

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

С.Я. Серовайский

Вся история развития как физики, так и математики, шла в направлении поиска, по возможности, минимального набора средств для описания максимально широкого класса изучаемых явлений. Оригинальной попыткой переосмысления и унификации физических законов является предложенный Ю.И. Кулаковым подход, основанный на понятии физической структуры (см. [1]–[10]). Теория физических структур поставила целый комплекс глубоких и нестандартных математических задач, требующих решения. Значительные результаты в этом направлении были получены как самим Кулаковым (см. [3, 5, 7, 10]), так и его учениками Г.Г. Михайличенко (см. [11]–[26]), В.Х. Львом (см. [27, 28]), А.А. Симоновым (см. [29, 30]) и другими исследователями (см., например, [31]–[41]). Однако данное научное направление, зародившееся в среде физиков, к сожалению, еще не получило должного внимания среди математиков.

Настоящая работа призвана, в определенной степени восполнить, имеющийся пробел. В ней предпринимается попытка дать систематическое изложение математических основ теории физических структур и подводятся определенные итоги ее развития. Прежде всего, следуя методике, предложенной Кулаковым [10], описываются простейшие физические примеры (второй закон Ньютона и закон Ома для всей цепи), естественным образом выводящие на понятие физической структуры. В результате формализации этих результатов дается ее определение. Описываются важнейшие свойства физических структур. В заключительной части работы рассматриваются различные обобщения.

1 Физическая структура механического движения

Рассмотрим процесс прямолинейного механического движения. Под влиянием некоторого внешнего воздействия тело движется с изменением его положения в пространстве и скорости. Этот процесс описывается *вторым законом Ньютона*

$$f = ma,$$

где F — сила, m — масса, a — ускорение. Фиксируя пространственные и временные интервалы, можно измерить скорость, а значит, и ускорение — важнейшую характеристику исследуемого процесса. В то же время принцип измерения силы и массы, являющихся индивидуальными характеристиками физических объектов, не столь очевиден.

Вопрос 1.1. *Можно ли на основе измеряемых пространственно-временных характеристик проверить справедливость второго закона Ньютона?*

Для проверки справедливости закона Ньютона надо исключить из имеющегося соотношения силу и массу. Однако данное равенство связывает две неизвестных величины m и F с единственной измеряемой величиной a . Тем самым наличия двух физических объекта — тела и воздействия на него, которое мы будем называть акселератором, еще не достаточно для решения данной задачи. Если взять два разных тела и подействовать на них одним и тем же акселератором, то получим два уравнения $F/m_1 = a_1$ и $F/m_2 = a_2$ с измеряемыми ускорениями a_1, a_2 и тремя неизвестными m_1, m_2 и F . Если же мы возьмем два тела и два акселератора, то получаем уже четыре уравнения

$$F_j/m_k = a_{jk} \quad j, k = 1, 2, \quad (1.1)$$

содержащих четыре неизвестных величины m_1, m_2, F_1 и F_2 наряду с четырьмя измеряемыми ускорениями a_{ij} .

Из соотношений

$$F_1 = m_1 a_{11} = m_2 a_{12}, \quad F_2 = m_1 a_{21} = m_2 a_{22},$$

следует равенство

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0. \quad (1.2)$$

Оно связывает исключительно ускорения, т. е. величины, допускающие непосредственное экспериментальное определение.

Вывод 1.1. *Для экспериментальной проверки закона Ньютона достаточно взять два тела и два акселератора и, измерив четыре соответствующих значения ускорения, убедиться в справедливости условия (1.2).*

Равенство (1.2) следует тем самым понимать как некоторый эквивалент закона Ньютона, допускающий прямую экспериментальную проверку. Отметим, что это соотношение, связывающее четыре измеряемых ускорения, выполняется не для каких-то конкретных тел и акселераторов, а для произвольных пар физических объектов. Это обстоятельство, собственно, и свидетельствует о том, что мы имеем дело с физическим законом, который носит универсальный характер.

Вывод 1.2. *Четыре ускорения, характеризующие возможные взаимодействия между произвольными парами тел и акселераторов, не могут оказаться произвольными: одно из них выражается через три остальных.*

Вывод 1.3. *Для проверки справедливости закона Ньютона можно не только не измерять массу и силу, но даже вообще не обращаться к этим понятиям.*

Теперь нам хотелось бы воспользоваться полученными результатами для анализа характеристик исследуемых объектов, т. е. массы и силы.

Вопрос 1.2. *Как определить массу и силу, если прямому измерению поддается лишь ускорение?*

Система линейных однородных уравнений

$$F_j - a_{jk}m_k = 0 \quad j, k = 1, 2$$

с четырьмя неизвестными (по две силы и массы) при выполнении условия (1.2) имеет определитель, равный нулю. Тем самым данная задача имеет бесконечное множество решений. Из равенств $m_1 a_{11} = F_1 = m_2 a_{12}$ получаем отношение $m_2/m_1 = a_{11}/a_{12}$. Выбирая величину m_1 в качестве *эталона* массы (единицы измерения) и определив экспериментально два ускорения a_{11} и a_{12} , можно найти относительное значение массы m_2 , т. е. узнать, насколько велика масса данного тела по сравнению с выбранным эталоном.

Сила измеряется аналогично. Из соотношений $F_1/a_{11} = m_1 = F_2/a_{21}$ получаем $F_2/F_1 = a_{21}/a_{11}$. Выбирая величину F_1 в качестве эталона силы и определив экспериментально соответствующие ускорения, можно найти относительное значение силы, т. е. узнать, насколько велика будет данная сила в сравнении с эталонной.

Вывод 1.4. *Сила и масса могут быть определены посредством измеряемых значений ускорения с точностью до выбора единиц измерения.*

Замечание 1.1. Обратим внимание на то, что у нас была изначально система четырех уравнений (1.1) с четырьмя неизвестными. Наличие условия связи (1.2) говорит о том, что в действительности лишь три уравнения могут считаться независимыми. Тем самым фактически система (1.1) дает три условия относительно четырех неизвестных сил и масс. Значения F_1 и m_1 выбирались в качестве эталонов, т. е. считались заданными. Связывающее их соотношение $m_1 a_{11} = F_1$ не включает в себя неизвестные величины m_2 и F_2 , а значит, может быть исключено из системы. Тем самым остаются три уравнения (1.1), из которых одно выражается через остальные с помощью условия (1.2), относительно двух неизвестных. Тогда можно выразить эти значения через эталонные характеристики и измеряемые величины, что и было сделано.

Ранее предполагалось, что заранее известна стандартная форма закона Ньютона.

Вопрос 1.3. *Можно ли восстановить закон Ньютона исключительно по характеру связи между телами и акселераторами?*

Перед нами стоит обратная задача. Требуется выяснить, как могут быть, в принципе, связаны между собой произвольные акселератор α и тело i , если предположить, что для установления искомого закона достаточно взять два тела и два акселератора, поставив тем самым четыре эксперимента. В результате мы получаем значения

$$\varphi(\alpha_j, i_k) = a_{jk}, \quad j, k = 1, 2. \quad (1.3)$$

Итак, под действием акселератора α_j тело i_k приобретает ускорение a_{jk} . Здесь зависимость φ , сопоставляющая телу и акселератору соответствующее ускорение, подлежит нахождению. Естественно предположить, что эта зависимость должна носить универсальный характер, т. е. результат не должен зависеть от выбора тел и акселераторов.

Итак, мы имеем четыре известных ускорения, образующие матрицу порядка 2×2 . Эти величины должны быть связаны между собой некоторым соотношением, не зависящим от выбора тел и акселераторов. Указанное свойство будет реализовано, если на множестве таких матриц будет определена такая нетривиальная (т. е. не равная тождественно нулю) функция Φ , что имеет место равенство

$$\Phi(A) = 0, \quad (1.4)$$

где A есть известная матрица ускорений:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Соотношение (1.4) должно выполняться для любой пары тел и акселераторов.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех тел, а через $\mathfrak{N}$ — множество всевозможных акселераторов. Тогда пара $\bar{\alpha}$, состоящая из акселераторов α_1, α_2 и обозначаемая через $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, образует некоторый элемент множества $\mathfrak{N}^2$, а пара $\bar{i}$, включающая тела i_1, i_2 и обозначаемая через $\langle i_1, i_2 \rangle$, — элемент множества $\mathfrak{M}^2$. В результате соотношение (1.4), выражающее связь между выбранными физическими объектами, принимает вид

$$\Phi(\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, \bar{i})) = 0 \quad \forall \bar{\alpha} \in \mathfrak{N}^2, \bar{i} \in \mathfrak{M}^2, \quad (1.5)$$

где

$$\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, \bar{i}) = \begin{pmatrix} \varphi(\alpha_1, i_1) & \varphi(\alpha_1, i_2) \\ \varphi(\alpha_2, i_1) & \varphi(\alpha_2, i_2) \end{pmatrix}.$$

Соотношение (1.5) можно рассматривать как специфическое уравнение относительно преобразований φ и Φ . Оно охватывает рассмотренное ранее равенство (1.2), устанавливающее связь между измеряемыми ускорениями, но получено исключительно из предположения о наличии универсальной связи между парами тел и акселераторов без априорного знания второго закона Ньютона.

На основании проведенного анализа приходим к следующему понятию, выражающему принцип феноменологической симметрии [10].

Определение 1.1. Соотношение (1.5) назовем **уравнением физической структуры механического движения**.

Общее определение физической структуры будет дано ниже. Пока отметим, что рассматриваемой физической структуре мы приписываем два классификационных признака [10]. Один из них назовем *размерностью* и положим равным (1,1) по числу характеристик обоих типов объектов (масса тела и сила акселератора), входящих в полученное уравнение. Второй признак назовем *рангом* и положим равным (2,2) по числу физических объектов (тел и акселераторов), входящих в рассматриваемое соотношение.

Содержательность полученного уравнения определяется следующим вопросом:

Вопрос 1.4. Насколько широк класс функций φ и Φ , удовлетворяющих условию (1.5)?

Анализ показывает, что при достаточно естественных предположениях (см. ниже) функционал φ определяется исключительно равенством

$$\varphi(\alpha, i) = f(\xi^1(\alpha)x^1(i)), \quad (1.6)$$

где функционалы ξ^1 и x^1 , определенные на множествах $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно, а также обратимая функция f произвольны. Величину $\xi^1(\alpha)$ можно интерпретировать как силу, соответствующую акселератору α , а $x^1(i)$ — как величину, обратную массе тела i . Таким образом, справедливы равенства

$$F(\alpha) = \xi^1(\alpha), \quad m_i = 1/x^1(i).$$

Функция матричного аргумента Φ при этом определена по формуле

$$\Phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = f^{-1}(a_{11})f^{-1}(a_{22}) - f^{-1}(a_{12})f^{-1}(a_{21})$$

или, что то же самое,

$$\Phi(A) = |f^{-1}\langle A \rangle|. \quad (1.7)$$

Здесь матрица $f^{-1}\langle A \rangle$ определяется по формуле

$$f^{-1}\langle A \rangle = \begin{pmatrix} f^{-1}(a_{11}) & f^{-1}(a_{12}) \\ f^{-1}(a_{21}) & f^{-1}(a_{22}) \end{pmatrix},$$

а в правой части равенства (1.7) находится ее определитель. Установленное ранее соотношение (1.2) между четырьмя измеряемыми ускорениями получается из равенства (1.5), если в качестве f выбрать тождественную функцию.

Естественно, следует проверить, как отразится имеющаяся произвольность выбора решений уравнения (1.5) на его практическом использовании, в частности, на определении силы и массы. Имея два тела и один акселератор, установим равенства

$$\varphi(\alpha, i_k) = f(F(\alpha)/m(i_k)), \quad k = 1, 2.$$

Учитывая обратимость функции f , имеем

$$f^{-1}(\varphi(\alpha, i_k)) = F(\alpha)/m(i_k), \quad k = 1, 2.$$

Разделив одно из этих равенств на другое, получаем

$$\frac{m(i_2)}{m(i_1)} = \frac{f^{-1}(\varphi(\alpha, i_1))}{f^{-1}(\varphi(\alpha, i_2))}.$$

Здесь величины $f^{-1}(\varphi(\alpha, i_1))$ и $f^{-1}(\varphi(\alpha, i_2))$ можно интерпретировать как результаты измерения соответствующих ускорений, причем произвольность

функции f предполагает свободу выбора шкалы измерения ускорения. Выбирая теперь первое тело в качестве эталона массы, можно найти значение массы второго тела в данной системе измерения масс. Аналогичным образом можно осуществить измерение силы. Таким образом, сила и масса могут быть определены на основе уравнения физической структуры механического движения однозначно с точностью до выбора соответствующих единиц измерения.

Вывод 1.5. *Исключительно из предположения о существовании единого закона, связывающего произвольные 2 тела и 2 акселератора, получено уравнение физической структуры механического движения ранга (2,2), являющееся аналогом второго закона Ньютона и допускающее единственное решение с точностью до выбора шкалы измерения рассматриваемых физических величин.*

Закон Ньютона дает естественный пример физической структуры для случая, когда взаимодействующие физические объекты (в данном случае, тела и акселераторы) имеют в точности по одной характеристике (масса и сила). Наличие же у объектов нескольких характеристик приводит к физическим структурам более высокой размерности [10].

2 Физическая структура электрической цепи

Рассмотрим электрическую цепь. Подключая проводник к источнику тока (будем считать, к примеру, что это батарейка), можно наблюдать ток в цепи. Этот процесс описывается *законом Ома для полной цепи*

$$I = \frac{E}{R + \rho},$$

где I — сила тока, E — электродвижущая сила (эдс) батарейки, ρ — ее внутреннее сопротивление, R — сопротивление проводника.

В данном случае мы вновь имеем дело с двумя классами физических объектов — батарейками и проводниками. Сила тока здесь является результатом взаимодействия рассматриваемых объектов, характеризует исследуемый процесс в целом и допускает непосредственное измерение. В то же время эдс и внутреннее сопротивление являются свойствами батарейки, а сопротивление R — свойством проводника, т. е. описывают индивидуальные характеристики рассматриваемых физических объектов. По аналогии с проводимым ранее анализом зададимся следующим вопросом.

Вопрос 2.1. *Можно ли на основе лишь измеряемых значений силы тока проверить справедливость закона Ома для всей цепи?*

Перепишем закон Ома в следующем виде:

$$\frac{1}{I} = \frac{R + \rho}{E} = \frac{R}{E} + \frac{\rho}{E}.$$

Для упрощения выкладок сделаем следующую замену переменных: $a = 1/I$, $b^1 = 1/E$, $b^2 = \rho/E$. При этом любой батарейке α ставится в соответствие

две характеристики $b^1(\alpha)$ и $b^2(\alpha)$, а любому проводнику i — одна характеристика $R(i)$.

Нам хотелось бы подобрать такое количество физических объектов, чтобы из закона Ома можно было бы исключить все их характеристики, оставляя лишь измеряемые значения сил тока. Нетрудно убедиться, что для этого достаточно взять две батарейки и три проводника. В результате приходим к соотношениям

$$b_j^1 R_k = b_j^2 = a_{jk}, \quad j = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3,$$

(2.1) аналогичным равенствам (1.1).

Замечание 2.1. Поскольку батарейка обладает большим числом характеристик по сравнению с проводником, для получения соответствующих соотношений необходимо взять большее число проводников, чем батареек. В противном случае при том же количестве выбранных объектов (а значит, и числе уравнений), мы получим слишком большое число неизвестных характеристик этих объектов. Эта проблема не возникала при рассмотрении закона Ньютона, где оба класса физических объектов обладали одинаковым числом характеристик.

Замечание 2.2. Мы имеем шесть уравнений (2.1) относительно семи неизвестных величин — по одной характеристике у трех проводников и по две — у двух батареек. Однако нашей целью является не совпадение числа уравнений и неизвестных, а возможность исключения из имеющихся соотношений всех характеристик объектов.

Исключим из этих равенств неизвестные величины. Получаем

$$b_j^1 (R_1 - R_k) = a_{j1} - a_{jk}, \quad j = 1, 2; \quad k = 2, 3.$$

Отсюда следует соотношение

$$\frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{13}} - \frac{a_{21} - a_{22}}{a_{21} - a_{23}} = 0, \quad (2.2)$$

(2.2) связывающее, подобно условию (1.2) исключительно измеряемые величины (обратные значения к силам тока).

Вывод 2.1. Для экспериментальной проверки закона Ома достаточно взять две батарейки и три проводника и, измерив шесть соответствующих значений силы тока, убедиться в справедливости условия (2.2).

Вывод 2.2. Шесть сил тока, характеризующих возможные взаимодействия между произвольными парами батареек и тройками проводников, не могут оказаться произвольными: одно из них выражается через пять остальных.

Вывод 2.3. Для проверки справедливости закона Ома можно не только не измерять эдс и сопротивления, но даже вообще не обращаться к этим понятиям.

По аналогии с проведенным ранее анализом зададимся следующим вопросом:

Вопрос 2.2. Как определить характеристики батарейки и проводника, если прямому измерению поддается лишь сила тока?

Из полученных ранее соотношений имеем

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{b_1^1}{b_2^1} = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{21} - a_{22}}.$$

Выбирая здесь величину E_1 в качестве эталона эдс, можно, зная из эксперимента соответствующие значения силы тока, найти относительное значение эдс второй батарейки, т. е. узнать, в какой степени оно отличается от эталонной величины. Аналогично, выбирая сопротивления R_1 и ρ_1 в качестве эталонных, можно из равенств

$$R_k + \rho_j = E_j a_{jk}, \quad j = 1, 1; \quad k = 1, 2, 3$$

выразить значения остальных сопротивлений через эталонные характеристики и измеряемые величины сил токов.

Вывод 2.4. Эдс и сопротивления могут быть определены посредством измеряемых значений силы тока с точностью до выбора единиц измерения.

Замечание 2.3. Изначально мы имели систему шести уравнений (2.1) с семью неизвестными. В силу условия связи (2.2) лишь пять из этих уравнений являются независимыми. Выбирая три эталонные характеристики, уменьшаем число неизвестных до четырех. Тогда из системы (2.1) уравнение, связывающее эталонные характеристики с измеряемой силой тока и не содержащее неизвестные величины, может быть исключено. В результате получаем пять уравнений (одно из которых выражается через остальные) относительно четырех неизвестных (сопротивления двух проводников, эдс и внутреннее сопротивление одной батарейки). Из этой системы можно выразить все неизвестные величины через эталонные характеристики объектов и измеряемые характеристики процесса.

Ранее предполагалось, что закон Ома заранее известен.

Вопрос 2.3. Можно ли восстановить закон Ома исключительно по характеру связи между батарейками и проводниками?

Необходимо установить закон взаимодействия $\varphi = \varphi(\alpha, i)$ батарейки α с проводником i , исходя только из предположения, что для его вывода достаточно взять две батарейки и три проводника. Тем самым должны выполняться равенства

$$\varphi(\alpha_j, i_k) = a_{jk} \quad j = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

аналогичные (1.3). Функционал φ , сопоставляющий данной батарейке и проводнику значение соответствующей силы тока, подлежит нахождению, причем искомая зависимость не должна зависеть от выбора батареек и проводников. Тем самым шесть известных значений силы тока, образующие матрицу порядка 2×3 должны быть связаны некоторым соотношением, не зависящим от выбора рассматриваемых физических объектов. Это свойство

реализуется, если на множестве таких матриц определена нетривиальная функция Φ , удовлетворяющая равенству

$$\Phi(A) = 0, \quad (2.4)$$

аналогичному (1.4), где A есть известная матрица, определяемая силами тока

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Условие (2.4) должно выполняться для любой пары батареек и тройки проводников.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех проводников, а через $\mathfrak{N}$ — множество всевозможных батареек. Тогда пара батареек $\bar{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ образует некоторый элемент множества $\mathfrak{N}^2$, а тройка проводников $\bar{i} = \langle i_1, i_2, i_3 \rangle$ — элемент множества $\mathfrak{M}^3$. При этом равенство (2.4), выражающее связь между рассматриваемыми физическими объектами, принимает вид

$$\Phi(\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, \bar{i})) = 0 \quad \forall \bar{\alpha} \in \mathfrak{N}^2, \bar{i} \in \mathfrak{M}^3, \quad (2.5)$$

где

$$\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, \bar{i}) = \begin{pmatrix} \varphi(\alpha_1, i_1) & \varphi(\alpha_1, i_2) & \varphi(\alpha_1, i_3) \\ \varphi(\alpha_2, i_1) & \varphi(\alpha_2, i_2) & \varphi(\alpha_2, i_3) \end{pmatrix}.$$

Соотношение (2.5), аналогичное (1.5), представляет собой особого типа функциональное уравнение относительно преобразований φ и Φ . Его частным случаем является полученное ранее равенство (2.2), устанавливающее связь между измеряемыми силами тока.

Определение 2.1. *Соотношение (2.5) назовем уравнением физической структуры электрической цепи.*

Этой физической структуре приписывается размерность (2,1) (имеется две характеристики у батарейки и одна у проводника) и ранг (2,3) (выбраны две батарейки и три проводника).

Как и в случае закона Ньютона, особую важность приобретает проблема описания множества решений уравнения (2.5). И вновь оказывается (см. ниже), что при естественных ограничениях искомая функция φ будет непременно определена по формуле

$$\varphi(\alpha, i) = f(\xi^1(\alpha)x^1(i) + \xi^2(\alpha)), \quad (2.6)$$

аналогичной (1.6), где функционалы ξ^1, ξ^2 определенные на множестве $\mathfrak{N}$, функционал x^1 , определенный на множестве $\mathfrak{M}$, и обратимая функция f произвольны. Здесь величину $x^1(i)$ можно интерпретировать как сопротивление проводника i , $\xi^1(\alpha)$ — как величину, обратную эдс батарейки α , а $\xi^2(\alpha)$ — как отношение внутреннего сопротивления к эдс батарейки α . Тем самым справедливы равенства

$$R(i) = x^1(i), \quad E(\alpha) = 1/\xi^1(\alpha), \quad r(\alpha) = \xi^2(\alpha)/\xi^1(\alpha).$$

Функция матричного аргумента Φ здесь определяется по формуле

$$\begin{aligned} \Phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \\ = f^{-1}(a_{11})f^{-1}(a_{22}) + f^{-1}(a_{12})f^{-1}(a_{23}) + f^{-1}(a_{13})f^{-1}(a_{21}) - \\ - f^{-1}(a_{11})f^{-1}(a_{23}) - f^{-1}(a_{12})f^{-1}(a_{21}) - f^{-1}(a_{13})f^{-1}(a_{22}). \end{aligned}$$

Это равенство можно записать в более компактной форме

$$\Phi(A) = |f^{-1}\langle A \rangle|, \quad (2.7)$$

аналогичной (1.7), где матрица $f^{-1}\langle A \rangle$ определяется по формуле

$$f^{-1}\langle A \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f^{-1}(a_{11}) & f^{-1}(a_{12}) & f^{-1}(a_{13}) \\ f^{-1}(a_{21}) & f^{-1}(a_{22}) & f^{-1}(a_{23}) \end{pmatrix}$$

Тогда установленное ранее соотношение (2.2) между шестью измеряемыми силами тока получается из равенства (2.5), если в качестве f выбрать тождественную функцию.

Нахождение характеристик батарейки и проводника на основе уравнения физической структуры (2.5) осуществляется аналогично тому, как это делалось ранее.

Вывод 2.5. *Исключительно из предположения о существовании единого закона, связывающего произвольные 2 батарейки и 3 проводника, получено уравнение физической структуры электрической цепи ранга (2,3), являющееся аналогом закона Ома для всей цепи и допускающее единственное решение с точностью до выбора шкалы измерения рассматриваемых физических величин.*

Имея два различных примера вывода и анализа уравнений физических структур, мы можем обратиться к определению физической структуры общего вида.

3 Определение физической структуры

Опишем гипотезы, положенные в основу понятия физической структуры, и связанные с ними аксиомы.

Гипотеза 3.1. *Физическая структура характеризует соотношение между двумя классами одноптипных объектов.*

Аксиома 3.1. *Определены два множества $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$, элементы которых называются физическими объектами.*

Итак, физическая структура определена на паре классов объектов $(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$. В частности, физическая структура механического движения задается на множествах акселераторов $\mathfrak{N}$ и тел $\mathfrak{M}$, а физическая структура электрической цепи — на множествах батареек $\mathfrak{N}$ и проводников $\mathfrak{M}$.

Гипотеза 3.2. Любой физический объект обладает конечным числом характеристик, единым для всего класса.

Аксиома 3.2. Определены преобразования $\xi : \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\xi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ называемые **характеристиками** физических объектов, где пара натуральных чисел (n, m) называется **размерностью** физической структуры.

Итак, каждому объекту $\alpha \in \mathfrak{N}$ сопоставляется упорядоченный набор характеристик $\xi(\alpha) = (\xi^1(\alpha), \dots, \xi^n(\alpha))$, а каждому объекту $i \in \mathfrak{M}$ — набор $\xi(i) = (\xi^1(i), \dots, \xi^n(i))$. В частности, любому акселератору ставится в соответствие единственная характеристика — сила, а любому телу — его масса. Аналогично, любой батарееке сопоставляется две ее характеристики — эдс и внутреннее сопротивление, а любому проводнику — его сопротивление. Таким образом, физическая структура механического движения имеет размерность $(1, 1)$, а структура электрической цепи — размерность $(2, 1)$.

Замечание 3.1. Физически отнесение объектов к одному классу как раз и означает, что они обладают одинаковыми характеристиками. Характеристики данного класса объектов, по крайней мере, обладают одной и той же размерностью, что предоставляет возможность выполнять над ними операцию сложения.

Замечание 3.2. Один и тот же предмет в зависимости от ситуации может быть отнесен к разным классам физических объектов. В частности, характеризуемый массой, он считается телом, способным двигаться. Однако тот же самый предмет, наделенный сопротивлением, относится к проводникам, способным проводить ток. Подобная ситуация характерна и для математических объектов. Так, множество действительных чисел, наделенное операцией сложения (одним типом математической структуры), оказывается абелевой группой, а при наделении этого же множества естественным порядком (другим типом математической структуры), превращается в линейно упорядоченное множество.

Гипотеза 3.3. Существует количественная связь между характеристиками двух объектов различных классов.

Аксиома 3.3. Определено отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, называемое **репрезентатором** физической структуры.

Для физической структуры ранга (n, m) на $(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ существует функция φ , определенная на множестве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, устанавливающая количественное соотношение между характеристиками объектов обоих классов и допускающая непосредственное измерение. Тем самым соотношение между объектами $\alpha \in \mathfrak{N}$ и $i \in \mathfrak{M}$ описывается величиной $\langle \alpha | i \rangle = \varphi(\xi(\alpha), x(i))$. В частности, для механического движения существует функция двух переменных, определяющая соотношение между характеристиками тел и акселераторов. Так, акселератору α с силой $\xi^1(\alpha)$ и телу i с массой $x^1(i)$ ставится в соответствие ускорение (репрезентатор) $\varphi(\xi(\alpha), x(i)) = \xi^1(\alpha)/x^1(i)$. Количественное соотношение между акселератором α и телом i описывается здесь выражением $\langle \alpha | i \rangle$ соответствующем стандартной форме закона Ньютона. Для электрической цепи существует функция трех переменных, определяющая количественное соотношение между характеристиками ба-

тареек и проводников. В частности, батарееке α с эдс $\xi^1(\alpha)$ и внутренним сопротивлением $\xi^2(\alpha)$ и проводнику i с сопротивлением $x^1(i)$ сопоставляется сила тока (репрезентатор) $\varphi(\xi^1(\alpha), \xi^2(\alpha); x(i)) = \xi^1(\alpha)/(x^1(i) + \xi^2(\alpha))$. Тем самым количественное соотношение между батареекой α и проводником i описывается выражением $\langle \alpha | i \rangle$, соответствующим стандартной форме закона Ома для полной цепи.

Замечание 3.3. Репрезентатор является характеристикой исследуемого процесса, описывая результат взаимодействия между физическими объектами различных классов. На практике обычно измеряются именно значения репрезентатора, т.е. не индивидуальные характеристики взаимодействующих объектов, а следствие этого взаимодействия.

Замечание 3.4. В принципе, можно считать репрезентатор функционалом, определенным непосредственно на паре физических объектов, не вводя в рассмотрение их характеристики (см. [10]).

Гипотеза 3.4. Существует количественное соотношение между конкретным числом объектов обоих классов, зависящее исключительно от количественных связей между характеристиками всевозможных пар расматриваемых объектов различных классов.

Аксиома 3.4. (принцип феноменологической симметрии [10]). Существует такая пара натуральных чисел (r, s) , называемая **рангом** физической структуры, что на множестве $\mathbb{R}^{r,s}$ матриц порядка $r \times s$ определена функция Φ , называемая **верификатором** и удовлетворяющая уравнению физической структуры.

$$\Phi(\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, \bar{i})) = 0 \quad \forall \bar{\alpha} \in \mathfrak{N}^r, \bar{i} \in \mathfrak{M}^s, \quad (3.1)$$

где $\bar{\varphi} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $\bar{i} = (i_1, \dots, i_s)$, $\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, \bar{i})$ — матрица с элементами $\varphi(\xi(\alpha_j), x(i_k))$.

Итак, для описания физической структуры на $(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ выбирается упорядоченный набор $\bar{\alpha} \in \mathfrak{M}^r$ объектов $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ класса $\mathfrak{N}$, обозначаемый через $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_r |$, и упорядоченный набор $\bar{i} \in \mathfrak{M}^s$ объектов $i_1, \dots, i_s$ класса $\mathfrak{M}$, обозначаемый через $|i_1, \dots, i_s\rangle$, называемые *кортами* [10]. Таким образом, соотношение между классами объектов характеризуется матрицей $\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, \bar{i}) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r | i_1, \dots, i_s \rangle$ с элементами $\varphi(\xi(\alpha_j), x(i_k)) = \langle \alpha_j | i_k \rangle$. В частности, для определения физической структуры механического движения выбираются пара акселераторов $\bar{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2 |$ и пара тел $\bar{i} = |i_1, i_2\rangle$. Тем самым связь между акселераторами и телами описывается матрицей $\langle \bar{\alpha}, \bar{i} \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2 | i_1, i_2 \rangle$ порядка 2×2 соотношений $\langle \alpha_j | i_k \rangle$ между акселератором α_j и телом i_k , где $j, k = 1, 2$. Для определения физической структуры электрической цепи выбираются пара батареек $\bar{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2 |$ и тройка проводников $\bar{i} = |i_1, i_2, i_3\rangle$. Связь между батарееками и проводниками описывается матрицей $\langle \bar{\alpha}, \bar{i} \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2 | i_1, i_2, i_3 \rangle$ соотношений $\langle \alpha_j | i_k \rangle$ между батареекой α_j и проводником i_k , где $j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$.

Величина $\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, \bar{i})$ представляет собой матрицу порядка $r \times s$, которую можно также интерпретировать как точку в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{rs}$. Аксиома 3.4 говорит о том, что совокупность $\bar{\varphi}(\mathfrak{N}^r, \mathfrak{M}^s)$ всех таких точек

лежит на гиперповерхности в $\mathbb{R}^{rs}$, т. е. многообразии размерности $rs - 1$. В частности, для физической структуры механического движения существует функция Φ , определенная на множестве матриц порядка 2×2 такая, что справедливо соотношение

$$\Phi(\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, \bar{i})) = 0 \quad \forall \bar{\alpha} \in \mathfrak{N}^2, \forall \bar{i} \in \mathfrak{M}^2. \quad (3.2)$$

Эта функция, характеризуемая равенством (1.7), реализует связь между четырьмя измеряемыми ускорениями, не зависящую от выбора акселераторов и тел. Таким образом, множество $\bar{\varphi}(\mathfrak{N}^2, \mathfrak{M}^2)$ всевозможных четверок ускорений является трехмерным. Аналогично, для физической структуры электрической цепи ранга (2,3) существует функция Φ , определенная на множестве матриц порядка 2×3 такая, что справедливо соотношение

$$\Phi(\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, \bar{i})) = 0 \quad \forall \bar{\alpha} \in \mathfrak{N}^2, \forall \bar{i} \in \mathfrak{M}^3. \quad (3.3)$$

Эта функция, задаваемая соотношением (2.7), реализует связь между шестью измеряемыми силами тока, не зависящую от выбора батареек и проводников. Тем самым множество $\bar{\varphi}(\mathfrak{N}^2, \mathfrak{M}^3)$ всевозможных шестерок сил тока оказывается пятимерным.

Замечание 3.5. В действительности множество точек $\bar{\varphi}(\mathfrak{N}^r, \mathfrak{M}^s)$ может оказаться многообразием меньшей, чем $rs - 1$, размерности, что возможно при наличии нескольких независимых функций Φ , удовлетворяющих соотношению (3.1).

Уравнение физической структуры следует понимать как задачу определения репрезентатора и верификатора. Для рассмотренных ранее примеров условия (3.2) и (3.3) совпадают с рассмотренными ранее соотношениями (1.5) и (2.5).

Замечание 3.6. Существование решения уравнения физической структуры говорит о том, что для произвольного набора физических объектов обоих типов соответствующие значения репрезентаторов (измеряемых характеристик процесса) не могут принимать совершенно произвольные значения. По крайней мере, одно из них выражается через другие посредством уравнения физической структуры. Именно это обстоятельство и является признаком наличия в данной ситуации физического закона.

Аксиомы 3.1–3.4 можно было бы назвать, соответственно, аксиомами классов физических объектов, характеристик и размерности, репрезентатора, ранга и верификатора. Поскольку они включают в себя десять величин $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}, n, m, r, s, \xi, x, \varphi, \Phi$, их упорядоченный набор и назовем физической структурой.

Определение 3.1. При выполнении аксиом 3.1–3.5 десятка $((\mathfrak{N}, n, \xi, r), (\mathfrak{M}, m, x, s), \varphi, \Phi)$ называется **физической структурой** размерности (n, m) , ранга (r, s) , на множествах физических объектов $(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$, с характеристиками ξ и x , репрезентатором φ и верификатором Φ .

В частности, множества акселераторов, имеющих одну характеристику (силу), и тел с одной характеристикой (массой), при выборе двух тел и двух

акселераторов с репрезентатором, определяемым по формуле (1.6) (ускорением, задаваемым законом Ньютона), и верификатором, определяемым по формуле (1.7), образует физическую структуру механического движения размерности (1,1) ранга (2,2). Множества батареек, имеющих две характеристики (эдс и внутреннее сопротивление) и проводников с одной характеристикой (сопротивлением) при выборе двух батареек и трех проводников с репрезентатором, определяемым по формуле (2.6) (силой тока, задаваемой законом Ома), и верификатором, определяемым по формуле (2.7), образует структуру электрической цепи размерности (2,1) ранга (2,3).

4 Свойства физических структур

Прежде всего, отметим симметрию классов физических объектов. Непосредственно из определения физической структуры вытекает

Теорема 4.1. *Если $((\mathfrak{N}, n, \xi, r), (\mathfrak{M}, t, x, s), \varphi, \Phi)$ является физической структурой, то $((\mathfrak{M}, t, x, s), (\mathfrak{N}, n, \xi, r), \varphi^*, \Phi^*)$ также будет физической структурой, где отображения $\varphi^* : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $\Phi^* : \mathbb{R}^{s,r} \rightarrow \mathbb{R}$ определяются соотношениями*

$$\varphi^*(y, \eta) = \varphi(\eta, y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^m, \eta \in \mathbb{R}^n, \quad \Phi^*(M) = \Phi(M^*) \quad \forall M \in \mathbb{R}^{s,r},$$

причем M^* есть транспонированная матрица M .

Определение 4.1. *Физическая структура $((\mathfrak{M}, t, x, s), (\mathfrak{N}, n, \xi, r), \varphi^*, \Phi^*)$ называется двойственной к $((\mathfrak{N}, n, \xi, r), (\mathfrak{M}, t, x, s), \varphi, \Phi)$.*

При переходе к двойственной структуре классы объектов и их характеристики меняются местами. Согласно **принципу двойственности** любому свойству исходной структуры сопутствует соответствующее свойство двойственной структуры. Исходная и двойственная структуры являются взаимно двойственными, т. е. двойственной к $((\mathfrak{M}, t, x, s), (\mathfrak{N}, n, \xi, r), \varphi^*, \Phi^*)$ будет исходная структура $((\mathfrak{N}, n, \xi, r), (\mathfrak{M}, t, x, s), \varphi, \Phi)$.

Вывод 4.1. *Всю информацию о двойственной физической структуре можно восстановить по известной информации об исходной структуре. Тем самым при анализе физических структур можно ограничиться, например, случаем $m \geq n$.*

Пусть имеется некоторое преобразование $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, где $m \geq 1$, $n \geq 1$. Обозначим через $\langle \Phi, \varphi \rangle$ композицию отображения Φ и преобразования, которое сопоставляет матрицам со столбцами $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ и $(x_1, \dots, x_s)$ матрицу с общим членом $\varphi(\xi_j, x_k)$, $j = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, s$. Дадим следующее модифицированное определение репрезентатора и верификатора:

Определение 4.2. *Отображения $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ и $\Phi : \mathbb{R}^{r,s} \rightarrow \mathbb{R}$ назовем **репрезентатором** и **верификатором** физической структуры размерности (n, m) ранга (r, s) , если справедливо соотношение*

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = 0. \quad (4.1)$$

Итак, значение функции Φ на матрице с общим членом $\varphi(\xi_j, x_k)$ равно нулю для любых значений $\xi_j \in \mathbb{R}^n$, $x_k \in \mathbb{R}^m$, где $j = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, s$

Введенные понятия в точности совпадут с определенными ранее, если классы физических объектов являются соответствующими евклидовыми пространствами. В дальнейшем репрезентатор и верификатор будут пониматься в смысле определения 4.2.

В частности, функция двух переменных

$$\varphi(\xi_1; x_1) = f(\eta^1(\xi_1)y^1(x_1)), \quad (4.2)$$

аналогичная (1.6), и соответствующая ей функция от матрицы Φ , определяемая по формуле (1.7), будут репрезентатором и верификатором физической структуры ранга (2,2) для любых функций η^1 и y^1 и любой обратимой функции f . Функция трех переменных

$$\varphi(\xi_1, \xi_2; x_1) = f(\eta^1(\xi_1, \xi_2)y^1(x_1) + \eta^2(\xi_1, \xi_2)), \quad (4.3)$$

аналогичная (2.6), с Φ , определяемой по формуле (2.7), будет репрезентатором и верификатором физической структуры ранга (2,3) для любых функций η^1 , η^2 и y^1 и любой обратимой функции f .

Замечание 4.1. В определении 4.2 не упоминаются множества физических объектов, поскольку уравнение структуры связывает не сами объекты, а их числовые характеристики. В частности, можно определить *физическую структуру участка электрической цепи* на основе закона Ома $I = E/R$. Она также имеет ранг (2,2), а значит, определенные ранее функция φ двух переменных с соответствующей функцией Φ будут репрезентатором и верификатором и этой структуры.

Теорема 4.2. Для любых множеств $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, преобразований $\xi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ репрезентатора φ и верификатора Φ физической структуры размерности (n, m) ранга (r, s) десятица $((\mathfrak{N}, n, \xi, r), (\mathfrak{M}, m, x, s), \varphi, \Phi)$ является физической структурой.

Действительно, из определения 4.2 следует, что значение функции Φ на матрице с общим членом $\varphi(\xi_j, x_k)$ равно нулю для любых значений $\xi_j \in \mathbb{R}^n$, $x_k \in \mathbb{R}^m$, где $j = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, s$. Определив $\xi_j = \xi(\alpha_j)$, $x_k = x(i_k)$, установим, что значение Φ на матрице с общим членом равно нулю, т. е. справедливо условие (4.1).

Вывод 4.2. Уравнение физической структуры в форме (4.1) связывает исключительно ее репрезентатор и верификатор, которые в силу этого равенства оказываются в определенном смысле двойственными.

Согласно теореме 4.2 в качестве характеристик структуры размерности (n, m) на $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ могут быть выбраны любые отображения $\xi : \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Разные характеристики задают различные шкалы измерения физических объектов. В частности, произвольность функционалов ξ^1 и x^1 в формуле (1.6) означает свободу выбора измерительных шкал для сил и масс, а произвольность функционалов ξ_1 , ξ_2 и x^1 в формуле (2.6) означает свободу выбора измерительных шкал для эдс, внутреннего сопротивления батарейки и сопротивления проводника. Тем самым можно считать, что различные характеристики в этом случае задают одну и ту же структуру.

Замечание 4.2. Величины, входящие в определение физической структуры можно разбить на два типа. Ранг, размерность, репрезентатор и верификатор по сути своей являются математическими понятиями. А вот классы физических объектов и их характеристики относятся к физике. Они проявляются не при анализе уравнения физической структуры, а на стадии интерпретации результатов этого анализа.

Теорема 4.3. Если пара (φ, Φ) является репрезентатором и верификатором физической структуры размерности (n, m) ранга (r, s) , то для любой обратимой функции f и любых отображений $\mathbf{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Upsilon : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ тем же свойством обладает и пара $(\varphi_f^{\mathbf{H}\Upsilon}, \Phi_f)$ где $\varphi_f^{\mathbf{H}\Upsilon}$ ставит в соответствие векторам $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^m$ число $f(\mathbf{H}\xi, \Upsilon x)$, а отображение $\Phi_f : \mathbb{R}^{r,s} \rightarrow \mathbb{R}$ ставит в соответствие матрице с общим элементом a_j^k значение функции Φ от матрицы с общим элементом $f^{-1}(a_j^k)$.

Доказательство. Пусть для некоторой пары (φ, Φ) справедливо равенство (4.1). Тогда значение функции Φ на матрице с общим членом $\varphi(\xi_j, x_k)$ равно нулю для любых значений $\xi_j \in \mathbb{R}^n$, $x_k \in \mathbb{R}^m$, где $j = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, s$. Для величины $\varphi_f^{\mathbf{H}\Upsilon}$ определим такое преобразование из $\mathbb{R}^{r,n} \times \mathbb{R}^{s,m}$ в $\mathbb{R}^{r,s}$, которое ставит в соответствие матрицам со столбцами $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ и $(x_1, \dots, x_s)$ матрицу с общим членом $f(\mathbf{H}\xi_j, \Upsilon x_k)$. Значение Φ_f от этой матрицы равно значению функции Φ от матрицы с общим членом $\varphi(\xi'_j, x'_k)$ где $\xi'_j = \mathbf{H}\xi_j$, $x'_k = \Upsilon x_k$. Учитывая условия $\xi'_j \in \mathbb{R}^n$, $x'_k \in \mathbb{R}^m$, заключаем, что значение Φ_f на матрице с общим членом $f(\mathbf{H}\xi_j, \Upsilon x_k)$ равно нулю для всех $\xi_j \in \mathbb{R}^n$, $x_k \in \mathbb{R}^m$. Отсюда следует справедливость равенства $\langle \Phi_f, \varphi_f^{\mathbf{H}\Upsilon} \rangle = 0$. Теорема доказана.

Итак, имеется целый класс репрезентаторов и верификаторов физической структуры.

Определение 4.3. Две пары репрезентатор-верификатор (φ, Φ) и (ψ, Ψ) физической структуры размерности (n, m) одинакового ранга назовем **эквивалентными**, если существует такие обратимая функция f и обратимые отображения $\mathbf{H} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Upsilon : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, что справедливы равенства $\psi = \varphi_f^{\mathbf{H}\Upsilon}$, $\Psi = \Phi_f$. Соответствующий класс эквивалентности назовем **генератором физической структуры** данных размерности и ранга.

Физически конкретные репрезентаторы задают шкалы измерения соответствующих величин: для механического движения — ускорений, для электрической цепи — сил тока. Естественно отождествлять физические структуры с одними и теми же множествами физических объектов и рангами, если их репрезентаторы и верификаторы эквивалентны. В частности, формулы (4.2), (1.7) и (4.3), (2.7) задают репрезентаторы и верификаторы структур механического движения и электрической цепи для любых функций f , а значит, определяют генератор структуры в целом.

Вывод 4.3. Физическая структура данной размерности и ранга определяется не конкретными репрезентаторами и верификаторами, а генератором данной структуры.

На основе полученных результатов можно заключить, что описание фи-

зической структуры фактически сводится к нахождению соответствующих им генераторов. В результате приходим к следующему понятию:

Определение 4.4. *Физические структуры изоморфны, если они имеют одинаковые ранг, размерность и генератор.*

Изоморфные физические структуры обладают одинаковыми математическими свойствами и могут различаться либо физической интерпретацией (классами физических объектов и их характеристиками), либо эквивалентными репрезентаторами и верификаторами. В частности, изоморфны физические структуры прямолинейного механического движения и участка электрической цепи (где батарейка обладает лишь эдс, но не внутренним сопротивлением).

Вывод 4.4. *Классификация физических структур осуществляется с точностью до изоморфизма.*

Замечание 4.3. При анализе закона Ньютона вместо массы можно было бы использовать величину, обратную к ней. При анализе закона Ома мы делали замену переменных, фактически переходя к другой системе характеристик. Однако соответствующий физический закон и стоящая за ним физическая структура при этом не менялись. Это говорит о наличии определенной свободы выбора физических характеристик, а не только шкал их измерения. Получаемые в итоге структуры совпадают с точностью до изоморфизма, а значит, имеют одну и ту же смысловую нагрузку.

Установим некоторые соотношения между рангом и размерностью структуры.

Теорема 4.4. *Если пара φ, Φ является репрезентатором и верификатором физической структуры размерности (n, m) ранга (r, s) , то для любых натуральных чисел $s' > s$ $n' < n$ и существуют такие отображения $\Phi' : \mathbb{R}^{r, s'} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\varphi' : \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, что (φ, Φ') будет репрезентатором и верификатором физической структуры размерности (n, m) ранга (r, s') , а (φ', Φ) — для физической структуры размерности (n', m) ранга (r, s) .*

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случаи $s' = s + 1$ и $n' = n - 1$. Пусть существует такая пара отображений $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ и $\Phi : \mathbb{R}^{r, s} \rightarrow \mathbb{R}$, что выполнено равенство (4.1), т. е.

$$\Phi \begin{pmatrix} \varphi(\xi_1, x_1) & \dots & \varphi(\xi_1, x_s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi(\xi_r, x_1) & \dots & \varphi(\xi_r, x_s) \end{pmatrix} = 0$$

$$\forall \xi_j \in \mathbb{R}^n, x_k \in \mathbb{R}^m, j = 1, \dots, r, k = 1, \dots, s. \quad (4.4)$$

Определим функцию от матрицы $\Phi' : \mathbb{R}^{r, s+1} \rightarrow \mathbb{R}$ с помощью равенства

$$\Phi' \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1s} & q_{1s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{r1} & \dots & q_{rs} & q_{rs+1} \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{r1} & \dots & q_{rs} \end{pmatrix} +$$

$$+ \Phi \begin{pmatrix} q_{12} & \dots & q_{1s+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{r2} & \dots & q_{rs+1} \end{pmatrix} + \dots + \Phi \begin{pmatrix} q_{1s+1} & q_{11} & \dots & q_{1s-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{rs+1} & q_{r1} & \dots & q_{rs-1} \end{pmatrix}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \Phi' \begin{pmatrix} \varphi(\xi_1, x_1) & \dots & \varphi(\xi_1, x_s) & \varphi(\xi_1, x_{s+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(\xi_r, x_1) & \dots & \varphi(\xi_r, x_s) & \varphi(\xi_r, x_{s+1}) \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \varphi(\xi_1, x_1) & \dots & \varphi(\xi_1, x_s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi(\xi_r, x_1) & \dots & \varphi(\xi_r, x_s) \end{pmatrix} + \\ + \dots + \Phi \begin{pmatrix} \varphi(\xi_1, x_{s+1}) & \dots & \varphi(\xi_1, x_{s-1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi(\xi_r, x_{s+1}) & \dots & \varphi(\xi_r, x_{s-1}) \end{pmatrix} = 0 \\ \forall \xi_j \in \mathbb{R}^n, x_k \in \mathbb{R}^m, j = 1, \dots, r, k = 1, \dots, s+1, \end{aligned}$$

в силу условия (4.4). Тем самым пара (φ, Φ') действительно будет репрезентатором и верификатором соответствующей физической структуры.

Определим теперь отображение $\varphi' : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ с помощью равенства

$$\varphi'(\xi; x) = \varphi(\xi, \xi^*; x) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, x \in \mathbb{R}^m,$$

где ξ^* — произвольное действительное число. Тогда справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \Phi \begin{pmatrix} \varphi'(\xi_1; x_1) & \dots & \varphi'(\xi_1; x_s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi'(\xi_r; x_1) & \dots & \varphi'(\xi_r; x_s) \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \varphi(\xi_1, \xi^*; x_1) & \dots & \varphi(\xi_1, \xi^*; x_s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi(\xi_r, \xi^*; x_1) & \dots & \varphi(\xi_r, \xi^*; x_s) \end{pmatrix} = 0 \\ \forall \xi_j \in \mathbb{R}^{n-1}, x_k \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

для всех $j = 1, \dots, r, k = 1, \dots, s$ в силу (4.4), т. е. (φ', Φ) есть репрезентатор и верификатор физической структуры ранга (r, s) размерности (m', m) . Теорема доказана.

Из теоремы 4.4 в силу принципа двойственности следует, что, если (φ, Φ) является репрезентатором и верификатором физической структуры размерности (n, m) ранга (r, s) , то для любого $r' > r$ существует такая функция от матрицы Φ'' соответствующего порядка, что (φ, Φ'') будет репрезентатором и верификатором физической структуры той же размерности ранга (r', s) , а для любого натурального числа $m' < m$ существует такая функция φ'' соответствующего числа переменных, что (φ'', Φ) будет репрезентатором и верификатором физической структуры того же ранга размерности (n, m') .

Вывод 4.5. Для любой физической структуры существует физическая структура той же размерности большего ранга с тем же репрезентатором и меньшей размерности с тем же верификатором, если, конечно, исходная размерность не равна $(1, 1)$.

На основе полученных результатов можно придти к следующему заключению:

Вывод 4.6. Понятия размерности и репрезентатора физической структуры, с одной стороны, и понятия ее ранга и верификатора, с другой стороны, являются в некотором смысле двойственными.

Замечание 4.4. Репрезентатор является функцией характеристик объектов, а значит, связан с размерностью физической структуры, характери-

зующей число имеющихся характеристик у обоих классов объектов. С другой стороны, верификатор определен на матрице, порядок которой соответствует числу выбранных объектов того и другого сорта, что соответствует понятию ранга физической структуры.

Физические структуры более высоких рангов той же размерности или меньшей размерности того же ранга, получаемые на основе теоремы 4.4, тривиальны и едва ли имеют практический интерес. С практической точки зрения для структуры ранга (r, s') мы ставим большее количество экспериментов для воспроизведения одного и того же физического закона, чем для структуры ранга (r, s) при $s' > s$, не получая при этом дополнительной информации. Существование физической структуры того же ранга, но меньшей размерности, также следующее из теоремы 4.4, опять-таки говорит об избыточности информации, поскольку, по крайней мере, одна из имеющихся физических характеристик может быть исключена из описания физического закона. В этой связи интерес представляют следующие классы генераторов физических структур:

Определение 4.4. *Генератор физической структуры размерности (n, t) ранга (r, s) назовем **нетривиальным**, если не существует такого генератора физической структуры той же размерности ранга (r', s') , что выполнены неравенства $r' \leq r$ и $s' \leq s$ по крайней мере, одно из которых является строгим, и такого генератора физической структуры того же ранга размерности (n', t') , что выполнены неравенства $t \leq t'$ и $n \leq n'$, по крайней мере, одно из которых является строгим.*

Вывод 4.7. *Интерес представляют лишь физические структуры с нетривиальными генераторами.*

Ранее в качестве примеров были рассмотрены физические структуры механического движения размерности $(1, 1)$ ранга $(2, 2)$ и электрической цепи размерности $(2, 1)$ ранга $(2, 3)$. В обоих случаях размерность (n, t) и ранг (r, s) были связаны соотношениями $t = r - 1$, $n = s - 1$. Характерно, что эти равенства выполняются для всех встречающихся в приложениях физических структур, описанных Ю.И. Кулаковым (см. [10]). В этой связи приходим к следующему понятию:

Определение 4.5. *Структурой Кулакова назовем такую физическую структуру, в которой ранг (r, s) и (n, t) размерность связаны равенствами $t = r - 1$, $n = s - 1$.*

Замечание 4.5. Ввиду наличия жесткой связи между рангом и размерностью структур Кулакова для их описания достаточно использовать лишь одну из этих характеристик. В частности, для изоморфизма структур Кулакова достаточно совпадения их рангов и генераторов.

Замечание 4.6. Наличие связи между значениями элементов ранга и размерности структур Кулакова подобно соотношению (4.1), выражающему связь между репрезентатором и верификатором, служит еще одним подтверждением факта двойственности этих понятий.

Существует достаточно естественный класс генераторов структур Кулакова, допускающий полное описание и охватывающий возникающие в приложениях (см., например, [10]) физические структуры.

Определение 4.6. Генератор структуры Кулакова ранга $(m+1, n+1)$ назовем **генератором Михайличенко**, если входящие в его определение функции φ и Φ являются достаточно гладкими, а также невырожденными в том смысле, для любых векторов $\xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbb{R}^n$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^m$ отображения $\varphi^m: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $\varphi_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, характеризующие равенствами $\varphi^m(x) = (\varphi(\xi_1, x), \dots, \varphi(\xi_m, x))$, $\varphi_n(\xi) = (\varphi(\xi, x_1), \dots, \varphi(\xi, x_n))$, имеют ранги m и n соответственно, и хотя бы одна частная производная от Φ отлична от нуля.

Из теоремы Михайличенко (см., [11], а также [22], с. 18) непосредственно следует

Теорема 4.5. Для структуры Кулакова ранга $(2,2)$ существует единственный генератор Михайличенко, порожденный функциями

$$\varphi(\xi_1, x_1) = \xi_1 x_1, \quad \Phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Для структуры Кулакова ранга (r, r) , $r > 2$ существует в точности два генератора Михайличенко, порожденные функциями

$$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}; x_1, \dots, x_{r-1}) = \sum_{j=1}^{r-1} \xi_j x_j,$$

$$\Phi \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix};$$

$$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}; x_1, \dots, x_{r-1}) = \sum_{j=1}^{r-2} \xi_j x_j + \xi_{r-1} + x_{r-1},$$

$$\Phi \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Для структуры Кулакова ранга $r, r+1$, $r \geq 2$ существует единственный генератор Михайличенко, порожденный функциями

$$\varphi(\xi_1, \dots, \xi_r; x_1, \dots, x_{r-1}) = \sum_{j=1}^{r-1} \xi_j x_j + \xi_r,$$

$$\Phi \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr+1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_{11} & \dots & a_{1r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{r1} & \dots & a_{rr+1} \end{vmatrix}.$$

Для структуры Кулакова ранга $(2,4)$ существует единственный

генератор Михайличенко, порожденный функциями

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3; x_1) = \frac{\xi_1 x_1 + \xi_2}{\xi_3 + x_1},$$

$$\Phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{13}a_{23} & a_{14}a_{24} \end{vmatrix}.$$

Для других структур Кулакова ранга (r, s) при $s > r$ генераторы Михайличенко не существуют.

В приведенной теореме под функциями, порождающими генератор, понимаются простейшие репрезентатор и верификатор, входящие в данный класс эквивалентности.

Замечание 4.7. Доказательство существования физической структуры ранга $(2, 2)$ было дано Ю.И. Кулаковым [2].

Характеристика генераторов Михайличенко для структур ранга (r, s) при $r > s$ следует из теоремы 4.5 и принципа двойственности.

Вывод 4.8. Приведенные утверждения дают полное описание репрезентаторов и верификаторов структур Кулакова произвольного ранга при выполнении условий гладкости и невырожденности.

Вывод 4.9. При выполнении условий гладкости и невырожденности существуют единственные с точностью до изоморфизма структуры Кулакова ранга $(r, r+1)$ и $(2, 4)$ и две структуры ранга (r, r) . Других структур такого типа ранга (r, s) при $s > r$ не существует.

Поскольку теорема 4.6 дает полное описание всевозможных генераторов Михайличенко, можно прийти к следующему заключению:

Вывод 4.10. Генераторы Михайличенко являются нетривиальными генераторами соответствующих структур Кулакова.

Замечание 4.8. Существование нескольких генераторов физической структуры говорит о том, что в данной ситуации имеется соответствующее количество неизоморфных физических структур данного ранга и размерности. Таким образом, имеется несколько потенциально возможных физических законов данного типа. Отдать предпочтение какому-то одному из них в рамках поставленной задачи, по-видимому, не представляется возможным. Здесь имеется некоторая аналогия с ситуацией, когда математическая модель процесса допускает неединственное решение. К примеру, в задаче об эйлеровом стержне можно рассчитать профиль, который примет вертикально расположенный стержень, на верхний конец которого действует определенная сила. Однако предугадать, вправо он отклонится или влево мы не можем в виду равноправия решений соответствующей краевой задачи.

Замечание 4.9. Конкретное число генераторов физической структуры представляется ее важнейшей характеристикой. Существование генератора, и стоящая за этим разрешимость уравнения физической структуры свидетельствуют о том, что в результате всевозможных взаимодействий вы-

бренных произвольным образом физических объектов значения характеристик этих взаимодействий не могут оказаться совершенно произвольными. По крайней мере, одно из них выражается через другие посредством уравнения физической структуры.

Замечание 4.10. Можно задаться вопросом, что стоит за утверждениями теоремы 4.6 и связанной с ней теоремы Михайличенко. Пусть имеем структуру ранга (r, s) . Тогда для получения физического закона выбираются r объектов первого сорта и s объектов второго сорта. Между ними существуют rs связей, т. е. получаем rs уравнений. Согласно заданному соотношению между рангом и размерностью нам неизвестны по $s - 1$ характеристик для r объектов первого сорта и по $r - 1$ характеристик для s объектов второго сорта, т. е. общее число неизвестных равно $r(s-1) + s(r-1)$. Очевидно, число неизвестных, вообще говоря, превышает число уравнений. Нас интересует, при каких условиях отношение числа неизвестных к числу уравнений будет минимально, т. е. где появление решений вероятнее всего. Пусть общая сумма выбранных составляющих ранга $q = r + s$ фиксирована. Определим функцию $f = f(r)$, выражающую отношение числа неизвестных к числу уравнений при $s = q - r$ т. е. $f(r) = 2 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r-q}$. Находим производную $f'(r) = \frac{q(q-2r)}{(r(r-q))^2}$. Обращая ее в нуль, получаем $r = q/2$, а значит, $r = s$.

Очевидно, это именно точка минимума. Следовательно, отношение числа неизвестных к числу уравнений будет минимально именно на диагонали, т. е. при $r = s$. Понятно, что связь между числом уравнений и неизвестных в данном случае носит достаточно сложный характер. Уравнения эти нельзя считать независимыми в силу наличия уравнения физической структуры, а физические характеристики объектов не являются независимыми, коль скоро у нас в процессе анализа появляются эталонные объекты. Однако не случайно недоопределенность системы, выразившаяся в появлении двух неизоморфных решений, реализуется в точности там, где отношение числа неизвестных (вообще говоря, относительно большое) к числу уравнений (вообще говоря, меньшему) минимально. В непосредственной близости от диагонали, где превышение числа неизвестных над числом уравнений еще сильно не проявляется, мы получаем единственное решение. Ну а чем дальше мы отходим от диагонали, тем все более сильно проявляется превышение числа неизвестных над числом уравнений с неминуемой переопределенностью системы.

Замечание 4.11. Условия гладкости и невырожденности в приведенном утверждении носят принципиальный характер. В частности, для структуры Кулакова ранга $(2, 2)$ можно определить вырожденный генератор структуры, порождаемый функциями

$$\varphi(\xi, x) = \xi, \quad \Phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

и негладкий генератор структуры, порождаемый функциями

$$\varphi(\xi, x) = \max\{\xi, x\} \quad \Phi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \max\{a_{11}, a_{22}\} - \max\{a_{12}a_{21}\}.$$

Замечание 4.12. Вопрос о том, как много существует нетривиальных генераторов структур Кулакова, не являющихся генераторами Михайличенко, и имеют ли они какой-то физический смысл, по-видимому, остается еще не исследованным.

Замечание 4.13. Физические структуры, не являющиеся структурами Кулакова, по-видимому, еще не исследовались. Неизвестно даже, обладают ли они нетривиальными генераторами.

5 Дополнение

В определении 3.1 не исключается случай, когда рассматриваемые классы физических объектов совпадают. В силу равноправия всех объектов класса в этом случае размерность (число характеристик объекта) и ранг (число выбранных объектов) будут описываться не парами натуральных чисел, а отдельными числами.

Определение 5.1. Пусть заданы некоторое множество $\mathfrak{N}$, натуральные числа n, r и отображения $\xi : \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ и функция Φ от матрицы порядка $r \times r$ такие, что справедливо соотношение

$$\Phi(\overline{\varphi}(\overline{\alpha})) = 0 \quad \forall \overline{\alpha} \in \mathfrak{N}^r,$$

где $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, а $\overline{\varphi}(\overline{\alpha})$ есть матрица с компонентами $\varphi(\xi(\alpha_j), \xi(\alpha_k))$, $j, k = 1, \dots, r$. Тогда шестерка $(\mathfrak{N}, n, \xi, r, \varphi, \Phi)$ называется **физической структурой** на множестве $\mathfrak{N}$ размерности n ранга r с характеристикой ξ , репрезентатором φ и верификатором Φ .

Приведем один содержательный пример подобной структуры, описанный Ю.И. Кулаковым [10]. Рассмотрим евклидову плоскость, т. е. $\mathfrak{N} = \mathbb{R}^2$. Каждой точке α (физическому объекту) ставится в соответствие две ее декартовы координаты (характеристики), обозначаемые вектором $\xi(\alpha) = (\xi^1(\alpha), \xi^2(\alpha))$, а значит, $n = 2$. В качестве репрезентатора (поддающей экспериментальному определению характеристики взаимоотношения между двумя рассматриваемыми объектами) выбирается расстояние между точками, т. е.

$$\varphi(\xi(\alpha_1), \xi(\alpha_2)) = \sqrt{(\xi^1(\alpha_1) - \xi^1(\alpha_2))^2 + (\xi^2(\alpha_1) - \xi^2(\alpha_2))^2}.$$

Известна *формула Тарталья*, выражающая квадрат объема тетраэдра через квадраты длин его сторон:

$$V^2 = \frac{(-1)^3}{2^3(3!)^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ -1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ -1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

где a_{jk} есть квадрат расстояния между j -ой и k -ой вершинами тетраэдра. Естественно, в том случае, когда все четыре точки лежат в одной плоскости,

этот объем будет равен нулю. Таким образом, полагая $r = 4$ и выбирая в качестве функции Φ от квадратной матрицы четвертого порядка с компонентами a_{jk} определитель в правой части предшествующего равенства, установим справедливость соотношения (5.1). Тем самым определяется *метрическая физическая структура евклидовой плоскости* размерности 2 ранга 4 с характеристиками “декартовы координаты”, репрезентатором “расстояние” и верификатором, определяемым формулой Тартальи.

Как и в случае физических структур механического движения и электрической цепи, физическая структура евклидовой плоскости позволяет осуществить экспериментальную проверку закона природы.

Вывод 5.1. *Взяв произвольным образом четыре точки и вычисляя известное соотношение (формула Тартальи), связывающее экспериментально определяемые расстояния между ними, можно удостовериться, действительно ли все рассматриваемые точки лежат в одной плоскости, т. е. мы имеем дело с двумерным объектом.*

Замечание 5.1. Мы вновь столкнулись с ситуацией, когда, выбрав произвольным образом соответствующее количество точек на плоскости, мы не получим произвольный набор расстояний между этими точками. Одно из них будет непременно выражаться через остальные. Именно это обстоятельство позволяет считать эту связь уравнением физической структуры и относить метрические отношения на евклидовой плоскости и обобщающее это понятие из определения 5.1 к классу физических структур.

Аналогичные результаты можно получить для пространств любого числа измерений (См. Ю.И. Кулаков, [10], глава 7).

Замечание 5.2. То обстоятельство, что в рассмотренном выше примере и его обобщениях репрезентатор оказывается связанным с метрикой, послужило основанием для его интерпретации Г.Г. Михайличенко в качестве обобщенной метрики. Соответственно, физические структуры, в которых репрезентатор имеет несколько независимых компонент (см. ниже), были названы *полиметрическими* (см., например, [21] и [23] для случая одного множества и [19, 20] для случая двух множеств).

Следующий шаг на пути обобщения физических структур соответствует случаю, когда не только физические объекты, но и результат их взаимодействия обладает произвольным числом характеристик. Тогда значения репрезентатора оказываются не числами, а векторами. Естественный пример физической структуры такого типа связан со вторым законом Ньютона в случае плоского движения тела.

Рассматриваются вновь множество всевозможных тел $\mathfrak{M}$ и множество всевозможных акселераторов $\mathfrak{N}$. Каждое тело i обладает единственной характеристикой — массой $m = x(i)$, а каждый акселератор α характеризуется составляющими вектора силы $F^1 = \xi^1(\alpha)$ и $F^2 = \xi^2(\alpha)$. Соответствующее движение характеризуется составляющими вектора ускорения $(a^1, a^2) = \varphi(\alpha, i) = (\varphi^1(\alpha, i), \varphi^2(\alpha, i))$. Согласно второму закону Ньютона для движения тела на плоскости ускорение связано с массой и силой следующими соотношениями $a^l = F^l/m$, $l = 1, 2$. Взяв два тела i_1, i_2 , и два акселератора α_1, α_2 , установим соотношения $a_{jk}^l = F_k^l/m_j$, $j, k = 1, 2$, $l = 1, 2$,

где $m_j = x(i_j)$, $F_k^l = \xi^l(\alpha_k)$, $a_{jk}^l = \varphi^l(\alpha_k, i_j)$, $j, k, l = 1, 2$. Исключая из предшествующих соотношений силы и массы, получаем равенства

$$a_{11}^l a_{22}^l - a_{12}^l a_{21}^l = 0 \quad l = 1, 2,$$

аналогичные (1.2). Таким образом, существуют такие отображения $\varphi : \mathfrak{N} \times \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\Phi : \mathbb{R}^{2,2,2} \rightarrow \mathbb{R}^2$, где $\mathbb{R}^{2,2,2}$ есть множество кубических матриц второго порядка (трехмерных матриц порядка $2 \times 2 \times 2$) такие, что справедливо соотношение

$$\Phi(\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, \bar{i})) = 0 \quad \forall \bar{\alpha} \in \mathfrak{N}^2, \bar{i} \in \mathfrak{M}^2, \quad (5.2)$$

где $\bar{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$, $\bar{i} = \langle i_1, i_2 \rangle$, $\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, \bar{i})$ есть кубическая матрица второго порядка с компонентами $\varphi^l(\alpha_k, i_j)$. В частности, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \varphi^l(\alpha, i) &= \xi^l(\alpha)/x(i), \\ \Phi(A) &= (\Phi^1(A), \Phi^2(A)); \quad \Phi^l(A) = \begin{vmatrix} a_{11}^l & a_{12}^l \\ a_{21}^l & a_{22}^l \end{vmatrix}, \quad l = 1, 2, \end{aligned}$$

а через A обозначена кубическая матрица второго порядка с компонентами a_{jk}^l . Соотношение (5.2) является векторным (двумерным) аналогом уравнения (3.2) физической структуры одномерного механического движения. Таким образом, мы имеем дело с *физической структурой плоского механического движения*.

Замечание 5.3. Характерно, что репрезентатор для рассмотренной физической структуры является вырожденным. Таким образом, физические структуры с вырожденным репрезентатором могут иметь реальный физический смысл, хотя подавляющее большинство таких объектов, по-видимому, практического значения не имеют. В [25] рассматривается физическая структура одномерного движения с вращением. При этом двумерным оказывается и множество тел, и множество акселераторов, а соответствующий двухкомпонентный репрезентатор является невырожденным.

Итак, на множествах всевозможных тел и акселераторов с характеристиками “масса тела” и “составляющие вектора силы”, репрезентатором “составляющие вектора ускорения” и определенным выше верификатором (парой функций от кубических матриц второго порядка) определена двумерная (по числу характеристик процесса, т.е. размерности множества значений репрезентатора) физическая структура размерности (2,1) (акселератор имеет две характеристики, а тело — одну) ранга (2,2) (выбрано по два объекта из каждого класса) порядка 2 (по числу независимых соотношений, связывающих измеряемые величины, т.е. размерности множества значений верификатора).

Имея физические структуры, определенные на одном и двух классах объектов, естественно перейти к рассмотрению структур на произвольном числе классов объектов, а также с произвольным числом связей. В результате приходим к следующему обобщению рассматриваемого понятия.

Определение 5.2. Пусть заданы множества $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_p$, натуральные числа $m_1, \dots, m_p$, $r_1, \dots, r_p$, q, s и отображения $\xi_i : \mathfrak{M}_i \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$, $i = 1, \dots, p$, $\varphi : \prod_{i=1}^p \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow \mathbb{R}^s$ и Φ , ставящее в соответствие p -мерной матрице порядка $r_1 \times \dots \times r_p$ q -мерный вектор, такие, что справедливо соотношение

$$\Phi(\bar{\varphi}(\bar{\alpha})) = 0 \quad \forall \bar{\alpha} \in \prod_{i=1}^p \mathfrak{M}_i^{r_i}, \quad (5.3)$$

где $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}^1, \dots, \bar{\alpha}^p)$, $\bar{\alpha}^i \in \mathfrak{M}_i^{r_i}$, $\bar{\varphi}(\bar{\alpha})$ есть упорядоченный набор из s -мерных матриц с компонентами, соответственно, $\varphi^1(\xi_1(\bar{\alpha}_{j_1}^1), \dots, \xi_p(\bar{\alpha}_{j_p}^p)), \dots, \varphi^s(\xi_1(\bar{\alpha}_{j_1}^1), \dots, \xi_p(\bar{\alpha}_{j_p}^p))$, $j_i = 1, \dots, r_i$, $i = 1, \dots, p$, $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^s)$. Тогда выражение $((\mathfrak{M}_1, m_1, \xi_1, r_1)), \dots, ((\mathfrak{M}_p, m_p, \xi_p, r_p), q, s, \varphi, \Phi)$ называется **p -арной s -мерной физической структурой порядка q на $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_p$** размерности $m_1, \dots, m_p$ ранга $r_1, \dots, r_p$ с характеристиками $\xi_1, \dots, \xi_p$, репрезентатором φ и верификатором Φ .

Замечание 5.4. Общее определение физической структуры приводится в [24] (см. с. 158). Там же показывается особый характер бинарных физических структур, допускающих конечномерные группы движений.

Для анализа введенных понятий можно воспользоваться описанной ранее методикой. В частности, по аналогии с определением 4.2 можно ввести понятие элементарного генератора соответствующей физической структуры. Пусть задано некоторое отображение $\varphi : \prod_{i=1}^p \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^s$. Обозначим через $\langle \Phi, \varphi \rangle$ композицию Φ и отображения, которое ставит в соответствие матрицам $\xi_i \in \mathbb{R}^{r_i n_i}$, $i = 1, \dots, p$ упорядоченный набор s -мерных матриц $\varphi^1(\xi_1, \dots, \xi_p), \dots, \varphi^s(\xi_1, \dots, \xi_p)$.

Определение 5.3. Отображения $\varphi : \prod_{i=1}^p \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}^s$ и $\Phi : \mathbb{R}^{r_1 \dots r_p} \rightarrow \mathbb{R}^q$ назовем **репрезентатором** и **верификатором** p -арной s -мерной физической структуры размерности $(m_1, \dots, m_p)$ ранга $(r_1, \dots, r_p)$ порядка q , если справедливо соотношение

$$\langle \Phi, \varphi \rangle = 0. \quad (5.4)$$

(5.4) По аналогии с теоремой 4.2 доказывается

Теорема 5.1. Для любых множеств $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_p$, преобразований $\xi_i : \mathfrak{M}_i \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$, $i = 1, \dots, p$ и пары репрезентатор-верификатор (φ, Φ) p -арной s -мерной физической структуры размерности $(m_1, \dots, m_p)$ ранга $(r_1, \dots, r_p)$ порядка s $((\mathfrak{M}_1, m_1, \xi_1, r_1)), \dots, ((\mathfrak{M}_p, m_p, \xi_p, r_p), q, s, \varphi, \Phi)$ является соответствующей физической структурой.

Теорема 5.1 говорит о том, что, как и в рассмотренном ранее частном случае, фактическое описание физических структур не зависит от классов физических объектов и характеристик, а определяется исключительно объектами числовой природы. Далее, вводя по аналогии с определением 4.3 на множестве пар репрезентатор-верификатор физической структуры данного типа отношение эквивалентности, можно определить генератор физической структуры как соответствующий класс эквивалентности. Таким образом, весь дальнейший анализ может быть сведен к поиску и классификации генераторов физических структур.

Замечание 5.5. Еще один принцип обобщения понятия физической структуры может быть связан с рассмотрением случая, когда рассматриваются классы физических объектов, связанных m -арной связью, где $p < m$ (см. [14]). Таким образом, количество взаимодействующих объектов превышает число классов объектов, а значит, во взаимодействии принимают участие сразу несколько объектов, по крайней мере, одного класса. При этом задается вектор натуральных чисел $(t_1, \dots, t_p)$ таких, что $t_1 + \dots + t_p = m$. Считается, что t_1 объектов первого класса непосредственно взаимодействуют с t_2 второго класса и т. д., с t_p объектами p -ого класса. В частности, в рассмотренной ранее метрической физической структуре на евклидовой плоскости у нас был один класс объектов, связанных бинарной связью, т. е. $p = 1, m = 2$.

Одномерные физические структуры на одном множестве рассматриваются, например, в книге Ю.И. Кулакова [10]. Соответствующие многомерные физические структуры рассматривали Г.Г. Михайличенко [14, 15, 16, 21, 23] и В.Х. Лев [27, 28]. В частности, полную классификацию двумерных физических структур на одном множестве дает Г.Г. Михайличенко [15], а для трехмерных структур — В.Х. Лев [27]. Многомерные бинарные физические структуры, а также обобщения на большее количество классов физических объектов осуществляется Г.Г. Михайличенко [12, 19, 23, 24] и В.А. Кыровым [40, 41]. Более общие результаты, а также классификация известных физических структур приводятся в книге Г.Г. Михайличенко [24]. Элементарное описание математического аппарата теории бинарных физических структур дается в книге Г.Г. Михайличенко и Р.М. Мурадова [25].

Следующий шаг на пути обобщения понятия физической структуры связан с рассмотрением репрезентатора и верификатора на множестве комплексных чисел. Здесь следует указать, прежде всего, работы Ю.В. Владимирова в области бинарной геометрофизики [9, 31]–[35]. Разработанная им теория бинарных систем комплексных отношений находит применение, например, в физике элементарных частиц. Использованию аппарата комплексных чисел в теории физических структур посвящены также работы Г.Г. Михайличенко [19] и А.А. Литвинцева [38]. Отметим также работы Г.Г. Михайличенко и Р.М. Мурадова [25, 26], в которых для анализа физических структур применяются гиперкомплексные числа.

Анализ групповой симметрии физических структур осуществляется Г.Г. Михайличенко (см. [16, 17, 24] с использованием аппарата групп и алгебр Ли.

Еще одно направление данной области связано с отказом от построения физических структур на конкретных множествах и переходом к поиску подходящего класса алгебраических объектов, на которых можно было бы установить существование физических структур с определенным набором свойств. Первая работа в этом направлении принадлежит, по-видимому, В.К. Ионину [37]. Сюда же относятся глубокие результаты А.А. Симонова [29, 30], который дал представление физической структуры на основе обобщенного матричного умножения прямоугольных матриц. Им было по-

казано, что физические структуры тесно связаны с алгеброй, работающей с матрицами над правыми почтиобластями. Отметим также работу А.Н. Бородина [39], в которой установлена связь бинарной физической структуры ранга (2,2) с грудями и группами.

Теория физических структур, связанная с широким комплексом нестандартных математических проблем, относящихся к алгебре, геометрии, теории уравнений, математической физики, еще далека от завершения. Перечень ряда нерешенных задач этого направления приводится в книге Г.Г. Михайличенко [24]. Некоторые неисследованные проблемы упоминались выше. Более глубокий математический анализ проблем теории физических структур, возможно, позволил бы также приблизиться к пониманию общих принципов, лежащих в основе физических законов.

Выражаю глубокую благодарность Ю.И. Кулакову, по инициативе которого написана данная работа, Г.Г. Михайличенко и А.А. Симонову, любезно предоставивших необходимый материал для ее написания и сделавших значительное количество замечаний по форме и содержанию работы, а также В.В. Кашкарову и А. Ненашеву, принявших активное участие в обсуждении рассматриваемых вопросов.

Список литературы

- [1] Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур. — Новосибирск, изд. НГУ, 1968. Ц 226 с.
- [2] Кулаков Ю.И. *Об одном принципе, лежащем в основании классической физики* // Докл. АН СССР. Ц 1970. — Т. 193, №1. Ц С. 72-75.
- [3] Кулаков Ю.И. *Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур* // Докл. АН СССР. — 1970. Ц— Т. 193, №5. — С. 985–987.
- [4] Кулаков Ю.И. *О новом виде симметрии, лежащем в основании физических теории феноменологического типа* // Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 201, №3. — С. 570–572.
- [5] Кулаков Ю.И. *Математическая формулировка теории физических структур* // Сиб. матем. журн. — 1971. — Т. 12, №5. — С. 1142–1145.
- [6] Кулаков Ю.И. *Основные положения теории физических структур* // *Teorie a Metoda*. — Прага, 1972. — Т. 4, №1. — С. 85–90.
- [7] Кулаков Ю.И. *О теории физических структур* // Записки ЛОМИ, 1983. — Вып. 127. — С. 103–151.
- [8] Кулаков Ю.И., Сычцова Л.С. *Теория физических структур как программа обоснования физики и как исследовательская программа в математике* / В сб. "Исследовательские программы в современной науке". — Новосибирск, Наука, Сибирское отделение, 1987. — С. 99–120.

- [9] Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. — М., изд. “Архимед”, 1992. — 182 с.
- [10] Кулаков Ю.И. Теория физических структур. — М., 2004. — 848 с.
- [11] Михайличенко Г.Г. *Решение функциональных уравнений в теории физических структур* // Докл. АН СССР. — 1972. — Т. 206, №5. — С. 1056–1058.
- [12] Михайличенко Г.Г. *Тернарная физическая структура ранга (2,2,2)* // Изв. Вузов. Математика. — 1976. — №8. — С. 60–67.
- [13] Михайличенко Г.Г. *Об одной задаче в теории физических структур* // Сиб. матем. журн. — 1977. — Т. 18, №6. — С. 1342–1355.
- [14] Mikhaylitschenko G.G. *Géométrie à deux dimensions dans la théorie de structures physiques* // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1981. — Т. 293, Ser. I. — P. 529–531.
- [15] Михайличенко Г.Г. *Двумерные геометрии* // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 260, №4. — С. 803–805.
- [16] Михайличенко Г.Г. *О групповой и феноменологической симметрии в геометриях* // Сиб. матем. журн. — 1984. — Т. 25, №5. — С. 99–113.
- [17] Михайличенко Г.Г. *Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур)* // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 284, №1. — С. 39–41.
- [18] Михайличенко Г.Г. *Некоторые следствия гипотезы о бинарной структуре пространства (в рамках теории физических структур)* // Изв. Вузов. Математика. — 1991. — №6. — С. 28–35.
- [19] Михайличенко Г.Г. *Двуметрические физические структуры и комплексные числа* // Докл. АН СССР. — 1991. — Т. 321, №4. — С. 677–680.
- [20] Михайличенко Г.Г. *Двуметрические физические структуры ранга* // Сиб. матем. журн. — 1993. — Т. 34, №3. — С. 132–143.
- [21] Михайличенко Г.Г. *Простейшие полиметрические геометрии* // Доклады РАН. — 1996. — Т. 348, №1. С. 22–24.
- [22] Михайличенко Г.Г. Математический аппарат теории физических структур. — Горно-Алтайск, изд. ГАГУ, 1997. — 143 с.
- [23] Михайличенко Г.Г. Полиметрические геометрии. — Новосибирск, изд. НГУ, 2001. — 144 с.
- [24] Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия физических структур. — Горно-Алтайск, изд. ГАГУ, 2003. — 203 с.
- [25] Михайличенко Г.Г., Мурадов Р.М. Физические структуры как геометрии двух множеств. — Горно-Алтайск, изд. ГАГУ, 2008. — 156 с.
- [26] Михайличенко Г.Г., Мурадов Р.М. *Гиперкомплексные числа в теории физических структур* // Изв. Вузов. Математика. — 2008. — №10. С. 25–30.

- [27] Лев В.Х. *Трехмерные геометрии в теории физических структур* // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Вып. 125. — Новосибирск: Ин-т Математики СО АН, 1988. — С. 90–103.
- [28] Лев В.Х. Трехмерные и четырехмерные пространства в теории физических структур. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 1990.
- [29] Симонов А.А. Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление Теории физических структур / В кн. Ю.И. Кулаков. Теория физических структур. — М., 2004. — С. 675–705.
- [30] Симонов А.А. *О соответствии между почтиобластями и группами* // Алгебра и логика. — 2006. — Т. 45, №2. — С. 239–251.
- [31] Владимиров Ю.С., Гаврилов В.Р. *Некоторые приложения теории физических структур* // В сб. "Исследования по классической и квантовой теории гравитации". — Днепропетровск, изд. Днепропетровского ун-та, 1985. — С. 18–26.
- [32] Владимиров Ю.С. *Биспиноры и физическая структура ранга (3,3)* // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Вып. 125. — Новосибирск: Ин-т Математики СО АН, 1988. — С. 42–60.
- [33] Владимиров Ю.С. *Описание взаимодействий в рамках теории бинарных физических структур* // Методологические и технологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Вып. 125. — Новосибирск: Ин-т Математики СО АН, 1988. — С. 61–87.
- [34] Vladimirov Yu.S. *Binary geometrophysics: space-time, gravitation* // Gravitation and Cosmology. — 1995. — №3. — P. 184–190.
- [35] Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. — М., Изд-во Московского ун-та, 1996; Часть 2. Теория физических взаимодействий. — М., Изд-во Московского ун-та, 1998.
- [36] Витяев Е.Е. *Числовое, алгебраическое и конструктивное представления одной физической структуры* // Логико-математические основы проблемы МОЗ. Вычислительные системы. Вып. 107. — Новосибирск, 1985. — С. 40–51.
- [37] Ионин В.К. *Абстрактные группы как физические структуры* // Системология и методологические проблемы информационно-логических систем. Вычислительные системы. Вып. 135. — Новосибирск: Ин-т Математики СО АН, 1990. — С. 40–43.
- [38] Литвинцев А.А. Комплексная физическая структура ранга (2,2) / В кн. Михайличенко Г.Г. Математический аппарат теории физических структур. — Горно-Алтайск, изд. ГАГУ, 1997. — С. 133–144.

- [39] Бородин А.Н. Груда и группа как физическая структура / В кн. Г.Г. Михайличенко Групповая симметрия физических структур. — Горно-Алтайск, изд. ГАГУ, 2003. — С. 195–203.
- [40] Кыров В.А. *Классификация четырехмерных транзитивных локальных групп преобразований пространства R^4 и их двухточечных инвариантов* // Известия вузов. Математика. — 2008. — №6. — С. 29–42.
- [41] Кыров В.А. *Проективная геометрия и теория физических структур* // Известия вузов. Математика. — 2008. Ц №11. Ц С. 48–59.