

СИММЕТРИЯ ВОКРУГ НАС

С.Я. Серовайский

Казахский национальный университет им. Аль-Фараби
Казахстан, 050078, Алматы, пр. аль-Фараби, 71
+7 (727) 275-39-34, serovajskys@mail.ru

Симметрия, как бы широко или узко мы не понимали это слово, есть идея, с помощью которой человек пытался объяснить и создать порядок, красоту и совершенство.

Герман Вейль

1. Симметрии и группы

Когда-то очень давно великий греческий мыслитель *Пифагор*, стоявший у истоков философии и математики, провозгласил, что в мире царит гармония. Ярчайшим проявлением этой гармонии служит *симметрия*, что в переводе с греческого означает соразмерность. Различные формы симметрии во всём своем многообразии широко встречаются как в природе, так и в различных сферах человеческой деятельности.

Под симметрией принято понимать свойство объекта, заключающееся в закономерном повторении отдельных его частей. Рассмотрим, к примеру, бабочку, обладающую *зеркальной симметрией*. Ее левая половина перейдет в правую половину при зеркальном отражении относительно вертикальной прямой, которая делит бабочку пополам. А вот снежинка обладает *угловой симметрией*. В результате ее поворота вокруг центра на 60^0 мы получим точно такую же снежинку.



На основании чего мы можем заключить, что в обоих случаях речь идет о проявлении одного и того же явления, называемого симметрией? У нас есть некий объект (бабочка, снежинка), который в результате некоторого преобразования (зеркальное отображение, поворот) переходит в себя. Отметим еще одно немаловажное обстоятельство. В результате повторного выполнения рассматриваемых преобразований мы вновь получаем тот же самый объект. В частности, повернув снежинку еще раз 60^0 , мы

получим точно такую же снежинку. Но это повторное выполнение двух поворотов дает нам поворот на 120^0 – самостоятельное преобразование, переводящее наш объект в себя. И еще, каждому преобразованию, переводящему наш объект в себя, соответствует обратное преобразование, возвращающее его в исходное положение. К примеру, выполнив поворот снежинки на 60^0 по часовой стрелке, можно с помощью ее поворота на 60^0 против часовой стрелки вернуться назад.

Попытавшись дать формальное описание приведенных рассуждений, мы приходим к определению группы, являющейся одним из важнейших математических понятий. Под *группой* в математике понимается некоторое множество X , на котором задана какая-либо *операция* $*$, подчиняющаяся определенным требованиям. Задание операции предполагает, что любым двум элементам x и y множества X ставится в соответствие конкретный элемент $x*y$ того же множества. К примеру, любым двум натуральным (т.е. целым положительным) числам x и y можно поставить в соответствие их сумму $x+y$ или произведение $x \cdot y$, которые непременно будут натуральными числами. В то же время их разность $x-y$ может оказаться отрицательным числом, а отношение x/y – дробным числом, а значит, они не принадлежат данному множеству. Тем самым на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел сложение и умножение являются операциями, а вычитание и деление – уже нет. Однако на множестве всех целых чисел $\mathbf{Z}$ (т.е. отрицательных тоже) вычитание оказывается операцией.

Задание операции на множестве еще не определяет группу, поскольку требуется также выполнение некоторых дополнительных свойств. Первое из них представляется вполне естественным и называется *ассоциативностью*. Оно предполагает выполнение равенства $(x*y)*z = x*(y*z)$ для любых трех элементов x , y и z множества X . Это означает, что мы можем сначала выполнить операцию между элементами x и y , а потом – между полученным результатом и z , а можем сначала выполнить операцию между y и z , а уже потом – между x и полученным результатом. И в обоих случаях конечный итог будет одинаковым. К примеру, сложение и умножение как натуральных, так и целых чисел являются ассоциативными операциями. А вот операция вычитания целых чисел не ассоциативна. В частности, $(5-3)-2 = 2-2 = 0$. С другой стороны, $5-(3-2) = 5-1 = 4$. Отметим, что для ассоциативных операций можно избежать употребления скобок. В частности, выражение $5+3+2$ представляется

осмысленным, а 5-3-2 – нет, поскольку итог будет зависеть от того, которую из двух операций следует выполнять в первую очередь.

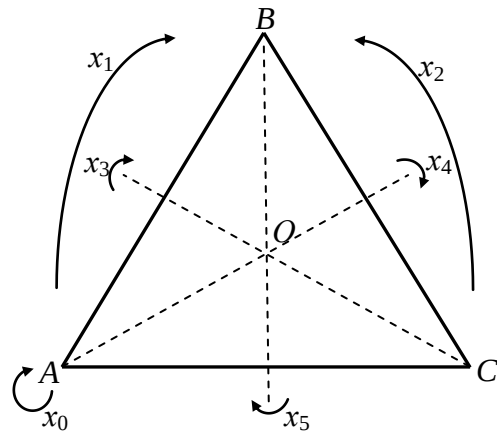
Вторым требованием, предъявляемым к операции для получения группы, служит существование *нейтрального* элемента. Таковым будет элемент e , удовлетворяющий условию $x*e = e*x = x$ для любого элемента x из заданного множества X . К примеру, на множестве натуральных или целых чисел справедливо равенство $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, а значит, число 1 оказывается там нейтральным элементом. Применительно к сложению справедливо равенство $x+0 = 0+x = x$. Однако нуль не принято относить к натуральным числам. Таким образом, 0 есть нейтральный элемент относительно сложения на множестве $\mathbf{Z}$, а вот на $\mathbf{N}$ такого элемента не существует.

Наконец, третье и последнее свойство, требуемое для получения группы, состоит в том, что любой элемент x из данного множества X обладает *обратным* элементом, обозначаемым x^{-1} . Элемент x^{-1} из X называется обратным к x , если результатом его операции с x будет нейтральный элемент, т.е. всегда выполняется соотношение $x*x^{-1} = x^{-1}*x = e$. Так, на множестве целых чисел справедливо $x+(-x) = (-x)+x = 0$. Тем самым, целое число $-x$ оказывается обратным к x относительно сложения (например, -2 является обратным к числу 2). В то же время ни на множестве целых, ни, тем более, на множестве натуральных чисел существование обратного элемента в смысле умножения не гарантировано. К примеру, равенству $2 \cdot y = 1$ удовлетворяет число $y = 1/2$, которое не является целым.

Подводя итоги, заключаем, что среди всех рассмотренных примеров лишь множество целых чисел с операцией сложения образует группу. Группу относительно умножения образует множество всех ненулевых рациональных чисел, т.е. всевозможных дробей p/q , где p и q – целые числа, отличные от нуля. На нем нейтральным элементом по-прежнему будет число 1, а обратным элементом к дроби p/q является рациональное число q/p .

Обратимся теперь к рассмотрению какой-либо достаточно простой симметричной геометрической фигуры, например, к равностороннему треугольнику ABC . Рассмотрим такие преобразования, которые переводят эту фигуру в себя. К таковым относится поворот треугольника вокруг его центра O на 120° по часовой стрелке. При этом точка A переходит в B , точка B – в C , а C – в A . Указанное преобразование x_1 можно обозначить как $ABC \rightarrow BCA$. Далее, имеется поворот x_2 вокруг центра треугольника на 120° против часовой стрелки, т.е. преобразование $ABC \rightarrow CAB$. Кроме того, имеются еще повороты вокруг трех осей симметрии, которыми являются перпенди-

куляры из каждой вершины треугольника на противоположную сторону. В частности, в результате преобразования x_3 точки A и B меняются местами, а C остается на своем месте, т.е. мы имеем дело с преобразованием $ABC \rightarrow BAC$. Аналогичный смысл имеют преобразование x_4 , т.е. $ABC \rightarrow ACB$, и x_5 , т.е. $ABC \rightarrow CBA$. Можно добавить сюда еще тривиальное (тождественное) преобразование x_0 , при котором все вершины остаются на своем месте, т.е. $ABC \rightarrow ABC$. Определяем теперь множество X как совокупность всех указанных преобразований.



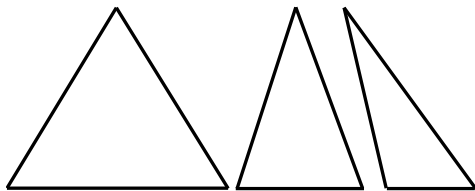
Зададим на множестве X операцию $*$, называемую *композицией* и состоящую в последовательном выполнении двух преобразований. В частности, выражение $x_2 * x_3$ означает, что сначала выполняется преобразование x_2 , т.е. поворот вокруг центра против часовой стрелки, а затем – поворот x_3 вокруг оси симметрии, проходящей через вершину C . За счет первого преобразования вершины треугольника меняются местами в соответствии с правилом $ABC \rightarrow CAB$, а в результате второго меняются местами первая и вторая вершины треугольника, т.е. в итоге получается положение ACB . Таким образом, в результате рассматриваемой композиции преобразований мы получаем преобразование $ABC \rightarrow ACB$, т.е. x_4 . Очевидно, результатом композиции любых двух преобразований, т.е. элементов множества X , будет элемент того же множества, т.е. мы действительно имеем дело с операцией на X . В приведенной таблице (своеобразной таблице умножения) композиции $x_2 * x_3$ соответствует выражение в ячейке строки x_2 и столбца x_3 , т.е. x_4 .

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_0	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	x_1	x_2	x_0	x_5	x_3	x_4
x_2	x_2	x_0	x_1	x_4	x_5	x_3
x_3	x_3	x_5	x_4	x_0	x_1	x_2
x_4	x_4	x_3	x_5	x_2	x_0	x_1
x_5	x_5	x_4	x_3	x_1	x_2	x_0

Нетрудно убедиться, что композиция преобразований является ассоциативной операцией, а в качестве нейтрального элемента здесь выступает тождественное преобразование x_0 . Наконец, преобразования x_1 и x_2 являются обратными друг к другу (поворот по и против часовой стрелки вокруг центра), а остальные преобразования – обратными к себе (двойной поворот вокруг осей симметрии). Таким образом, множество X преобразований, переводящих данную фигуру в себя, с операцией

композиции действительно образуют группу, называемую *группой симметрий* данной фигуры.

Отметим, что для равнобедренного треугольника существует только одна ось симметрии, а значит, единственное нетривиальное преобразование, переводящее его в себя – поворот вокруг этой оси. А вот для треугольника общего вида соответствующее множество X состоит только из тривиального преобразования. Количество элементов



множества X называют *порядком* группы. Чем выше порядок группы симметрий, тем в большей степени симметричной оказывается данная фигура. В частности, группа симметрий

треугольника общего вида имеет порядок 1. Более симметричным представляется равнобедренный треугольник, имеющий порядок 2. Равносторонний треугольник с порядком 6, несомненно, выглядит еще более симметричной фигурой. А вот для круга поворот вокруг центра на любой угол преобразует данную фигуру в себя. В таком случае говорят, что соответствующая группа является *бесконечной*, в то время как предшествующие группы *конечны*. Очевидно, степень симметричности круга несравненно выше, чем у любого треугольника.

Итак, мы видим, что теория групп действительно дает некоторый аппарат для исследования симметрии. Мы рассмотрим его простейшие приложения к задачам алгебры, геометрии и физики.

2. Алгебраические приложения

Предметом *алгебры* изначально были *уравнения*. К примеру, широко известна *теорема Пифагора*, согласно которой сумма квадратов катетов в прямоугольном треугольнике равна квадрату гипотенузы, что соответствует равенству $x^2 + y^2 = z^2$. Предположим, что две стороны рассматриваемого треугольника известны. Тогда данное соотношение можно рассматривать как уравнение относительно неизвестной третьей стороны. Поскольку неизвестная величина входит в это равенство с квадратом, то и уравнение называется *квадратным*. *Квадратное уравнение* общего вида имеет вид $x^2 + a_1x + a_2 = 0$, где параметры a_1 и a_2 считаются известными, а x подлежит нахождению. В свою очередь, квадратное уравнение является частным случаем алгебраических уравнений общего вида. *Алгебраическим уравнением* порядка n является задача определения таких чисел x , которые удовлетворяют равенству

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, называемые *коэффициентами уравнения*, считаются известными величинами.

Понятно, что *корень*, т.е. решение уравнения, зависит от его коэффициентов. Он определяется по некоторой формуле $x = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, причем проблема состоит в отыскании подходящей функции f . Более или менее законченную теорию квадратных уравнений разработал в 9 веке *Мухаммед аль-Хорезми*. В частности, была получена формула

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_2},$$

позволяющая найти решения x_1 и x_2 при выборе знаков $+$ или $-$ в этом равенстве. В 16 веке итальянские математики *Сципион дель Ферро*, *Никколо Тарталья* и *Джироламо Кардано* получили аналогичные результаты для кубического уравнения, причем соответствующая функция f включала в себя корни (иначе, *радикалы*) третьей степени. Затем *Лудовико Феррари* вывел формулу решения уравнения четвертого порядка, куда вошли уже радикалы четвертой степени. А вот получить аналогичный результат для уравнений пятого и более высоких порядков как-то не удавалось.

Первые глубокие результаты для алгебраических уравнений общего вида принадлежат выдающемуся французскому математику второй половины 16 века *Франсуа Виету*, разработавшему единую схему решения алгебраических уравнений до четвертого порядка включительно. Кроме того, им была доказана теорема, устанавливающая связь между коэффициентами уравнения и его корнями $x_1, x_2, \dots, x_n$. В частности, справедливы формулы:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \\ a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, \\ a_3 &= -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n), \\ &\dots \\ a_{n-1} &= (-1)^{n-1} (x_1x_2\dots x_{n-1} + \dots + x_2\dots x_{n-1}x_n), \\ a_n &= (-1)^n x_1x_2\dots x_n. \end{aligned}$$

Теорема Виета имела далеко идущие последствия.

В 1770 г. выходит трактат великого французского математика *Жозефа Луи Лагранжа*, посвященный алгебраическим уравнениям.



Франсуа Виет
1540 – 1603

Лагранж обращает внимание на удивительную симметричность формул Виета. Если поменять местами какие-нибудь корни $x_1, x_2, \dots, x_n$ в любом из этих равенств, то результат никак не изменится. Что же такое перестановка рассматриваемых величин? Меняя их местами, мы фактически проводим преобразования, аналогичные тем, что выполняли, переставляя вершины правильного треугольника. Лагранж назвал такие преобразования *подстановками*. На множестве всевозможных подстановок можно определить композицию, которая, как и в рассмотренном ранее случае, состоит в последовательном выполнении двух подстановок. Так математика впервые столкнулась с понятием группы. Отметим, что аналогичные результаты практически в то же время получил другой французский математик *Александр Вандермонд*. А немного позднее близкие конструкции появились в работах *Карла Фридриха Гаусса*, только теперь уже в теории чисел...



Жозеф Луи Лагранж
1736 – 1813

Однако вернемся к работе Лагранжа. Он отмечает, что стандартные арифметические операции сложения, вычитания, умножения и деления над коэффициентами, определяемые по формулам Виета, сохраняют вышеуказанную симметрию. К примеру, в формуле

$$a_1 + a_2 = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$$

также можно произвольным образом переставлять местами корни $x_1, x_2, \dots, x_n$ при сохранении итогового результата. Таким образом, в результате применения обычных арифметических операций над коэффициентами уравнения, т.е. всевозможных *рациональных функций* от этих коэффициентов, мы не сможем получить разные результаты, коль скоро любой набор таких операций сохраняет неизменной симметричную связь между корнями и коэффициентами уравнения. В то же время, решения даже квадратного уравнения, вообще говоря, различаются между собой. Это говорит о том, что функция f , характеризующая зависимость решения уравнения от его коэффициентов, не может ограничиваться арифметическими операциями, т.е. рациональными функциями.

И действительно, приведенная выше формула решения квадратного уравнения включает в себя процедуру взятия двузначного квадратного корня (радикала). Именно использование радикала позволило получить две асимметричных формулы для решений уравнения. Отметим, что использование квадратного корня умножает число значений функции вдвое (мы получаем два разных решения

вместо одного) и уменьшает степень симметрии полученных формул (порядок соответствующей группы) также вдвое (в отсутствии радикала мы бы получили две одинаковых формулы для корней, т.е. могли бы менять решения x_1 и x_2 местами). Оказалось, что в общем случае радикал порядка p (квадратный, кубический и т.д. корень) увеличивает число значений функции и уменьшает степень симметрии получаемых формул ровно в p раз.

Известные методы решения алгебраических уравнений сводились к поиску преобразований, понижающих порядок уравнения. Лагранж установил, что эти методы фактически сводятся к установлению зависимости между решениями данного уравнения и некоторого вспомогательного уравнения. Если это вспомогательное уравнение имеет меньший порядок по сравнению с исходным, то оно имеет меньшее число корней, а значит, стало меньше возможностей переставлять эти корни местами. Тем самым вспомогательное уравнение имеет более низкую степень симметрии. На уровне теории групп за этим стоит переход от группы подстановок исходного уравнения к группе меньшего порядка для вспомогательного уравнения.

Фактически Лагранж приходит здесь к понятию *подгруппы*. Пусть задано множество X с операцией $*$, образующее группу, а Y – некоторое подмножество X . Если Y само оказывается группой относительно данной операции, то эту группу называют подгруппой исходной группы. К примеру, множество целых четных чисел с операцией сложения оказывается подгруппой группы всех целых чисел с той же операцией, а вот множество натуральных чисел (другое подмножество множества целых чисел) подгруппу не образует. Для группы симметрий равностороннего треугольника подгруппой будет, к примеру, *группа поворотов* x_0, x_1, x_2 . Любая группа имеет в качестве тривиальной подгруппы группу, состоящую исключительно из нейтрального элемента. Попутно Лагранж установил, что порядок группы непременно делится на порядок любой своей подгруппы. К примеру, для группы симметрий равностороннего треугольника, имеющей порядок 6, может существовать подгруппа третьего порядка (указанная группа поворотов), второго порядка (например, с элементами x_0, x_3), первого порядка (тривиальная группа), но никак не четвертого или пятого.

Отталкиваясь от понятия подстановки и соображений симметрии, Лагранж указал универсальный способ построения таких вспомогательных уравнений. При этом оказалось, что для произвольного уравнения до четвертого порядка включительно

вспомогательное уравнение наверняка имеет более низкий порядок. К примеру, существует функция четырех переменных (корней уравнения четвертого порядка) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$, принимающая ровно три значения при перестановке ее аргументов. За счет этого любое уравнение четвертого может быть сведено к уравнению третьего порядка. А вот для уравнения пятого порядка в результате аналогичного преобразования почему-то получалось уравнение шестого порядка. Не этим ли объяснялись трудности с нахождением решения уравнения пятой степени? Однако продвинуться дальше Лагранжу никак не удавалось.

Окончательной целью Лагранжа было нахождение решения произвольного алгебраического уравнения по аналогии с известными формулами для уравнений до четвертого порядка включительно. Но желанная цель так и оставалась не достигнутой, пока в 1799 г. итальянский математик *Паоло Руффини* не пришел к заключению о том, что цель эта вообще не достижима. Исследуя свойства подстановок пятого порядка, он установил, что если функция пяти переменных (решений уравнения пятого порядка) принимает меньше пяти различных значений при перестановке ее аргументов, но таких значений должно быть не более двух. Отталкиваясь от этого результата, Руффини приходит к выводу, что произвольное уравнение пятого порядка не может иметь решения, выраженного с помощью арифметических операций и радикалов через коэффициенты уравнения. Впрочем, рассуждения Руффини еще не обладали должной степенью строгости. Однако в 1826 г. к аналогичным выводам пришел норвежский математик *Нильс Абель*, причем достоверность его результатов не вызывала ни малейшего сомнения.

Для логического завершения теории требовалось еще выяснить, какие конкретно алгебраические уравнения допускают решения, выраженные в радикалах, а какие - нет. Эта задача была вскоре решена *Эваристом Галуа*, одним из наиболее ярких и загадочных математиков всех времен. Галуа фактически разработал основы теории групп. Сам термин "группа" (группировка) принадлежит именно ему. Среди всевозможных подгрупп Галуа выделяет *нормальные подгруппы*. Подгруппа Y группы X с операцией $*$ называется нормальной, если для любого элемента x из X множества всевозможных его композиций $x*y$ и $y*x$ со всеми элементами y из множества Y совпадают. Если группа *коммутативна*, т.е. выполнено условие $x*y = y*x$ для всех элементов x и y из X , то любая подгруппа



Эварист Галуа
1811 – 1832

оказывается нормальной. Однако для некоммутативных групп (а именно таковыми являются группы подстановок общего вида) это уже, вообще говоря, не так.

Согласно Галуа, каждое алгебраическое уравнение характеризуется некоторой группой перестановок его корней, которая оставляет неизменными рациональные функции этих корней. Уменьшение степени симметрии (т.е. порядка группы) за счет использования радикала (иррациональной функции) происходит исключительно при переходе от указанной группы к какой-либо ее нормальной подгруппе. Дальнейшее понижение порядка уравнения осуществляется при переходе к нормальной подгруппе уже этой подгруппы. Таким образом, уравнение можно разрешить в радикалах тогда и только тогда, когда существует цепочка вложенных нормальных подгрупп, сводящаяся, в конце концов, к тривиальной подгруппе. Попутно это объясняло, почему *формула Кардано*, дающая решения кубического уравнения, наряду с кубическими корнями включает и квадратные, а *формула Феррари* для уравнения четвертого порядка содержит не только радикалы четвертого порядка, но также кубические и квадратные корни.

Итак, в процессе исследования симметрии решений алгебраических уравнений были разработаны основы теории групп. Однако достаточно скоро выяснилось, что разработанный аппарат применим не только в алгебре, но и в других разделах математики, где симметрия играет столь же важную роль.

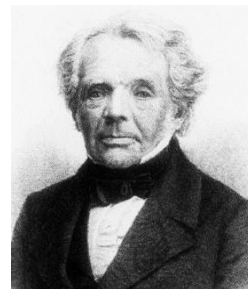
3. Геометрические приложения

Трагическая гибель Галуа на дуэли в возрасте всего двадцати лет затормозила развитие теории групп, а его пионерские работы долгое время оставались не понятыми. Однако в 1870 г. выходит солидный трактат *Камилла Жордана*, посвященный теории подстановок и являющийся, по утверждению автора, комментарием к теории Галуа. И вот уже в Париж на лекции Жордана приезжают молодые ученые со всей Европы в надежде приобщиться к новым математическим веяниям. Среди них были Феликс Клейн и Софус Ли, в значительной степени определившие дальнейший ход развития теории групп и учения о симметрии. Однако их идеи легли на подготовленную почву.

Уже в классических работах древнегреческих математиков *Евклида*, *Аполлония* и *Птолемея* немалая роль уделялась преобразованиям геометрических объектов. К примеру, равенство треугольников доказывается Евклидом с помощью их перемещения. Внимание к геометрическим преобразованиям постепенно возрастало. И в те самые годы, когда творили Абель и Галуа, в работах немецкого математика *Августа Фердинанда Мёбиуса* геометрические преобразования становятся непосредственным объектом исследования.

Различные типы геометрических преобразований издавна рассматривались многими геометрами. Однако именно Мёбиусу принадлежит идея композиции, т.е. последовательного выполнения двух преобразований. Кроме того, он обращает внимание на то, что в процессе определенных классов преобразований сохраняются некоторые свойства геометрических фигур – длина, подобие, параллельность и т.д. Таким образом, разнообразные геометрические свойства оказываются по своей природе *инвариантами* (неизменными характеристиками) тех или иных классов геометрических преобразований.

Понятие группы еще не утвердилось в математике. Вследствие этого Мёбиус не смог разглядеть группу в классе преобразований определенного типа (сдвигов, поворотов и т.д.) с операцией композиции. А вот *Феликс Клейн*, уже знакомый, как с идеями Мёбиуса, так и с теорией Галуа, в полной степени осознал возможности применения аппарата теории групп в геометрии. В 1872 году Клейн выступает в Эрлангенском университете с докладом на тему "*Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований*",



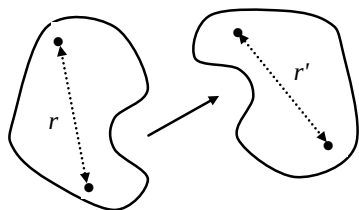
Август Мёбиус
1790 – 1860



Феликс Клейн
1849 – 1925

вошедшем в историю математики под названием *Эрлангенская программа*. К тому времени существовало уже значительное количество практически самостоятельных геометрических теорий – геометрии Евклида, Лобачевского, Римана, аффинная, проективная, конформная и др. Клейн выдвинул идею классификации различных геомет-рических направлений в зависимости от классов преобразований, сохраняющих те или иные геометрические свойства. Тем самым один раздел геометрии от другого отличается соответствующей группой преобразований пространства, а непосредственным предметом изучения любого такого раздела оказываются инварианты именно таких преобразований.

В частности, обычная *евклидова геометрия* изучает те и только те свойства геометрических объектов, которые сохраняются при их всевозможном перемещении без деформации. Если под действием такого преобразования, называемого *движением*, точки на плоскости с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , находящиеся на расстоянии $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ друг от друга, переходят в некоторые точки (x'_1, y'_1) и (x'_2, y'_2) , находящиеся на расстоянии $r' = \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2}$



друг от друга, то справедливо равенство $r = r'$, т.е. расстояние между точками в процессе движения сохраняются. Соответствующий класс преобразований включает в себя сдвиги и повороты рассматриваемых объектов, а также

их всевозможные сочетания. Очевидно, последовательное выполнение двух движений также является движением. Тем самым на множестве движений определяется операция композиции.

Нетрудно убедиться, что данная операция оказывается ассоциативной, роль нейтрального элемента играет здесь тождественное преобразование (оно оставляет геометрический объект на месте), а каждому движению соответствует обратное движение, восстанавливающее объект на исходном месте, т.е. нейтрализующее действие исходного движения. Таким образом, множество преобразований указанного типа образует группу, называемую *группой движений*. Все свойства геометрических фигур, не меняющиеся в процессе таких преобразований, и являются предметом евклидовой геометрии.

Обобщением евклидовой геометрии является *аффинная геометрия*, в которой изучаются те и только те свойства объектов, которые не меняются при аффинных преобразованиях. Аффинное преобразование точки (вектора) x характеризуется равенством

$f(x) = Ax + b$, где A есть обратимая матрица, а b – некоторый вектор. В процессе аффинных преобразований прямая переходит в прямую, треугольник – в треугольник, параллельные прямые – в параллельные прямые, эллипс – в эллипс, парабола – в параболу. Однако длина отрезков может меняться, а значит, не относится (в отличие, к примеру, от параллельности) к *аффинным свойствам*. При этом совокупность всевозможных аффинных преобразований также образуют группу.

Чрезвычайно важным геометрическим направлением является *проективная геометрия*, появившаяся в связи с запросами живописи и архитектуры как учение о перспективе. В ней исследуются, в частности, такие геометрические свойства, которые не меняются в процессе проектирования. Проективные преобразования также переводят прямые в прямые, но вот свойство параллельности при этом не сохраняется. В процессе проективного преобразования треугольник



непременно перейдет в треугольник, но его форма искажается. В проективной геометрии можно отличить прямую от кривой, но вот окружность, эллипс, парабола и гипербола в процессе проективных преобразований могут переходить друг в друга. Естественно, множество всевозможных проективных преобразований также образует группу.

Впоследствии основные идеи Эрлангенской программы Клейна вышли далеко за пределы геометрии. В частности, в 1945 году американские математики *Самуэль Эйленберг* и *Саундерс Маклейн* разработали *теорию категорий*, являющуюся в некотором смысле теорией математических теорий. Каждая конкретная категория состоит из всевозможных однотипных математических объектов и преобразований одних объектов данного типа в другие объекты того же типа. Такие преобразования называют *морфизмами* данной категории. К примеру, *категория групп* оперирует со всевозможными группами и преобразованиями одних групп в другие, называемыми *гомоморфизмами*. В *категории упорядоченных множеств* рассматриваются упорядоченные множества (множества, элементы которых можно расположить в некотором смысле по порядку) и

преобразования, сохраняющие упорядоченность – *монотонные операторы*. Категория топологических пространств характеризуется топологическими пространствами (множествами, для которых имеет смысл понятие близости элементов) и преобразованиями, сохраняющими свойства близости – *непрерывными операторами*. Если же рассматриваемое преобразование обратимо, причем соответствующее обратное преобразование также обеспечивает переход от одного объекта данной категории к другому, т.е. является морфизмом, то это преобразование называется *изоморфизмом* данной категории. Совокупность всевозможных изоморфизмов данной категории с операцией композиции (последовательного выполнения двух преобразований) образует группу. Так вот, предметом данной математической теории являются исключительно инварианты соответствующей *группы изоморфизмов*, т.е. те и только те свойства, которые сохраняются при изоморфизмах данной категории. В частности, в теориях групп, упорядоченных множеств и топологических пространств изучаются, соответственно, групповые, порядковые и топологические свойства объектов. Именно эти свойства сохраняются в результате изоморфизмов соответствующей категории. Так, идеи симметрии, выраженные посредством теории групп, стали одним из основополагающих принципов всей математики.

Однако нам имеет смысл вернуться назад в 1870 год к лекциям Жордана по теории подстановок, среди слушателей которых наряду с Клейном был молодой норвежский математик *Софус Ли*. Клейн видел в геометрических преобразованиях исключительно алгебраический объект,



Софус Ли
1842 – 1899

т.е. для него определяющим был тот факт, что на множестве преобразований того или иного типа определена алгебраическая операция – композиция. Главной заслугой Ли было осознание того, что для преобразований имеет смысл также и понятие близости. К примеру, малый сдвиг или поворот на малый угол соответствуют достаточно малым движениям геометрических объектов. Для более глубокого понимания их структуры часто требуется установить, какие их свойства сохраняются при малых преобразованиях, что уже имеет отношение к теории топологических пространств. Софус Ли стал основоположником нового раздела математики, названного впоследствии теорией *групп Ли*. Группа Ли представляет собой достаточно сложный математический объект, сочетающий в себе алгебраические (групповые) свойства с

топологическими (более точно, свойствами *гладких многообразий*, являющихся специфическими обобщениями евклидова пространства). Обладая значительным запасом разнообразных свойств, группы Ли нашли широкое применения практически во всех направлениях современной математики.

Софус Ли практически в одиночку разработал математический аппарат теории групп Ли, а также нашел им важные приложения. В частности, в математике наряду с алгебраическими рассматриваются и *дифференциальные уравнения* – соотношения, в которые неизвестная величина входит вместе со своими производными. К примеру, широко известен *второй закон Ньютона* $F = ma$, согласно которому в случае прямолинейного движения ускорение a движущегося тела пропорционально действующей на него силе F , где коэффициент пропорциональности m есть масса тела. Второй закон Ньютона может быть использован для того, чтобы узнать, как менялось положение тела со временем, т.е. для определения функциональной зависимости $x = x(t)$, где $x(t)$ есть координата тела в момент времени t . Как известно, скорость движущегося тела есть, грубо говоря, путь, пройденный телом в единицу времени, а точнее, *производная* x' от функции x . В свою очередь, ускорение есть скорость изменения скорости тела, т.е. производная от скорости или, что то же самое, вторая производная (производная от производной) x'' функции x . Таким образом, второй закон Ньютона приводится к дифференциальному уравнению $mx'' = F$, в котором сила и масса считаются известными величинами, а неизвестной является функция $x = x(t)$.

Алгебраическое уравнение определяется исключительно посредством операций сложения и умножения. Вследствие этого для его исследования оказался достаточным чисто алгебраический аппарат – теория групп. В дифференциальное уравнение входит производная, строгое определение которой включает в себя предельный переход – процедуру далеко не алгебраическую. В этой связи для построения некоторого аналога теории Галуа для дифференциальных уравнений потребовался существенно более мощный математический аппарат. Таковым и оказалась теория групп Ли, причем основания группового анализа дифференциальных уравнений были заложены самим Софусом Ли.

Дифференциальные уравнения возникают практически во всех разделах физики, а также в химии, биологии, экономике и других науках, вследствие чего теория групп Ли также находит там важное применение. Однако этим приложения теории групп и принципов симметрии в физике далеко не ограничиваются.

4. Физические приложения

Достаточно естественным является приложение теории групп в *кристаллографии* – науке, изучающей структуру и свойства кристаллов. Среди всего многообразия природных объектов именно кристаллы всегда служили образцом красоты, упорядоченности и гармонии. Поразительная симметрия кристаллов издавна завораживала и в значительной степени стимулировала воображение философов и математиков. Достаточно вспомнить знаменитые *платоновы тела* – правильные многогранники тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Первая работа по математической теории кристаллов под названием "*О шестиугольных снежинках*" была написана еще в 1611 году знаменитым немецким астрономом *Иоганном Кеплером*. А полная классификация кристаллографических групп была дана лишь в конце 19 века русским математиком *Евграфом Степановичем Фёдоровым* и немецким математиком *Артуром Шёнфлисом*.

К довольно интересному виду симметрии приходит *Юрий Иванович Кулаков* в своих работах по теории *физических структур*. Вернемся, к примеру, ко второму закону Ньютона $F = ma$. Фиксируя пространственные и временные интервалы, можно измерить скорость, а значит, и ускорение. В то же время принцип измерения силы и массы, являющихся индивидуальными характеристиками физических объектов, не столь очевиден. Попробуем записать второй закон Ньютона на основе лишь измеряемых величин. Для этого надо исключить из имеющегося соотношения силу и массу. Однако данное равенство связывает две неизвестных величины m и F с единственной измеряемой величиной a . Тем самым наличия двух физических объектов – тела и воздействия на него не достаточно для решения данной задачи. Если взять два разных тела и подействовать на них одной и той же силой, то получим два уравнения $F/m_1 = a_1$ и $F/m_2 = a_2$ с измеряемыми ускорениями a_1, a_2 и тремя неизвестными m_1, m_2 и F . Взяв две массы и две силы, получаем четыре уравнения $F_j/m_k = a_{jk}, j, k = 1, 2$, содержащих четыре неизвестных величины m_1, m_2, F_1 и F_2 наряду с четырьмя измеряемыми ускорениями a_{ij} . Из соотношений $F_1 = m_1 a_{11} = m_2 a_{12}, F_2 = m_1 a_{21} = m_2 a_{22}$ следует равенство $a_{11} a_{22} = a_{12} a_{21}$, которое связывает исключительно ускорения. Тело x , характеризующееся некоторой массой, под влиянием внешнего воздействия y , характеризующегося некоторой силой, приобретает вполне определенное ускорение a . Таким образом, имеется некоторая функциональная зависимость $a = f(x, y)$. Тогда полученное выше

равенство может быть записано в виде соотношения $f(x_1, y_1)f(x_2, y_2) = f(x_1, y_2)f(x_2, y_1)$, справедливого для всевозможных пар тел и воздействий на них. Полученное равенство является своеобразной формой второго закона Ньютона. Она обладает достаточно высокой степенью симметрии, которую называют *феноменологической симметрией*.

Однако более подробно мы остановимся на применении групп в *теории динамических систем*. Рассмотрим некоторую систему, состояние которой меняется со временем. Обозначим через $x(t)$ состояние этой системы в момент времени t . В частности, в начальный момент времени система находится в некотором начальном состоянии $x(0)$. Рассмотрим преобразование $A(t)$, переводящее систему в соответствии с некоторыми физическими законами из данного начального состояния в состояние $x(t)$ за время t , т.е. справедливо равенство $x(t) = A(t)x(0)$. Для любых двух таких преобразований $A(t)$ и $A(s)$ определим их композицию по формуле $A(t) * A(s) = A(t+s)$. Другими словами, за время $t+s$ система сначала под действием преобразования $A(t)$ из $x(0)$ переходит в состояние $x(t)$ за время t , а затем за время s под действием преобразования $A(s)$ переходит в состояние $x(t+s)$. Таким образом, на множестве всевозможных преобразований типа $A(t)$ определяется операция $*$, т.е. последовательное выполнение двух преобразований эквивалентно преобразованию того же типа. Ассоциативность этой операции очевидна. Отметим, что преобразование $A(0)$ не меняет состояния системы, поскольку за нулевой интервал времени, естественно, никаких изменений не происходит. Отсюда следуют равенства $A(t) * A(0) = A(0) * A(t) = A(t)$ для любого времени t , а значит, преобразование $A(0)$ оказывается нейтральным элементом. А вот существование обратного элемента уже не столь очевидно.

Как известно, различают *обратимые* и *необратимые физические процессы*. Обратимые процессы могут протекать как в прямом, так и в обратном направлении времени в равной степени. Для них по известному текущему состоянию системы и известному закону ее эволюции можно, как предсказать поведение системы в будущем, так и восстановить ее предысторию, т.е. выяснить, каким образом система пришла в данное состояние. Для необратимых процессов обращение времени невозможно, а значит, узнать прошлое по известному настоящему уже не удастся. К примеру, в случае гармонических колебаний маятника по известному начальному положению и начальной скорости маятника мы можем в

равной степени установить ход колебаний, как в прошлом, так и в будущем. Однако для колебаний маятника при наличии трения прошлое оказывается недоступным. Так, имея остановившийся под действием трения маятник, мы не сможем однозначно указать, где он находился в тот или иной предшествующий момент времени.

Простейшее уравнение колебания маятника имеет вид $x'' + \omega^2 x = 0$, где x – угол отклонения маятника от положения равновесия, а ω – частота колебания. При положительных значениях времени t мы движемся от настоящего к будущему. Движение от настоящего к прошлому происходит при обращении времени, т.е. при переходе от переменной t к $-t$. Однако в новых переменных уравнение сохранит прежний вид, т.е. прошлое и будущее оказываются симметричными. Колебание маятника при наличии трения описывается уравнением $x'' + kx' + \omega^2 x = 0$. Обращая время в этом равенстве, мы приходим к соотношению $x'' - kx' + \omega^2 x = 0$, отличному от исходного. Тем самым симметрия прошлого и будущего в этом случае нарушается.

Если мы имеем дело с обратимым физическим процессом, то по текущему состоянию системы $x(0)$ в начальный момент времени, мы можем узнать, в каком состоянии была система в любой предшествующий момент времени. Следовательно, для любого положительного t определено преобразование $A(-t)$ такое, что $x(-t) = A(-t)x(0)$. Очевидно, справедливы равенства $A(t) * A(-t) = A(-t) * A(t) = A(0)$, т.е. если мы сначала уйдем на время t вперед, а потом вернемся на столько же назад (или наоборот), то непременно вернемся в исходное состояние. Таким образом, преобразование $A(-t)$ оказывается обратным к $A(t)$, а всё множество преобразований при этом образует группу, называемую *динамической группой преобразований*. Итак, за любым обратимым процессом непременно стоит какая-то динамическая группа преобразований, а в условиях необратимости процесса такая группа не существует. Этим обстоятельством обусловлено использование групп в теории динамических систем.

Отметим еще один глубокий результат, полученный выдающимся немецким математиком *Эмми Нётер*, являющейся одним из основоположников современной алгебры. В 1918 году она доказала теорему, согласно которой любой симметрии физической системы, т.е. ее инвариантности относительно некоторых преобразований, соответствует какой-либо закон *сохранения*. В частности, закон *сохранения энергии* соответствует однородности времени:



Эмми Нётер
1842 – 1935

начало отсчета времени можно сдвигать произвольным образом. *Закон сохранения импульса* объясняется однородностью пространства: система инвариантна относительно пространственных сдвигов. В частности, если сдвиг вдоль какой-либо пространственной оси не меняет вид уравнения состояния системы, то импульс вдоль этой оси сохраняется. *Закон сохранения момента импульса* связан с изотропией пространства: система инвариантна относительно вращений пространственных координат. Отметим, что *теорема Нётер* остается в силе не только для механических систем. Так, *закон сохранения заряда* оказывается связанным с *калибровочной симметрией*, являющейся одной из ведущих концепций физики элементарных частиц.

Законы сохранения пронизывают всю современную физику. Тем самым лежащая в их основе симметрия оказывается основополагающим принципом мироздания, упорядочивающей силой, воплощающей в себе гармонию природы. Собственно, об этом и говорил в своё время мудрый Пифагор...

В заключение хочу выразить благодарность Н.В. Аммосовой (Астрахань), по инициативе которой написана данная статья, и А.А. Симонову (Новосибирск), ознакомившемуся с рукописью и сделавшему ряд ценных замечаний.

Литература

1. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М., Наука, 1976. – 648 с.
2. Вейль Г. Симметрия. – М., Наука, 1968. – 192 с.
3. Вигнер Е. Этюды о симметрии. – М., Мир, 1971. – 320 с.
4. Егоров-Тисменко Ю.К., Литвинская Г.П. Теория симметрии кристаллов. М. ГЕОС, 2000. – 410 с.
5. Заславский А.А. Геометрические преобразования. – М., МЦНМО, 2004. – 86 с.
6. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. – М., Знание, 1989. – 44 с.
7. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М., Наука, 1983. – 281 с.
8. Кулаков Ю.И. Теория физических структур. – М., 2004. – 848 с.
9. Стилвелл Дж. Математика и ее история. – Москва, Ижевск, Институт космических исследований, 2004. – 530 с.
10. Стюарт Я. Концепции современной математики. – Минск, Вышэйшая школа, 1980. – 384 с.
11. Kleiner I. A History of Abstract Algebra. Boston-Basel-Berlin, Kindle Edition, 2007. – 168 p.