числам e и π .

Далее, один из основоположников теоретической информатики *Алан Тьюринг* ввел понятие *вычислимого числа*. Число называется вычислимым, если его можно определить с любой степенью точности с помощью некоторого алгоритма. Все алгебраические числа заведомо вычислимы, поскольку их можно, в принципе, найти, решая определяющие их алгебраические уравнения. Существуют и трансцендентные вычислимые числа. К таковым относятся, к примеру, числа e и π . Так, число π можно определить с помощью приведенного выше представления в виде бесконечной суммы. И, конечно же, возникает острое желание привести пример какого-нибудь конкретного невычислимого числа. На первый взгляд, это заведомо невозможно, поскольку, если мы сможем привести его конкретное значение, например, в виде бесконечной десятичной дроби, то это говорит о возможности его вычисления с любой степенью точности, что противоречит отсутствию вычислимости. Но, как не странно, примеры невычислимых чисел существуют. По-видимому, самым известным из них является *константа Хайтина* – вероятность того,

что произвольно выбранная компьютерная программа на конкретном алгоритмическом языке рано или поздно остановится. Число такое заведомо существует, однако принципиально отсутствует алгоритм для его нахождения, что связано с *теоремой Тьюринга об остановке* программы. Любопытно, что множество вычислимых чисел счетно, а значит, абсолютное большинство действительных чисел оказываются невычислимыми. Таким образом, типичными представителями множества действительных чисел оказываются не просто иррациональные числа, и даже не такие трансцендентные числа, как e и π , а какие-то странные объекты типа числа Хайтина, которые и определить-то практически невозможно.

Существуют ли иные классы чисел? В самом конце 19 века *Курт Гензель* ввел *p-адические числа*. За основу он взял определение Кантора действительных чисел. Здесь вновь рассматриваются фундаментальные последовательности рациональных чисел – такие последовательности, элементы которых неограниченно сближаются. Однако близость понимается здесь в качественно ином смысле. К примеру, для $p = 2$ близость двух различных рациональных чисел x и y определяется следующим образом. Их разность представляется в виде $x - y = 2^k m / n$, где число k целое, а m и n – нечетные числа. Тогда расстояние между числами считается равным $1/2^k$. К примеру, при $x = 7/3$, $y = 3/4$ их разность равна числу $19/12$, которое можно представить в виде $2^{-2}19/3$. Тогда расстояние между данными числами по Гензелю равно 2^2 , т.е. четырем. Такое расстояние характеризует степень делимости данного рационального числа на простое число 2: чем меньше расстояние (т.е. чем ближе числа друг другу), тем «лучше» данное число (разность) делится на 2. Так 8 делится на 2 лучше, чем 4, 4 – лучше, чем 6, а 6 – лучше, чем $3/2$.

Повторяя затем конструкцию Кантора, Гензель получает *p-адические числа* как пределы соответствующих последовательностей, где сходимость понимается в смысле указанной выше степени близости. При этом каждое простое число p определяет свой числовой класс. Полученные множества сохраняют многие свойства действительных чисел, в частности, являются полями. Но есть и отличия. Известна, к примеру, *аксиома Архимеда*, выдвинутая еще *Евдоксом* при его построении теории чисел и входящая в состав стандартной аксиоматики действительных чисел. Согласно этому утверждению, если имеются две величины, то взяв меньшую из них

некоторое количество раз, мы получим величину, превышающую большую из них. На множестве p -адических чисел это свойство не реализуется.

Качественно иное обобщение множества действительных чисел предложил в середине 20 века *Абрахам Робинсон*. В основе определенных им *нестандартных чисел* лежит предположение о существовании бесконечно малых величин, отличных от нуля. Допускаются и бесконечно большие числа. На множестве нестандартных чисел также нарушается аксиома Архимеда. Понятно, что любое обобщение понятия числа возможно исключительно за счет ослабления тех или иных требований, предъявляемых к обычным числам. На это стоит взглянуть еще шире...

Числа обладают рядом специфических свойств. Можно попытаться взять за основу эти свойства и выяснить, в какой степени их можно распространить на объекты произвольной природы. К примеру, числа можно расположить в порядке их возрастания. Определив упорядочение произвольных объектов, мы приходим к общему понятию *упорядоченного множества*. Далее, над числами можно выполнять операции сложения, умножения и др. Задавая операции на произвольных множествах с тем или иным набором свойств, мы получим различного рода алгебраические объекты – *группы, кольца, поля* и т.п. Кроме того, числа можно оценивать в смысле их близости друг к другу. Вводя оценку степени близости для произвольных объектов, мы приходим к понятиям *топологического* и *метрического пространства*. Тем самым, упорядоченные множества, группы, топологические пространства и другие математические объекты можно с определенным основанием также считать обобщением числовых классов. Таким образом, в современной математике в значительной степени реализуется давняя мысль Пифагора: «*все вещи суть числа*».

Литература

1. Берман Г.Н. Число и наука о нем. – М., Физматгиз, 1960.
2. Кириллов А.А. Что такое число. – М., Наука, 1993. – 80 с.
3. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? М., МНЦМО, 2010. – 568 с.
4. Панов В.Ф. Математика древняя и юная. – М., МГТУ, 2006. – 648 с.
5. Ожигова Е.П. Что такое числа. – М., УРСС, 2004. – 96 с.
6. Оре О. Приглашение в теорию чисел. – М., Наука, 1980. – 128 с.
7. Стиллвелл Дж. Математика и ее история. – Москва, Ижевск, ИКИ, 2004. – 530 с.
8. Юдин Д.Б., Юдин А.Д. Число и мысль. – М., Знание, 1985. – 192 с.