

26 сентября 2003

Дорогой Юрий Иванович!

По горячим следам излагаю некоторые мысли, возникшие по ходу Вашей лекции.

1. Аффинная геометрия и "хвосты". Аффинным преобразованием называется такое взаимнооднозначное преобразование точек, при котором прямые преобразуются в прямые. Оно является обобщением движения (конгруэнции), лежащего в основе линейной (в конечномерном случае – евклидовой) геометрии и требующего дополнительно сохранения расстояний в процессе преобразования. Общий вид аффинного преобразования: $x' = Ax + b$, где A есть линейный обратимый оператор, а b – фиксированный элемент (хвост!). В частности, аффинное преобразование на плоскости характеризуется равенствами

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1, \quad y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2$$

при условии, что соответствующий определитель отличен от нуля. Хотя в процессе аффинных преобразований нарушаются метрические свойства объектов, существует ряд естественных свойств, которые при этом сохраняются. Так, параллельные прямые отображаются в параллельные прямые, эллипс – в эллипс, центр тяжести – в центр тяжести и др. Сохраняется также отношения длин, площадей и объемов, хотя сами эти величины могут меняться. Геометрия, в которой рассматриваются свойства объектов, не меняющиеся при любых аффинных преобразованиях, и есть аффинная геометрия. Наличие "хвостов" в Ваших формулах, возможно, указывает на то, что Вы оперируете аффинными преобразованиями, а рассматриваемые структуры описываются средствами аффинной геометрии.

2. Структура с одной бинарной операцией и семейством унарных операций. Наиболее естественным алгебраическим объектом с таким набором операций (сигнатурой) являются линейные (векторные) пространства. Для их объектов (векторов), определены операции сложения и умножение на скаляр с некоторым набором свойств. Умножение на скаляр представляет собой унарную операцию, поскольку каждому вектору ставится соответствие вектор, полученный в результате соответствующего растяжения или сжатия исходного вектора. Естественно, каждому скаляру соответствует своя унарная операция. Правда, у Вас бинарная операция называется умножением, а унарные – сложениями. Однако важны не ярлыки, а свойства определяемых объектов (алгебраических структур). Не исключено, что в Вашем случае некоторые аксиомы линейного пространства будут нарушены. Однако существует и более общие алгебраические объекты указанного типа с облегченным набором аксиом – модули, группы с операторами и другие множества с внешними законами композиции.

3. Сводимость отношений третьего порядка к бинарным отношениям. Здесь возникает ассоциация с известным Вам результатом Арнольда о сводимости любой непрерывной функции трех переменных к суперпозиции непрерывных функций двух переменных. Этот результат, развивающий более ранние работы Колмогорова, восходит к тринадцатой проблеме Гильберта о невозможности решения общего уравнения седьмого порядка с помощью функций двух переменных. Не исключено, что сама проблематика представимости решений соответствующих уравнений как-то перекликается с работами Колмогорова, Арнольда и их последователей.

Весьма вероятно, что всё это не имеет особого отношения к Вашим исследованиям. Я не являюсь специалистом ни в геометрии, ни в алгебре, ни в теории функций, а потому мои познания в этих математических направлениях оставляют желать лучшего. Разобраться же в математических аспектах Ваших результатов на основе одной короткой лекции практически не возможно. Очень надеюсь получить от Вас соответствующий материал. Тогда, возможно, на ум придет что-нибудь более серьезное.

Кстати, для меня не очевидно Ваше утверждение об отсутствии в математике того или иного типа структур. Здесь имеется некоторое количество общих направлений: теория структур (на ней базируются Бурбаки), теория категорий, универсальные алгебры (единая теория алгебраических объектов), теория алгебраических систем (множеств, в которых определено некоторое количество произвольных операций и отношений). Трудно придумать математический объект, не подпадающий хотя бы под одну из этих теорий, хотя на существование подобных объектов указывает теорема Гёделя о неполноте. Возможно, необходимая Вам в конкретной ситуации математическая структура не была ранее востребована математикой. Однако весьма вероятно, что в случае ее строгого определения мы получим нечто, описываемое в рамках уже известных математических конструкций.

Должен сказать, что Ваша лекция произвела на меня сильное впечатление. Ваша философская позиция мне весьма близка. Мне тоже как-то хотелось бы взглянуть на всё сверху. Когда находишься в глубоком ущелье, то видишь несколько вершин. Стоит вылезти на гребень, то оказывается, что это и не вершины вовсе. А настоящие вершины – дальше и выше. Забравшись на гору, можно отчетливо увидеть не только ближайшие пики, но и связывающие их гребни. И лишь с господствующей узловой вершины видна общая система хребтов и ущелий. А народ в своей массе сидит внизу в полной уверенности, что видит настоящие горы...

Я немало размышлял над логическим строением единой математики. Потом захотел поделиться своими мыслями со студентами. Потом появилась книга... На меня в немалой степени повлияли грандиозная, но, к счастью, не осуществимая программа Гильберта, трактаты Бурбаки, некоторые размышления Вейля... Кстати, я думаю в обозримом будущем ее переиздать. Прежде всего, следует исправить до безобразия великое множество опечаток (книгу я издавал сам, а потому пришлось обойтись без редактора и корректора). Кроме того, мои взгляды за прошедшие пять лет претерпели немалые изменения. Многие конструкции удалось существенно упростить. Обнаружились кое-какие любопытные связи, интересные иллюстрации. Новые мысли приходят постоянно. Такое ощущение, что я буду править эту книгу всю жизнь...

Я надеюсь, что как-нибудь мы сможем с Вами обстоятельно поговорить.

С уважением,

Семен Серовайский

Письмо 2. 28 сентября 2003

Дорогой Семён!

Письмо Ваше получил. Проверка работы почты. ЮИ

Дорогой Семён!

Я был очень рад Вашему весьма содержательному письму. Спасибо за оперативность. Кратковременная встреча с Вами оставила у меня самое яркое впечатление от всей моей двухнедельной поездки в Семипалатинск и Алма-Ату. Мне очень жаль, что я нашёл Вас в самый последний день моего пребывания в Алма-Ате и не осталось времени для содержательного разговора.

Дело в том, что главная цель моей поездки в Алма-Ату - набор команды единомышленников, готовых посвятить свою жизнь изучению принципиально новой реальности - Мира Высшей реальности, из числа высококвалифицированных математиков, не стандартно мыслящих и широко образованных физиков и вообще людей, увлечённых поиском высокой и единственной Истины.

Почти двое суток, проведённые в поезде, я читал Вашу "Архитектуру математики". И я понял, что это как раз то, что я искал. Когда-то я сам пытался конспективно изложить для моих учеников подобное введение в высокую математическую

культуру, необходимую для описания "Архитектуры физики", но по сравнению с Вашей книгой это был труд дилетанта.

Желаю Вам всего наилучшего.

Искренне Ваш Юрий Иванович

Письмо 2. 28 сентября 2003

Дорогой Юрий Иванович!

Кстати, у меня возникла еще одна мысль по поводу математической структуры, соответствующей ускорению в Вашей теоретико-множественной интерпретации второго закона Ньютона. Ускорение обеспечивает связь между множеством масс и множеством сил. Математическая структура, устанавливающая какой-либо тип связи между элементами (не обязательно, любыми двумя) двух множеств произвольной природы, называется *соответствием*. Это чрезвычайно общее понятие, за которым стоит своя теория. В частности, запись maF в зависимости от природы входящих в нее величин может означать, что объект m переводится с помощью преобразования a в объект F (a есть оператор); число m меньше числа F (a есть отношение $<$), вероятность появления m благоприятных событий из F возможных событий равна a (a есть вероятность), расстояние между точками m и F есть a (a есть метрика), a есть ускорение, которое приобретает тело массой m , если на него подействовать силой F . Сама по себе интерпретация ускорения как соответствия ничего особого не дает, но как-то приятнее называть вещи своими именами.

С уважением,

Семен.

Письмо 2. 29 сентября 2003

Дорогой Семён!

Ваша книга - это как раз то, что я долго искал и не мог найти в обширной литературе по математике - краткое, на высоком профессиональном уровне, описание строения математики как единого целого. Бурбаки лишь обозначили контуры единого здания математики, а Вы, как архитектор, предложили законченный План творения всего здания математики.

Для меня это очень важно, так как я считаю, что

1. Мир как единое целое построен по Единому Плану.
2. Этот План предшествует Большому взрыву и состоит из трех не сводимых друг к другу пакетов программ, существующих тем не менее "неслиянно и нераздельно".
3. Первый пакет программ - "Пакет законов" состоит из **сакральной математики** (из математических категорий и математических структур), **сакральной физики** (из физических структур, лежащих в основании вечных и неизменных законов физики и геометрии), **сакральной синергетики** (из математических структур, лежащих в основании "самоорганизации материи", диссипации и эволюции Мира от простого к сложному) и, наконец, из **сакральных законов творения** "из ничего" ("в начале было Слово ...") вещества в виде элементарных частиц, атомов, молекул, биополимеров, газообразных, жидких и твёрдых тел.

4. Второй пакет программ - "Пакет жизни" содержит в себе единый для всех живых организмов **генетический код** и **нотогенетическую программу** в духе Берга и Мейена.

5. Третий пакет программ - "Пакет человеческого языка" содержит в себе **сакральную аналитическую программу** антропного языка.

6. Конечная цель Плана Творения - человек, как свободная творческая личность. ("И создал Бог человека по образу и подобию Своему", то есть человек - есть образ Бога, а Бог - есть прообраз человека.)

6. Большой взрыв - это начало воплощения (реализации) сакрального Плана Творения.

Искренне Ваш Юрий Иванович

Письмо 3. 30 сентября 2003

Дорогой Юрий Иванович!

Спасибо за присланный материал. Прежде всего, отвечаю на Ваши вопросы.

Учеба и научный путь. Я окончил Казахский государственный университет (Алма-Ата) по специальности "*прикладная математика*". С самого начала я был предоставлен сам себе со всеми вытекающими отсюда плюсами и минусами. Основа моего математического образования – чтение литературы по мере необходимости решения той или иной задачи и поиска ответов на замечания рецензентов на мои далеко не идеальные статьи. Начинал я с прикладных задач моделирования и управления. Затем появилось желание разобраться в математической теории оптимального управления – аппарате решения тех прикладных задач. Моей первой путеводной звездой были великолепные книги французского математика Лионса по оптимальному управлению и уравнениям с частными производными. В итоге появилась кандидатская диссертация (1983 г.) по специальности "*дифференциальные уравнения*". Мой дальнейший дрейф в чистую математику проходил через уравнения с частными производными в направлении нелинейного функционального анализа. На этом этапе наибольшее влияние на меня оказали книги Бурбаки (прежде всего, Общая топология). В 1994 г. я защитил докторскую диссертацию, посвященную проблемам линеаризации бесконечномерных систем и неразрывно связанной с ней общей теорией дифференцирования с приложением к оптимальному управлению для систем, описываемых нелинейными уравнениями с частными производными. В попытке найти более универсальный метод линеаризации я обратился затем к теории обобщенных функций, где дифференцирование проблемы не составляет. Несколько лет я потратил на обоснование предельных переходов при исследовании нелинейных дифференциальных уравнений со слабыми априорными оценками. Здесь я зашел в тупик, но получил совершенно другой результат, к которому и не стремился вовсе. Как будто, удалось обосновать процедуру перехода к пределу при выводе самих уравнений математической физики, на что, как мне кажется, народ внимания не обращал. Возможно, этот результат Вас заинтересует (всё-таки близко к физике), я могу прислать соответствующую статью. Любопытно, что здесь решающую роль сыграла аналогия с теорией действительных чисел в интерпретации Кантора. В результате я вооружился чрезвычайно мощным аппаратом теории равномерных структур, с которым вновь готовлюсь штурмовать общую теорию линеаризации бесконечномерных систем, постепенно оттачивая аппарат на исследовании

"нехороших" оптимизационных задач. Я никогда не принадлежал ни к какой научной школе и до сих пор не очень вписываюсь в устоявшиеся математические направления, хотя в широком смысле мне близка линия Гильберт – Бурбаки – Лионс. Надеюсь, что мои главные результаты еще впереди.

Кое что о моих идейных связях с Бурбаки. Сам термин *"Архитектура математики"* – от них (зачем изобретать то, что уже есть). Их влияние на меня велико – как прямое, так и косвенное (через Лионса, который, несомненно, был их учеником). Однако моя концепция несколько иная. В их программной статье с тем же названием математика ассоциируется с городом, что, как мне кажется, не совсем верно. Город не обязательно строится (и, как правило, не строится) по единому плану. Он может включать самостоятельные объекты, практически не связанные между собой. Другое дело – здание, непременно базирующееся на едином фундаменте и располагающееся под одной крышей. Собственно, и у них присутствует объединяющее начало – теория структур (я ее тоже использую, хотя мне больше по вкусу менее общая, но более гибкая теория категорий), что явно ближе к зданию, чем к городу... И, наконец, самое главное. Они шли под флагом Гильберта, мечтая дать полное и строгое изложение всей (по возможности) математики. Не удивительно, что их грандиозный план так и остался не завершенным. Я ставил перед собой существенно более скромную задачу – дать набросок логического строения математики. По моей книге (в отличие от Бурбаки) нельзя изучать математику, ее разделы. Она не отличается ни строгостью, ни глубиной (я намеренно отказался от теорем, без которых немислим серьезный математический труд). Это лишь ориентир для человека, желающего получить представление о математике в целом, как-то упорядочить свои знания, нащупать имеющиеся пробелы в математическом образовании.

Теперь некоторые размышления по поводу главы из Вашей книги.

1. Отношения и соответствия. С математической точки зрения (которая Вам здесь, возможно, и не нужна), описываемые Вами структуры являются соответствиями, но не всегда отношениями. Математически отношение предполагает связь между однотипными объектами (элементами одного и того же множества), а соответствия – между произвольными объектами (элементами, вообще говоря, разных множеств). Для меня не очевидна также принципиальная разница между классами отношений. Связь между объектами первого типа математически может быть выражена не обязательно числом, но и вектором, функцией, оператором и т.д. Но и отношения второго класса также могут быть выражены количественно или качественно объектами какого-либо множества. Всюду, где есть причинно-следственная связь (а где ее нет?), есть и отношения эту связь выражающие (в худшем случае можно воспользоваться статистическими методами или теорией нечетких множеств Л. Заде). Так в чем же разница?

2. Определение корта через множества. Корт (кортеж или попросту вектор) выражается через множества вполне естественно. Так, в двумерном случае пара (x, y) служит сокращенной формой записи множества $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, элементами которого являются множества $\{x\}$ и $\{x, y\}$. Здесь четко указано, что рассматриваемый объект включает в себя исключительно элементы x и y , хотя они не равноправны (один элемент выделен). Аналогично, тройка (x, y, z) определяется посредством множества $\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$ и т.д.

3. Вид холотропно-инвариантного тождества. Здесь у меня возникло несколько вопросов. Почему соотношение имеет именно такой вид? Откуда естественным образом берутся ранги? На первый взгляд, должна быть связь между соответствующими множествами в целом, а не между какими-то наборами элементов (фиксированной размерности) этих множеств. Меня немного смущает также наличие в этом соотношении нуля, что сразу ограничивает общность структур. Даже если мы будем трактовать 0 как нулевой вектор или нулевой элемент аддитивной группы, линейного пространства или

кольца, всё равно мы ограничиваем себя использованием алгебраических структур (кстати, далее говорится о появлении линейных структур, но сами по себе они возникнуть не могут, если только они не заложены в постановку задачи изначально). Жесткую привязку к алгебраическим структурам можно избежать, если, например, записать закон, выражающий связь множеств X и Y произвольной природы в виде

$$\Phi(\varphi(x_1, y_1), \dots, \varphi(x_m, y_m)) = \Phi(\varphi(x_1, (Py)_1), \dots, \varphi(x_m, (Py)_m)) \quad \forall x_1, \dots, x_m \in X; y_1, \dots, y_m \in Y; \forall P \in \Pi^m; \forall m \in \mathbb{N},$$

где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, Π^m – множество перестановок вектора m -ого порядка. Суть этого соотношения означает, что какое бы число m мы не взяли, какие бы m элементов каждого из множеств не выбрали, как бы не группировали в пары выбранные элементы, закон, характеризующий связь между множествами, остается неизменным. Кстати, приведенные Вами примеры (законы Ньютона, Ома и др.) и представленные решения укладываются в приведенное соотношение. Важно, что природа рассматриваемых множеств и характер связи между ними заранее не оговаривается. Асимметричность ранга (s, r) вместо единого m , в принципе не исключается, поскольку в приведенном соотношении не говорится о том, что все выбранные элементы множеств различны.

4. Множество решений функционального уравнения. Будучи профессиональным математиком, я не могу принять на веру какие-либо не очевидные математические утверждения, приведенные без доказательства (Вы уж меня простите). В частности, у меня вызвало определенные сомнения утверждение о наличии только двух решений уравнения в двумерном случае, тем более что здесь говорится "с точностью до несущественных переобозначений", но не уточняется, что под этим понимается и из какого класса объектов выбирается решение.

Стандартный путь поиска решений в условиях их возможной неединственности состоит в отыскании преобразования, обеспечивающего переход от одних решений к другим, благо отправная точка (Ваши решения) уже есть. В частности, отталкиваясь от Вашего аддитивного решения и выбирая произвольную обратимую функцию (биекцию) одной переменной f , мы получим новое решение по формуле

$$\varphi(\xi, x) = f(\xi + x), \quad \Phi(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) = g(u_{11}) + g(u_{22}) - g(u_{12}) - g(u_{21}),$$

где g есть функция, обратная к f . Собственно, в математике сплошь и рядом принято искать объекты с точностью до изоморфизма (взаимнооднозначного преобразования, сохраняющего весь набор необходимых для данной предметной области свойств). В данном случае функция f как раз и является подобным изоморфизмом. Правда, возникает другой вопрос: можем ли мы в этих условиях считать независимыми аддитивное и мультипликативное решения, коль скоро они различаются по форме исключительно операциями, которые преобразуются друг в друга путем стандартного преобразования (экспонента – логарифм)?

Вслед за этим возникло желание поискать решения, которые не получались бы из аддитивного решения путем биекции. Такое решение нашлось:

$$\varphi(\xi, x) = \max\{\xi, x\}, \quad \Phi(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}) = \max\{u_{11}, u_{22}\} - \max\{u_{12}, u_{21}\},$$

Фактически форма решения осталась той же, что и у Вас, но с заменой сложения или умножения на взятие максимума (минимум тоже годится). Если же решение искать из класса непрерывно дифференцируемых функций, то такое решение можно забраковать (максимум непрерывен, но не дифференцируем). Однако вместо максимума можно взять любую коммутативную ассоциативную операцию (к таковым как раз относятся сложение, умножение, максимум и минимум). Более того, даже эти ограничения можно ослабить, используя некоторую операцию $*$, удовлетворяющую весьма не стандартному для алгебры соотношению

$$(\xi * x) * (\eta * y) = (\xi * y) * (\eta * x) \forall \xi, \eta, x, y.$$

Этому условию удовлетворяет, например, некоммутативная (зато гладкая) операция, характеризуемая равенством $\xi * x = \xi$ (ей соответствует алгебраическая структура, называемая полугруппой с правой единицей). Есть подозрение, что задача может иметь и другие решения, причем не обязательно определяемые бинарными операциями. В свете всего этого мне хотелось бы уточнить класс допустимых функций: нужны ли непрерывность, гладкость, алгебраическая структура (решение, не сводящееся к бинарным операциям, мне с ходу обнаружить не удалось, но глубоко я и не копал)? Какие различия между двумя решениями могут признаны не существенными и почему? С помощью задания класса допустимых решений мы можем отбросить часть решений (например, максимум – как не гладкое или последнее – как не симметричное). Вводя эквивалентность на множестве решений, мы можем провести факторизацию (считать все не существенно различающиеся решения за один и тот же объект) и радикально снизить степень неединственности решения задачи. Однако и в этом случае для меня не очевидно, что мы сумеем добиться единственности (уж очень общая постановка задачи), хотя, возможно я в чем-то и ошибаюсь.

Вот, пожалуй, и все мысли, которые возникли у меня от беглого знакомства с Вашими материалами.

С уважением,

Семен

3 октября 2003 г

Дорогой Семён!

Теперь отвечаю по-существу:

1. Аффинная геометрия и "хвосты"

Полученный при решении сакрального уравнения **репрезентатор** является числовой функцией **двух** нечисловых переменных (подобно скалярному произведению **двух** векторов или расстоянию между **двумя** точками) и не является аффинным преобразованием

2. Структура с одной бинарной операцией и семейством унарных операций.

Здесь речь идёт о том, что открыта сложная структура хорошо всем известной бинарной операции - сложения. Оказывается, что сложение представляет суперпозицию одной уже известной бинарной операции - умножения и одной унарной операции. Доказывается, что любое множество, на котором существует решение сакрального уравнения в Теории физических структур, должно обладать алгебраической структурой с единственной бинарной операцией -- умножением и с неограниченным числом унарных операций. Таким образом, все известные алгебраические структуры (группы, кольца, тела и т.п.) удовлетворяют этому требованию.

3. Сводимость отношений третьего порядка к бинарным отношениям.

Действительно, работы Арнольда не имеют никакого отношения к теории физических структур.

4. Об уникальности постановки задачи и её решения в Теории физических структур.

Моё убеждение в уникальности Теории физических структур основано на том, что если кому-либо из математиков удалось бы сформулировать подобную структуру и решить возникающее при этом необычное функциональное уравнение, то этот результат не остался бы незамеченным. В нашем случае это стало возможным благодаря тому, что эта новая математическая структура, возникла в той области физики (в области физической герменевтики), которой никто в мире не занимается. В результате физики считают, что это -- какая-то заумная математика, а математики ушли так далеко вперед, что разучились понимать работы написанные на давно забытом языке классического анализа (Смотри вложение 1)

Ну, вот пока всё. Хотя остался очень важный для меня вопрос. Как Вы понимаете, что такое математическая структура и математическая категория и почему Вы считаете, что категория является менее общим понятием, чем структура? Я, например, считаю как раз наоборот.

С глубоким уважением. Искренне Ваш Юрий Иванович

Письмо 4. 6 октября 2003

Дорогой Юрий Иванович!

Большое Вам спасибо за присланные материалы. Кое-что до меня начало доходить, хотя еще далеко не всё.

Теперь кое-какие мысли в свете Вашего последнего письма.

1. Об аффинности и "хвостах"

Действительно, коль скоро репрезентатор является функционалом двух переменных, он никак не может быть аффинным преобразованием, которое по своей природе переводит элемент данного в элемент того же множества, являясь специфической унарной операцией. Однако насколько я помню из Вашей лекции (к сожалению, в присланных Вами материалах этот сюжет отсутствует), речь шла о выражении, отличающемся от классического скалярного произведения лишь наличием этого самого хвоста. Скалярное произведение по определению билинейно, т.е. при фиксации любого из аргументов мы получаем линейное отображение свободного аргумента. В данном же случае фиксация любого из аргументов приводит к преобразованию, которое отличается от линейного наличием дополнительного члена, что как раз и характерно для аффинных преобразований. Однако есть одно обстоятельство, в силу которого мое предположение о наличии какой-то связи с аффинными преобразованиями, не соответствует действительности. Репрезентатор является функционалом, т.е. его значением будет число. Значением же аффинного преобразования является объект исходного класса. Тем самым этот вопрос можно считать закрытым. И всё-таки кое-какие "аффинные признаки" здесь, возможно, присутствуют. Аффинное преобразование обладает одним важным алгебраическим свойством – разность двух значений при его действии будет линейным оператором (хвосты сокращаются). Это свойство, видимо, сохраняется и в данном случае при фиксации одного из аргументов репрезентатора. Маловероятно, что отсюда можно получить какие-нибудь мало-мальски серьезные выводы. В принципе, я не исключаю, что какая-то теория функционалов на линейном пространстве, отличающихся от билинейных наличием "хвоста", имеется, но мне на этот счет ничего не известно.

2. О природе операции сложения

Этот вопрос для меня пока остается открытым, хотя ситуация может проясниться при более серьезном знакомстве с сюжетом. Если речь идет о натуральных числах, то связь между операциями сложения и умножения естественна и не требует наличия дополнительной унарной операции. Более общие числовые классы по определению

сводятся к натуральным числам. Если же речь идет о произвольном кольце, то там две операции считаются независимыми, и требуется лишь их согласованность между собой условиями дистрибутивности. Однако в любом случае понятию алгебраического объекта с одной бинарной операцией и бесконечным множеством унарных операций (название операций – не важно) отвечают группы с операторами, к числу которых относятся модули, наиболее известными представителями которых являются линейные пространства. Правда, весьма вероятно, что алгебраические свойства определенного Вами объекта будут отличаться от стандартных аксиом известных классов групп с операторами.

3. О работах Арнольда

Этот вопрос я бы также не спешил закрывать. На Вашей лекции возник вопрос о том, что будет, если рассматривать связь между элементами трех различных множеств. Насколько я понял (может быть, я ошибаюсь), качественно новые результаты здесь не получаются, поскольку возможное отношение третьего порядка может быть сведено к системе бинарных отношений, которые и описывается основной теорией. У Арнольда же речь идет о том, что любую непрерывную функцию трех переменных можно всегда представить в виде суперпозиции нескольких функций двух переменных. Уж очень похоже звучит! Является ли это формальным совпадением или за этим стоит глубокая связь, судить не берусь, поскольку мои представления об обоих сравниваемых результатах крайне поверхностны.

4. О постановке и решении основной задачи Теории физических структур

Я глубоко сомневаюсь в том, что кому-либо из математиков просто так пришло в голову решать непосредственно Ваше уравнение, подобно тому, как никто из них в прошлом не брался изначально (до физиков) за решение уравнений Максвелла, Навье – Стокса или Шрёдингера, весьма специфических по форме. Такие задачи могли возникнуть лишь в физике или другой предметной области. Математики сами рассматривают уравнения в предельно общей постановке либо специфические частные случаи (например, линейные уравнения), допускающие простые решения. Физика превращает ту или иную экзотическую нетривиальную математическую задачу в актуальную научную проблему, что и привлекает математиков. Однако появившаяся в физике задача, ранее непосредственно не исследованная математиками за ненадобностью, чаще всего укладывается в какой-то класс общих математических проблем. Конечно, для более глубокого анализа задачи (физики говорят: надо, математики отвечают: есть!) может потребоваться разработка новых математических методов, но исходный фундамент может уже существовать. Так, сами по себе уравнения Максвелла никто из математиков не решал до тех пор, пока они не появились в физике. Однако относятся они к классу линейных систем гиперболических уравнений первого порядка, что в определенной степени предопределило методы их математического анализа.

Я сильно сомневаюсь в том, что кто-либо из математиков ранее решал полученные Вами уравнения. Но стоит ли за этим новая математическая структура? Не является ли эта задача (речь не идет о ее физическом прототипе) специфической формой какой-то более общей математической проблемы, ассоциированной с каким-то более или менее известным классом математических объектов? Пока наличие действительно новой математической структуры (не новой математической задачи, а новой структуры) для меня не очевидно.

Что касается катастрофической рассогласованности физиков и математиков, то здесь я с Вами целиком и полностью согласен (как говорится – чума на оба дома), хотя не думаю, что математики так уж далеко ушли вперед. Кстати, однажды я непосредственно натолкнулся на такую ничейную землю. Несколько лет назад я занимался разработкой аппарата для обоснования предельных переходов для исследования нелинейных уравнения с весьма слабыми свойствами. Соответствующий аппарат я как будто

разработал. Однако итог оказался весьма не утешительным. Я действительно смог доказать существование их решения, но только с точностью до нуля некоторого специфического пространства. Более глубокий анализ показал, что этот нуль оказывается до безобразия широким множеством, что фактически сводило на нет содержательность полученного результата. Чтобы хоть как-то утешиться (на это дело у меня ушло несколько лет), я стал размышлять, а не сгодится ли этот аппарат для решения каких-то других задач, где также возникают проблемы с предельными переходами. Такое приложение обнаружилось в совершенно неожиданной области. Я много лет читал общий курс "*Уравнения математической физики*". Читал я его немного нестандартно, посвятив первые три – четыре лекции теме "Уравнения математической физики как математические модели явлений природы" (всё-таки я пришел в чистую математику от математики прикладной). У меня постоянно перед глазами стояла формальная схема вывода уравнений. В рассматриваемой области выделяем элементарный объем, составляем соответствующие балансные соотношения, переходим к пределу, когда объем сжимается в точку, и получаем желаемый результат. Возник вопрос: обоснован ли здесь предельный переход? Просмотрев изрядное количество книг, написанных как физиками, так и математиками, я так и не обнаружил внятного ответа. Говорится лишь: предположим, что соответствующая функция является достаточно гладкой. Однако за этим немедленно встает новый вопрос: откуда мы знаем, что данная функция является гладкой? Апеллировать к физике бессмысленно – предельный переход является чисто математической процедурой и должен быть обоснован математическими средствами. О какой же функции идет речь? О той самой, относительно которой мы получаем уравнение. Имея уравнение с краевыми условиями, мы можем строго показать, что при определенных ограничениях на параметры задачи решение обладает должной степенью гладкости. Но это мы сможем сделать лишь после того, как уравнение получено. Налицо порочный круг: для вывода уравнения нужно использовать априорные свойства его решения, а для установления этих свойств надо иметь само уравнения. Складывается впечатление, что на эту проблему не обратили внимания ни физики (обоснование предельных переходов – дело математиков), ни математики (вывод уравнений математической физики – дело физиков). Мне, похоже, удалось решить эту проблему на основе того самого аппарата. На всякий случай (вдруг Вас заинтересует), я прилагаю статью, где дается решение этой проблемы. Она опубликована в журнале Известия Национальной Академии Наук Республики Казахстан, серия физико-математическая. 2002, № 1, с. 44-51. Конечно, я предпочел бы опубликовать ее в более приличном издании. Однако российский журнал, куда я ее направил (там у меня до этого за все годы было опубликовано десятка полтора статей), в публикации мне отказал, продержав работу года два. Мотивировка такая: статья носит полуматематический, полуфизический, полуфилософский характер, а потому не может быть опубликована в математическом журнале. На мой дополнительный вопрос, что они думают о конкретной математической проблеме и приведенном способе их решения (математически корректно ли поставлена задача, известно ли ее решение кем-то другим, достоверен ли полученный мною результат), ответа я так и не получил. Поскольку к тому времени я уже занимался другими проблемами, я попросту переправил статью в местный журнал, где публикуют всё, что угодно. Так вот мне довелось однажды побывать на стыке между физикой и математикой...

О математических структурах и категориях

В принципе, в математической и околomатематической литературе под этими понятиями понимают весьма различные вещи. Однако существуют две чрезвычайно мощные математические теории, которые так и называются.

Теория структур является стержнем работ Бурбаки и детально описана у них в первом томе (теория множеств). Грубо говоря, в ее основе в каждом конкретном случае лежит пара (X, σ) , где X есть некоторое множество (носитель структуры), а σ - собственно,

структура, представляющая собой совокупность некоторых специфических свойств, выполняемых на этом множестве. Так, если σ выражает бинарное отношение порядка, то мы получим упорядоченную структуру; если σ есть набор операций, то получается та или иная алгебраическая структура; если σ характеризует семейство окрестностей, то получится топологическая структура; если σ выражает расстояние между объектами, то мы имеем дело с метрической структурой; если σ дает способ оценки "размеров" подмножеств носителя, то речь идет об измеримой структуре и т.д. Главная заслуга Бурбаки состоит в том, что они указали набор стандартных теоретико-структурных процедур и конструкций, единых для любого типа структур. В этой связи многие понятия столь разных математических дисциплин, как алгебра, топология и теория меры, оказываются формами проявления одних и тех же теоретико-структурных понятий для конкретных типов структур.

Теория категорий появилась в сороковые годы 20 века (работы Эйленберга и Маклейна), т.е. практически в то же время, что и теория структур. Возникла она в связи с попыткой наведения мостов между двумя мощнейшими математическими дисциплинами – алгеброй и топологией. Однако постепенно выяснился ее общематематический смысл. Категория включает в себя два класса понятий – объектов и морфизмов, связанных специфическим (но вполне логичным) набором аксиом. В приложениях, как правило, объектами категории оказываются различные множества, наделенные одной и той же структурой (в смысле теории структур), а морфизмами – преобразования этих множеств, сохраняющие определяющие свойства данной структуры. Так, объектами категорий упорядоченных множеств, линейных пространств и топологических пространств служат, соответственно, всевозможные упорядоченные множества, линейные и топологические пространства, а морфизмами – соответственно, монотонные, линейные и непрерывные операторы. В определенном смысле теория категорий восходит к Эрлангенской программе Клейна, в которой впервые был поставлен вопрос о сводимости всевозможных геометрий к соответствующим группам преобразований. Правда, в теории категорий объекты и морфизмы выступают на равных правах, а дело не ограничивается геометрией (тип структуры не важен). Понятие структуры, вообще говоря, представляется более общим, поскольку в его определении рассматривает лишь один класс объектов, в то время как категория предполагает наличие двух независимых, хотя и согласованных между собой классов. В теории структур морфизмы присутствуют, но как вторичные понятия. Аксиоматика теории структур более бедная, а следовательно, более общая. Однако говорить о полном вложении теории категорий в теорию структур нельзя. Дело в том, что под определение категории подпадают не только так называемые структуризованные множества, но и некоторые объекты, не имеющие отношения к структурам. Это можно рассматривать как форму проявления одной из наиболее специфических утверждений в основаниях математики – теоремы Левенгейма – Сколема, согласно которой, грубо говоря, если строится какая-либо содержательная математическая теория, предназначенная для описания некоторого заранее фиксированного класса объектов, то непременно найдется объект, лежащий вне этого класса, но подпадающий под эту теорию. Говорить о том, что теория структур более общая (и более бедная!), чем теория категорий, имеет определенный смысл, поскольку практически важные категории связаны всё-таки с множествами, наделенными структурами. Преимущество теории категорий состоит в том, что она позволяет устанавливать межкатегориальные связи, т.е. предоставляет возможность перехода от одной категории к другой с помощью функторов. В значительной степени за счет этого в настоящее время теория категорий, как мне кажется, пользуется существенно большей популярностью, чем собственно структуры Бурбаки. На мой взгляд, если вершиной анализа в математике является теория множеств, то вершиной синтеза будет именно теория категорий.

Вопросам структур и категорий посвящены этажи 6 и 7 моей книги. Честно говоря, изложенный там материал меня не очень удовлетворяет. В новом варианте я предполагаю

объединить эти два этажа в один (унификации), и существенно доработать сюжет. Это, пожалуй, главное, что мне нужно сделать для подготовки второго издания книги.

Вот, пожалуй, и всё на этот раз.

С уважением, Семен

10.10.3

Дорогой Семён!

Попытайтесь найти общие решения следующих сакральных уравнений

$$f(x,y) = f(f(x,z), f(y,z))$$

$$f(x,y) = f(f(x,z), f(z,y))$$

где $f(x,y)$ -- целочисленная функция двух целочисленных переменных;

$f(x,y)$ -- рациональная функция двух рациональных переменных;

$f(x,y)$ -- вещественная функция двух вещественных переменных;

$f(x,y)$ -- комплексная функция двух комплексных переменных.

Искренне Ваш Юрий Иванович

Письмо 5. 11 октября 2003

Дорогой Юрий Иванович!

Сначала Ваше последнее письмо повергло меня в ужас. Решать уравнения – это не высказывать глубокомысленные умозаключения по тому или иному поводу, базирующиеся на старом багаже. К тому же уравнения в целых и рациональных числах – это диофантовы уравнения, чрезвычайно сложные и для меня практически не знакомые (их вообще относят к теории чисел). Да и в комплексном анализе я не столь уж силен. Однако, поразмыслив, я решил, что не так страшен черт, и что-то об этих уравнениях я сказать все же могу...

Классификация задачи. Прежде всего, стоит классифицировать задачу, то есть указать ее точное место в Здании Математики. Коль скоро речь идет о функциях двух переменных при совпадении области определения и области значений, то функции эти по своей природе являются бинарными операциями на том или ином числовом множестве (носителе алгебраической структуры). Коль скоро требуется получить результат для разных носителей (числовых классах), то речь должна идти о свойствах самих операций без относительно носителя. Тогда исследование данных уравнений надлежит вести средствами общей алгебры, а точнее, теории группоидов – множеств, на которых определена одна бинарная операция общего вида. Помимо всего прочего, на этом пути снимается один естественный вопрос: почему ограничивать себя выбором решений сакральных уравнений лишь на числовых множествах? В силу общности постановки задачи решение, видимо, может оказаться и объектом более общей природы – кватернионом или гиперкомплексным числом высшего ранга, вектором, матрицей, последовательностью, функцией, оператором и др.

Направление исследования. Можно попытаться дать описание как можно более общего класса бинарных операций (в терминах абстрактной алгебры), удовлетворяющих необходимым свойствам. Затем можно искать уже известные операции с выявленным набором свойств на заданных числовых классах. Привожу предварительные результаты, которые удалось получить с ходу.

$$\text{Уравнение (1): } f(x,y) = f(f(x,z), f(y,z))$$

Теорема 1. Для любой группы $(X, \otimes)$ функция $f(x,y) = x \otimes y'$, где "и́трих" обозначает взятие обратного элемента, является решением уравнения (1).

Доказательство. Групповая структура характеризуется тремя определяющими свойствами (для любых элементов x, y, z): ассоциативность (A): $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$; существование единицы e (E): $x \otimes e = e \otimes x = x$; существование обратного элемента x' (I): $x \otimes x' = x' \otimes x = e$. Тогда для всех $y \in X$ в силу I имеем $y' \otimes y = e$. Оперируя левую и правую часть этого равенства с элементом z' с произвольным $z \in X$, получаем $(y' \otimes y) \otimes z' = e \otimes z' = z'$ в силу E. Оперируя произвольным элементом $x \in X$ с левой и правой частями последнего равенства, имеем $x \otimes (y' \otimes y) \otimes z' = x \otimes z'$. Отсюда в силу A следует $(x \otimes y') \otimes (y \otimes z') = x \otimes z'$. После операции на элемент $(y \otimes z')$ будем иметь $((x \otimes y') \otimes (y \otimes z')) \otimes (y \otimes z')' = (x \otimes z') \otimes (y \otimes z')'$, откуда в силу A следует $(x \otimes y') \otimes ((y \otimes z') \otimes (y \otimes z')') = (x \otimes z') \otimes (y \otimes z')'$. Пользуясь свойствами I и E, получаем $x \otimes y' = (x \otimes z') \otimes (y \otimes z')'$. Определив $f(x,y) = x \otimes y'$, установим справедливость уравнения (1). Теорема доказана.

Вывод 1. Каждая группа определяет на ее носителе решение первого сакрального уравнения.

Дальше надо брать конкретные группы на конкретных множествах и получать соответствующие решения.

Пример 1. *Аддитивные группы.* На любом из указанных числовых множеств операция сложения порождает группу. Тогда согласно теореме 1 определяем

$$f(x,y) = x \otimes y' = x + (-y) = x - y.$$

Действительно, справедливо условие $x - y = (x - z) - (y - z)$ для любого числового класса. Учитывая, что аддитивная групповая структура определена и на объектах более общей природы (гиперкомплексные числа, векторы, матрицы, последовательности, функции с тем или иным набором свойств и др.), мы получаем "аддитивные" решения сакрального уравнения на любом множестве, допускающим аддитивную группу.

Пример 2. *Мультипликативные группы.* На всех указанных числовых классах (кроме множества целых чисел) операция умножения образует группу при условии исключения из рассмотрения нуля. Согласно теореме 1 полагаем $f(x,y) = x \otimes y' = x/y$. Очевидно, справедливо равенство $x/y = (x/z)/(y/z)$ для ненулевых рациональных, действительных или комплексных чисел. Аналогичным образом определяются "мультипликативные" решения на других множествах, допускающих мультипликативную группу (например, на множестве невырожденных матриц).

Пример 3. *Аддитивные группы со сдвигом.* Пусть имеется аддитивная группа на множестве X . Определим на нем новую операцию $\bullet$ с помощью равенства $x \bullet y = x + y - c$ (здесь c – произвольный элемент множества X). Ее ассоциативность очевидна. Тогда единичный элемент e определяется из равенства: $x \bullet e = x + e - c = x$, т.е. $e = c$. Обратный элемент x' определяем из условия: $e = c = x \bullet x' = x + x' - c$, т.е. $x' = 2c - x$. Таким образом, пара $(X, \bullet)$ образует группу. В соответствии с теоремой 1 определим $f(x,y) = x \bullet y' = x - y + 2c$. Тогда справедливы равенства $f(f(x,z), f(y,z)) = f(x - z + 2c, y - z + 2c) = (x - z + 2c) - (y - z + 2c) + 2c = x - y + 2c = f(x,y)$. Тем самым мы имеем новое решение (в силу произвольности c – бесконечный класс решений) на любом множестве, допускающем введение аддитивной группы (в частности, на любом из указанных числовых классов).

Пример 4. *Мультипликативные группы со сдвигом.* Пусть имеется мультипликативная группа на множестве X . Определим операцию $\bullet$ с помощью равенства $x \bullet y = xy/c$ (c – произвольный элемент из X). Очевидно, пара $(X, \bullet)$ образует группу, причем обратный элемент характеризуется равенством $x' = c^2/x$. Задавая $f(x, y) = x \bullet y' = xc^2/y$, установим $f(f(x, z), f(y, z)) = f(xc^2/z, yc^2/z) = (xc^2/z) c^2 (z/yc^2) = x c^2/y = f(x, y)$. Таким образом, строится новый класс решений сакрального уравнения (1) на любом множестве, допускающем мультипликативную группу (например, ненулевые рациональные, действительные и комплексные числа или те же невырожденные матрицы).

Заключительный вывод. Даже в теории конечных групп (групп на конечном множестве), насколько мне известно, не существует формула, позволяющая описать все групповые операции на данном носителе. Тем более едва ли можно надеяться на возможность получения общего вида групповой операции на бесконечных множествах (числовых классах). Однако если как следует покопаться в теории групп (чего я не делал), то наверняка можно будет привести их многочисленные примеры, которые в силу теоремы 1 будут давать новые решения уравнения (1). Отметим также, что нет никаких оснований полагать, что все решения определяются указанным способом. Возможно, какие-то решения характеризуются не группами, а группоидами общего вида. Проблема полного описания уравнения (1) остается открытой. Но и с полным описанием решений старого уравнения, как мне кажется, не всё так просто (я об этом писал раньше).

Уравнение (2): $f(x, y) = f(f(x, z), f(z, y))$

Теорема 2. *Для любого периодического моноида $(X, \otimes)$ с периодом 2 функция $f(x, y) = x \otimes y$ является решением уравнения (2). Если же $(X, \otimes)$ – группа, то, если указанная функция удовлетворяет уравнению (2), то группа должна быть периодической с периодом 2.*

Доказательство. Моноид характеризуется свойствами ассоциативности (А) и существованием единицы (Е). Периодичность с периодом два означает выполнение условия (Т₂) $z \otimes z = e$ для любого элемента z . Тогда, пользуясь свойствами Е и Т₂ для любого элемента x имеем $x = x \otimes e = x \otimes (z \otimes z)$. В результате операции с произвольным элементом $y \in X$ получаем $x \otimes y = (x \otimes (z \otimes z)) \otimes y = (x \otimes z) \otimes (z \otimes y)$ в силу А. Определив функцию $f(x, y) = x \otimes y$, приходим к уравнению (2). Если же $(X, \otimes)$ – группа, а указанная функция удовлетворяет уравнению (2), то выполнено соотношение $x \otimes y = (x \otimes z) \otimes (z \otimes y)$. Пользуясь свойством А, приходим к равенству $x \otimes y = x \otimes (z \otimes z) \otimes y$. Оперировав левую и правую часть последнего равенства слева с x' и справа – с y' , получаем в силу Е и А $(x' \otimes x) \otimes (y \otimes y') = (x' \otimes x) \otimes (z \otimes z) \otimes (y \otimes y')$. Отсюда согласно с I следует равенство $e = z \otimes z$, т.е. выполнено условие периодичности с периодом 2. Теорема доказана.

Итог. Хотя теорема 2 описывает алгебраические структуры общего вида, дающие решения уравнения (2), подобрать содержательные примеры под этот результат не так уж просто. Без труда можно привести примеры конечных групп или моноидов с соответствующим свойством периодичности. Простейшие примеры: группа с одним элементом e и тривиальной операцией $e \otimes e = e$ или группа с двумя элементами и значением $a \otimes b$ равным a при $a=b$ и равным b в противном случае. Естественно, имеются алгебраические объекты с требуемым набором свойств и для множеств с большим количеством элементов. Это наводит на мысль о том, что и на бесконечных множествах (в частности, на числовых классах) обязаны существовать такие операции, а значит, и решения уравнения (2). Однако примеры таких решений для числовых классов я пока привести не могу. Уж очень специфический характер носит условие периодичности. Классические операции на бесконечных числовых множествах этому требованию не удовлетворяют, хотя они должны существовать. Так или иначе, уравнение (2) представляется более сложным, чем (1).

Вот к таким предварительным итогам я пришел. Возможно, что-нибудь удастся придумать еще. Не знаю, имеют ли смысл для Вас эти результаты. Не сомневаюсь, что профессиональный алгебраист получил бы что-нибудь лучшее. К сожалению, в наших краях серьезные специалисты по теории групп, насколько мне известно, отсутствуют.

До свидания, Семен

12.10.3

Дорогой Семён!

Я в восторге от Вашего анализа предложенных мной двух сакральных функциональных уравнений.

Условимся называть функциональное уравнение относительно **одной** неизвестной функции **сакральным уравнением первого рода** и аналогично будем называть функциональное уравнение относительно **двух** неизвестных функций **сакральным уравнением второго рода**, если они не содержат никаких операций кроме операции подстановки.

Простейший пример сакрального уравнения первого рода

$$f(x,y)=f(f(x,z), f(y,z))$$

Простейший пример сакрального уравнения второго рода

$$G\{g(x,a), g(x,b), g(y,a), g(y,b)\}=0$$

Попробуйте проанализировать это уравнение так же, как это Вы сделали в предыдущем письме.

Вы чувствуете, что здесь открывается новая область, достаточно сложных и в то же самое время имеющих нетривиальные решения, задач?

Но самое главное, эти задачи имеют прямое отношение к Единому Плану Творения Мира.

Недаром я назвал эти уравнения "сакральными"!

Как жаль, что Вы живёте так далеко. Если бы Вы жили в Академгородке, мы сразу же организовали бы семинар с приглашением наших алгебраистов для изучения этой проблемы.

Спасибо за оперативный ответ. Искренне Ваш Ю.И.Кулаков

Письмо 6. 13 октября 2003

Дорогой Юрий Иванович!

Прежде чем браться за исследование сакрального уравнения второго рода

$$G(g(x,a), g(x,b), g(y,a), g(y,b))=0, \quad (1)$$

желательно получить некоторые уточнения.

Как я Вам уже писал раньше, степень общности этого уравнения снижена в виду наличия нуля. Этим сразу предопределяется область значений функции G. Кроме того, для применения абстрактного алгебраического подхода требуется совпадение областей

определения и значений всех рассматриваемых функций (иначе это не будут операции). Мы уже не можем, как в предшествующем случае ставить задачу определения двух отображений $g : X^2 \rightarrow X$, $G : X^4 \rightarrow X$ (операций второго и четвертого порядков) в общем виде, поскольку в этом случае 0 понимался бы как элемент носителя структуры X . Однако смысл нуля для операции четвертого порядка далеко не очевиден. Так или иначе, требуется уточнить области определения и значений указанных функций и статус нуля.

Немалое количество проблем снимаются, если функцию G сразу искать в виде:

$$G(a,b,c,d) = H(a,b) - H(c,d). \quad (*)$$

В результате получается уравнение

$$H(g(x,a),g(x,b)) = H(g(y,a),g(y,b)), \quad (2)$$

связывающее лишь функции двух переменных (бинарные операции!) и не содержащее нуля. Эта задача, в принципе, может быть решена в рамках абстрактного алгебраического подхода. После этого формула (*) даст решение исходного уравнения, по крайней мере, на числовых классах. Для общих множеств надо будет еще как-то интерпретировать вычитание. Насколько я помню, Ваши решения укладывались в представление (*).

Итак, есть два варианта поведения. Я могу попытаться сначала рассмотреть уравнение (2) в рамках абстрактной алгебры, а потом с помощью представления (*) получить информацию о решениях уравнения (1). В противном случае я сразу берусь за уравнение (1) после уточнения постановки задачи. Первый путь явно проще и надежнее, но здесь мы получим лишь те значения функции G , которые представимы в форме (*). С другой стороны, класс объектов, на которых решается уравнение (2), шире, поскольку нет нужды интерпретировать ноль. Как лучше?

С уважением,

Семен

14.10.3

Дорогой Семён!

Я восхищён Вашей способностью быстро докапываться до сути дела. Теперь настало время подключить к нашей переписке моего аспиранта Андрея Симонова. Для начала стоит послать ему Письмо 6. При этом каждый раз копию посылайте мне.

Искренне Ваш Ю.И.Кулаков

Письмо 7. 15 октября 2003

Дорогой Юрий Иванович!

Вообще-то, я хотел дождаться ответа от Андрея. Но шутки ради решил провести предварительные исследования. Как не странно, сразу же легко удалось получить один результат.

Теорема. Пусть $(X,*)$ есть абелева группа, где x' – элемент, обратный к x , а 0 – нуль группы. Тогда функции

$$g(x,a) = A(x) * B(a), \quad G(a,b,c,d) = a * b' * c' * d,$$

с произвольными унитарными операциями A и B на X будут удовлетворять уравнению

$$G(g(x,a),g(x,b),g(y,a),g(y,b)) = 0.$$

Доказательство. Найдём значение

$$\begin{aligned} G(g(x,a),g(x,b),g(y,a),g(y,b)) &= g(x,a) * g(x,b)' * g(y,a)' * g(y,b) = \\ &= [A(x) * B(a)] * [A(x) * B(b)]' * [A(y) * B(a)]' * [A(y) * B(b)] . \end{aligned}$$

Учитывая равенство $(a*b)' = b'*a'$, а также свойства ассоциативности и

коммутативности (группа – абелева!), имеем

$$\begin{aligned} G(g(x,a),g(x,b),g(y,a),g(y,b)) &= [A(x) * B(a)] * [B(b)' * A(x)'] * [B(a)' * A(y)'] * [A(y) * B(b)] = \\ &= A(x) * B(a) * B(b)' * A(x)' * B(a)' * A(y)' * A(y) * B(b) = \\ &= [A(x) * A(x)'] * [B(a) * B(a)'] * [B(b)' * B(b)] * [A(y)' * A(y)] = 0*0*0*0 = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пример 1. Аддитивная группа $(X,+)$ на любом числовом классе. Тогда решение уравнения определяется по формулам

$$g(x,a) = A(x) + B(a), \quad G(a,b,c,d) = a-b-c+d,$$

где A и B - произвольные функции.

Пример 2. Мультипликативная группа $(X,\times)$ на множестве ненулевых рациональных, действительных или комплексных чисел. Решение определяется по формулам

$$g(x,a) = A(x) \times B(a), \quad G(a,b,c,d) = (a \times d) / (b \times c),$$

где A и B произвольные функции, не обращающиеся в нуль.

Естественно, аддитивные группы определены и для векторов, матриц, последовательностей, функций и др., а мультипликативные – на множестве невырожденных матриц, обратимых преобразований и др.

Понятно, есть все основания полагать, что уравнение имеет и другие решения.

Кстати, меня заинтересовало, как можно классифицировать данные уравнения. Проблематика общей алгебры (центрального раздела алгебры) предполагает задание на некотором множестве семейства конкретных операций и выявление свойств полученного алгебраического объекта. Здесь ситуация прямо противоположная: дано некоторое свойство (сакральное уравнение) и требуется отыскать операции, обладающие этим свойством. Здесь проглядывается некоторая аналогия с теорией обратных задач. Прямые задачи математической физики предполагают нахождение состояния системы по известным значениям ее параметров. Обратные задачи математической физики (я немного работал в этом направлении) напротив состоят в восстановлении параметров системы при известной информации о ее состоянии. Используется также и другой термин – теория идентификации систем. Я бы назвал данное направление – обратными задачами общей алгебры. Правда, я далеко не алгебраист (к сожалению, в наших краях хороших алгебраистов нет, но в Новосибирске есть наверняка!). Весьма вероятно, что это называется как-то по-другому, и кто-то в этой области работает.

С уважением,
Семён

Дорогой Семён!

Я очень рад, что наконец-то нашёлся высококвалифицированный математик, который взглянул с позиций современной математики на проблемы, возникающие в рамках сакральной физики или иначе, в рамках физической герменевтики.

Последняя теорема для физической структуры ранга (2,2) проста и красива и доказывается прямой подстановкой угаданного решения. Следующий шаг -- угадать решение в случае физической структуры ранга (2,3) . Андрей занимается доказательством **существования и единственности решений. Но об этом он лучше всего расскажет сам.**

Ещё раз большое спасибо за оперативность и желание принимать участие в обсуждении сакральных проблем. Искренне Ваш Ю.И.

Р. С. Нумерация Ваших писем существенно облегчает хранение их в бумажном варианте

16.10.3

Дорогой Семён!

Обращаю Ваше внимание на серьёзную статью Владимира Кузьмича Ионина о физической структуре ранга (2,2) "К определению физических структур", в которой предлагается точное математическое определение физической структуры, которое уточняет и обобщает все предыдущие. Эта статья опубликована в Трудах института математики СОАН, том 21. Издательство "Наука", г. Новосибирск. 1992 год. Попробуйте найти этот том в вашей главной Научной библиотеке. У меня эта статья имеется в виде плохой машинописной рукописи. Но при желании можно прочесть.

Желаю успеха Ваш Юрий Иванович

Письмо 8. 18 октября 2003

Дорогой Юрий Иванович!

Прежде всего, большое Вам спасибо за фотографию.

Теперь, небольшой комментарий к той теореме, что я привел в прошлый раз. Результат этот выводится естественным образом, а не угадывается. Вместо уравнения

$$G(g(x,a),g(x,b),g(y,a),g(y,b)) = 0 \quad (1)$$

рассматривается уравнение

$$H(g(x,a),g(x,b)) = H(g(y,a),g(y,b)), \quad (2)$$

сводимое к нему с помощью преобразования

$$G(a,b,c,d) = H(a,b) - H(c,d). \quad (*)$$

Об этом я писал в позапрошлом письме. Уравнение (2) существенно проще (1), поскольку оперирует исключительно с функциями двух переменных. Его особенность состоит в том, левая и правая части имеют один и тот же вид и различаются только переменными x и y . Следовательно, $H(g(x,a),g(x,b))$ не должно зависеть от x . По определению H и g являются бинарными операциями. Проще всего обеспечить независимость $H(g(x,a),g(x,b))$ от x в том случае, если речь идет об одной и той же операции, только в H она обращена. Обратимость бинарной операции – это, как правило, существование обратного элемента. Отсюда – путь на группы. Величина x действительно сократится в том случае, если элементы операции можно менять местами (коммутативность) и перегруппировывать пары (ассоциативность). Отсюда – абелевы группы. Дальше – тривиальные выкладки.

Статью Ионина за 1992 г. я заказал, но пока не получил (работа с библиотекой у нас еще не вышла на должную скорость). Однако Андрей прислал мне более раннюю статью за 1990 г., с которой я ознакомился. Вот некоторые мысли на этот счет.

1. **Общие результаты.** Вполне естественно, что те рассуждения, которые я Вам приводил, были уже высказаны ранее. Выход на аппарат общей алгебры здесь достаточно очевиден (Ионину стоило лишь прямо назвать искомые отображения операциями). Не удивительно и то, что мое решение практически в точности совпало с его. В частности, благодаря Ионину я понял, что условие коммутативности группы у меня было излишним. Однако кое в чем я с ним и не совсем согласен.
2. **Вид преобразованного уравнения.** Ионин вместо уравнения (1), содержащее столь нелюбимый мною нуль, рассматривает уравнение

$$g(x,a) = \Gamma(g(x,b),g(y,a),g(y,b)). \quad (3)$$

Не отвечая за физическую сторону вопроса и руководствуясь исключительно эстетическими соображениями, соотношениям (1) – (3) я бы предпочел уравнение

$$H(g(x,a),g(y,b)) = H(g(x,b),g(y,a)). \quad (4)$$

Здесь, как и в условиях (2) и (3), отсутствует нуль из (1), явно чуждый элемент при описании связей между элементами произвольных множеств. В то же время в (4), как и в (1), но в отличие от (2), а, тем более, (3), все объекты оказываются равноправными. Мне кажется, формулируя фундаментальный закон связи, мы не должны отдавать предпочтение одним объектам по сравнению с другими. Уравнение (3) явно выделяет элементы x и a по сравнению с остальными, которые ничем их не хуже. То обстоятельство, что в левой части равенства присутствует одна связь, а в правой три, в правой части фигурирует функция Γ , отсутствующая в его левой части, выглядит как-то не эстетично. Известен принцип Кюри: симметрия в причине влечет за собой симметрию в следствии. Но его можно и обратить: отсутствие симметрии в причине (в постановке задачи) может вызвать отсутствие симметрии в его следствии (решении задачи). Я сильно подозреваю, что уравнение (3) имеет решения, в котором функции g и Γ оказываются не симметричными по отношению к своим аргументам. Уравнение (2), которым я пользовался изначально, симметрично. Но и в нем нет того равноправия объектов, которое присутствует в условиях (1) и (4). На мой взгляд, условие (4) выглядит привлекательнее. Да и с физических соображений оно едва ли столь плохо, поскольку результат не должен меняться после простого переобозначения объектов. Но всё это не столь уж важно - более серьезен следующий пункт.

3. **Условие максимальности.** В определении физической структуры у Ионина присутствует требование максимальности соответствующего множества преобразований (операций). Конечно, было бы неплохо, если бы он уточнил, что под этим подразумевается. По-видимому, речь идет обо всём множестве операций, которые обладают описанными свойствами. Если это не так, то я вообще не понимаю, что он имеет в виду. Но так это или не так – не важно. В теореме 1 дается критерий физической структуры, причем это утверждение приводится без доказательства: по словам автора, таковое является легким упражнением. Он, видимо, подразумевает, что, подставив найденное решение в уравнение, мы получим тождество. Это верно. Но откуда следует, что найденное множество операций максимально? Почему других операций не существует? Мало того, что этот результат совершенно не очевиден (какое уж тут легкое упражнение!), я сильно сомневаюсь, что этот результат верен. Почему, в частности, обе рассматриваемые операции должны быть одной природы? Я сам (а до меня Ионин) просто пошел по пути наименьшего сопротивления. Честно признаюсь, что даже не представляю, в принципе, как можно выделить всё множество решений задачи, хотя допускаю, что мог бы как-то усилить полученный результат. Странное впечатление вызывают и последующие рассуждения. Вводится понятие групповой физической структуры и обсуждается возможность существования негрупповых структур. Но ведь в определении говорится о максимальности множества преобразований! Физическую структуру по Ионину нельзя расширить (а иначе нет максимальной!). И уж если он даже доказал (чего нет на самом деле), что выделенный класс операторов является физической структурой в смысле приведенного определения, то и иных (не групповых) решений быть не может (а иначе какая же это максимальность). Возможно, конечно, что я неправильно понимаю условие максимальности. Но определения нет. И еще раз повторяю, даже если под максимальной понимается что-то другое, свойство это в теореме 1 надо обосновывать. На мой взгляд, в теореме 1 надо говорить лишь о выделении какого-то класса решений, что, конечно же, верно. Вводить же в определение физической структуры требование максимальной едва ли оправдано – если под этим подразумевается предельно широкое множество операций, то построение такого

объекта мне представляется совершенно не подъемной задачей. Возможно, я и ошибаюсь. Но профессиональный математик не может не быть учеником апостола Фомы: покуда не увижу, не поверю.

Кое-что о существовании и единственности решения вообще

В своё время Гильберт провозгласил: любая математическая задача имеет решение! Вся история математики иллюстрирует эту гениальную мысль. Если на каком-то этапе исследования встречалась неразрешимая задача, то, в конце концов, искусственно строился объект, который насильно заставляли быть решением этой задачи. Вот получил я зарплату, добавил к тому, что у меня было до этого, а в итоге оказалась сумма меньшая, чем полученная величина. Задача определения того, чем я обладал изначально, не разрешима на множестве натуральных чисел. Пришлось придумать отрицательные числа, и задача стала разрешимой. Вот захотелось разделить два яблока на трех человек, а не получалось. Были срочно выдуманы рациональные числа, и появилось решение. Переход от действительных чисел к комплексным, от непрерывных функций – к разрывным, от классических решений – к обобщенным и т.д. был обусловлен исключительно удовлетворением острого желания получать решение задачи, казавшейся изначально не разрешимой. В математике не принято говорить "задача имеет решение". Это тривиально. Где-нибудь да при каких-нибудь условиях решение всегда будет. Вопрос состоит в том, в каком конкретно смысле и при каких конкретно условиях ищется решение.

Не лучше обстоит дело и с понятием единственности решения хотя бы потому, что существование решения уравнения в данной категории эквивалентно единственности решения того же уравнения, но в двойственной категории. Естественно, единственность (разрешимой) задачи в естественной постановке является большим (зато приятным) исключением. Однако устранить неединственность можно либо путем сужения множества параметров задачи, либо за счет введения отношения эквивалентности на множестве возможных решений (факторизации). В частности, в рассмотренных примерах, единственности решений (полученных, а не всех вообще) можно добиться, если считать, что их все можно вывести из одного с помощью некоторого изоморфизма.

Выделение множества, на котором ставится задача, и описание условий, при которых задача решается, является неотъемлемой частью постановки задачи. Вот здесь-то у меня применительно к Вашим задачам пока еще нет полной ясности. Но надеюсь, что всё прояснится в процессе.

С уважением,
Семён

Письмо 9. 23 октября 2003

Дорогой Юрий Иванович!

Я бегло познакомился со статьей Ионина за 1992. Написана она достаточно солидно и впечатление производит. Я думаю, она могла бы еще выиграть, если бы автор сделал две вещи. Во-первых, стоило обсудить условия, при которых получается тот или иной результат. Ограничений этих временами доходит до десятка, причем совершенно не ясно, насколько они оправданы, согласованы между собой, и что будет, если хотя бы одно из них снять. Во-вторых, было бы не грех вернуться с небес на землю и пояснить, как всё это работает, если в качестве базового множества выбирается хотя бы множество действительных чисел. Будут ли выполнены хотя бы в этом случае все принятые многочисленные допущения? Как будут в этой ситуации выглядеть основные результаты (в частности, утверждение о единственности с точностью до изоморфизма)?

Вопрос о единственности решения (или выделении всего класса решений), как мне кажется, так или иначе, остается открытым. Ранее я Вам писал о возможности получения

решения уравнения с помощью операции взятия максимума (или минимума) или операции типа $x \bullet y = x$ для всех x . Они не образуют не только группу, но даже и квазигруппу (с которыми работает Ионин). Получение таких решений из уже известных с помощью какого-либо разумного изоморфизма, думаю, маловероятно.

Кстати, могу привести еще более общее решение уравнения

$$G(g(x,a),g(x,b),g(y,a),g(y,b)) = 0$$

Таковым являются функции

$$g(x,a) = A(x) + B(a), G(a,b,c,d) = C(a+d) - C(b+c),$$

где A, B, C – произвольные функции. Этот результат остается верным и для абстрактных групп, причем последние три функции будут иметь смысл унитарных операций. Отметим, что указанные функции могут иметь произвольный вид, в частности не быть обратимыми. В этих условиях, по-видимому, естественный изоморфизм (изоморфизм групп?) едва ли может связывать два решения указанного вида. Тем более сомнительно существование изоморфизма, связывающее такие решения с упомянутыми выше негрупповыми решениями.

Хочу также отметить, что приведенное выше решение, включающее в себя три произвольных функции общего вида, ни в коем случае не описывает всё множество решений данного уравнения хотя бы потому, что упомянутые негрупповые решения к нему не сводятся. Столь легкое расширение класса решений всё более остро ставит вопрос об уточнении постановки задачи. Из какого всё-таки класса следует искать решение? Какие требования к ним необходимо предъявлять? Кроме того, насколько я помню из Вашей лекции, речь вообще шла о связи между объектами разных множеств. Если это действительно так, то аргументы рассматриваемых функций также должны выбираться из разных множеств, а значит, тот алгебраический аппарат, которым пользовался Ионин, а вслед за ним – и я сам, едва ли уже будет применим.

С уважением,

Семён

Письмо 10. 4 ноября 2003

Дорогой Юрий Иванович!

В ближайшие две недели я буду в командировке. Так что связь на время прервется. Ничего особо нового за прошедшее время мне на ум не пришло. Могу лишь указать "нехорошие" решения уравнения

$$g(x,a) = \Gamma(g(x,b),g(y,a),g(y,b)),$$

о котором тоже шла речь:

$$\Gamma(a,b,c) = a+b-c, g(x,a) = \varphi(x),$$

$$\Gamma(a,b,c) = a-b+c, g(x,a) = \varphi(x),$$

$$\Gamma(a,b,c) = a+b-c, g(x,a) = \varphi(a),$$

$$\Gamma(a,b,c) = -a+b+c, g(x,a) = \varphi(a),$$

$$\Gamma(a,b,c) = a, g(x,a) = \varphi(x),$$

$$\Gamma(a,b,c) = b, g(x,a) = \varphi(a).$$

$$\Gamma(a,b,c) = c, g(x,a) = \alpha,$$

Функция φ и константа α здесь произвольны. Естественно, имея фантазию, можно придумать и другие решения этого уравнения.

С уважением,

Семён

Дорогой Семён!

Я надеюсь, что Вы уже вернулись из своей командировки. Куда Вы ездили?

Я с большим интересом следил за вашей перепиской с Андреем, но сам не подключился к ней, так как все силы сосредоточил на завершении своей книги, которую я писал более десяти лет.

И вот, наконец, на 851 странице поставлена последняя точка. Теперь я могу оглядеться и наметить план издания следующих книг.

Я давно пытался соединить физику и математику с помощью физических структур. Но мне не хватает необходимой математической культуры. Как Вы посмотрите на то, чтобы написать новую книгу "Архитектура математики -- Сакральный План Творения", в которой показать, как высшие этажи математики на средних этажах находят своё воплощение в виде Теории физических структур, содержащей в себе в закодированном виде все фундаментальные законы физики, геометрии и синергетики.

Короче говоря, высшие этажи математики (структуры и категории) не являются порождением человеческого разума, а представляют собой монолитный фундамент всего Мироздания.

Но для этого нам нужно встретиться у нас в Академгородке и в течение 7 -- 10 дней разработать конкретный план нашей будущей книги. Удобнее всего осуществить этот проект в январе 2004 года. Жить Вы смогли бы у меня дома. Я постараюсь найти спонсоров, которые смогли бы оплатить Ваш проезд в Новосибирск и обратно.

С надеждой на сотрудничество Ваш Юрий Иванович

Письмо 11. 20 ноября 2003 г.

Дорогой Юрий Иванович!

Я поздравляю Вас с завершением книги. Это великое дело, особенно когда за этим стоит жизнь. С нетерпением жду её выхода.

Я только что вернулся из командировки. Обнаружил в ящике последнее письмо Андрея. Но мне еще, по крайней мере, неделя нужна на то, чтобы разобраться со своими делами и внимательно его изучить. Надеюсь, он сможет немного подождать.

Командировка была в Испанию и Англию. Дело в том, что у меня есть близкий друг еще со школы, который сейчас работает в Англии в области компьютерных наук. Некоторое время назад он предложил мне подать совместный проект на разработку программы обучения в магистратуре по информатике у нас. Как не странно, мы получили образовательный грант Евросоюза, в результате чего на меня свалилась масса проблем, из которых я никак не могу выпутаться. Хотя в свое время (еще студентом) я начинал как программист, профессиональных интересов к этому делу у меня нет. Сейчас приходится тратить невообразимое количество времени и сил на организационные дела, на борьбу со всевозможными начальниками, желающими присосаться к любому живому делу и воспринимающими как личное оскорбление тот факт, что какой-то рядовой профессор, коих у нас как собак нерезаных, отхватил такой, по их мнению, жирный куш и получил возможность делать то, что ему вздумается, не спросив их милостивого разрешения на это. Я давно бросил бы всё. Но, во-первых, как-то не совсем прилично, взявшись за дело, его бросать. Очень приятно было возобновить прямой контакт со старым другом, которого я не видел много лет. Кроме того, этот проект открывает большие возможности для близких мне молодых талантливых программистов (к сожалению, серьезных учеников-математиков у меня почти нет). Интересно было посмотреть мир, где я ранее не был. И, возможно, главное – договор этот действительно очень нужен нашему факультету, где я сам учился и где проработал всю жизнь. Так или иначе, мне осталось продержаться полгода (полтора года уже позади) и довести дело до конца. В принципе, есть возможность заключению новых договоров. Этот путь в Европу для меня открыт. Но это – не мой путь. Я – математик. Поэтому завершу дела и выйду из игры.

Большое спасибо за приглашение. Выглядит это весьма заманчиво. Конечно, я обладаю достаточной свободой и смог бы найти время для поездки в Новосибирск. Я не столь уж жестко привязан к конкретным научным направлениям и при желании могу менять курс. Работать вместе с Вами было бы для меня очень интересно. Но я должен лучше понять, о чем все-таки идет речь. Кроме того, хотя я всегда уважал физику, поддерживаю достаточно близкие отношения с многими нашими серьезными физиками, а в дипломе доктора наук у меня даже написана специальность "математическая физика", должен признаться, что уровень моей физической культуры мягко говоря оставляет желать лучшего. По своим философским взглядам я являюсь убежденным агностиком, что не может не сказываться на стиле моей научной работы. В Ваших исследованиях я чувствую удивительную свежесть. Для меня вполне естественно, что Ваши исследования лучше воспринимаются математиками, чем физиками. За этим стоит некоторое различие в восприятии истины физиками и математиками. Физик изучает то, что есть, а математик – то, что может быть. Математик более свободен в движениях. Он говорит: давайте выберем такие правила игры, и посмотрим, что из этого получится. Хорошо, если за получаемыми при этом математическими конструкциями стоит какое-то природное явление. Но, если и не стоит – не беда. Красивая математическая теория хороша сама по себе. К тому же вполне вероятно, что физическое явление, описываемое именно этими математическими структурами, со временем найдется. Мир так устроен, что за хорошей математикой почему-то неизменно всплывает хорошая физика (или за физикой – математика?). Может быть, в этом и состоит Сакральный План Творения, о котором Вы пишете? Не знаю. Думаю, это относится к тем важнейшим Вопросам, на которые нам не найти ответа. Истина – не достижима, но какие-то шаги в нужном направлении сделать можно. По крайней мере, можно попробовать... А иначе, какой смысл во всем?

С уважением,

Семен

Письмо 13. 2 декабря 2003 г.

Дорогой Юрий Иванович!

Взялся за чтение Вашей книги. Ранее я сталкивался лишь с обрывочной информацией и не мог получить целостного впечатления. Сейчас ситуация изменилось. Несмотря на то, что мы исходим из разных философских концепций, имеем разные предметы исследования и разную степень участия в деле (в своей "Архитектуре" и последующих книгах я лишь компилятор и интерпретатор, но никак не творец), есть, несомненно, что-то очень серьезное, что нас объединяет. Мне еще предстоит дочитать до конца, чтобы что-то понять. Но кое-какие мысли возникают по ходу...

Прежде всего, мне всё более отчетливо видно, что отдельные математические положения здесь можно изложить несколько точнее. Среди моих духовных наставников наряду с величайшим оптимистом Давидом Гильбертом (вспомним его знаменитый тезис – "*любая математическая задача допускает решение*") есть еще и величайший скептик, поборник максимальной строгости и непревзойденный мастер контрпримеров Карл Вейерштрасс. В первую очередь, думаю, стоит обратиться к ключевому понятию физической структуры, приведенному на стр. 51. Да, здесь сказано, что определение носит лишь предварительный характер. Но затем отмечается, что уточнению подлежат лишь структура исходных множеств и область определения репрезентатора. Стало быть, остальное следует брать на вооружение в приведенном виде. Однако вот что меня здесь не вполне удовлетворяет:

1. Пока не ясно, зачем исходные множества наделены структурой многообразия, а функция Φ обладает какими-либо свойствами. Если на какой-то последующей стадии исследования возникнет острая потребность в усилении свойств, то это можно будет сделать тогда, сохранив за данным определением статус предварительного. Одним из основополагающих принципов в математике является тезис Оккама "*не умножайте сущностей*". Всё, что можно сократить, желательно сократить (а иначе необходимо

разъяснение, почему этого сделать нельзя). Кроме того, гладкость – более сильное свойство по сравнению с непрерывностью, т.е. предполагая функцию гладкой, мы автоматически требуем ее непрерывность.

2. Высказывание "для любого x существует y " означает, что каждому x соответствует, вообще говоря, свое y . Однако складывается впечатление, что в данном случае функции Φ и ϕ не зависят от выбора кортов. Кстати, целесообразность введения термина "*корт*" для наименования объекта, уже имеющего своё имя, вызывает определенные сомнения (см. Уильям Оккам).

3. Коль скоро определяющую роль здесь играют сами корты, а не их компоненты, последние желательно вообще исключить из основного равенства. Чем меньше объектов будет входить в определяемую формулу, тем более прозрачным будет ее смысл.

4. Приводимое определение должно автоматически исключать вырожденные ситуации, лишённые физического смысла. В частности, выбирая в качестве Φ тождественно равную нулю функцию, мы получим справедливость рассматриваемого равенства для любого ϕ . Однако едва ли получаемый при этом объект имеет смысл ФС. Представляются не содержательными и функционалы ϕ , принимающие постоянное значение для всех аргументов. В этом случае существует значительное количество функций Φ , обеспечивающих выполнение необходимого соотношения, также едва ли отвечающих природе ФС. Возможно, потребуются и другие запреты, но пока я их не вижу.

Учитывая приведенные соображения, я привел бы указанное определение к следующему виду:

Определение. *Физической структурой ранга (s,r) на паре множеств (M,N) назовем такие нетождественный функционал ϕ на (M,N) и ненулевую функцию sr переменных Φ , что справедливо равенство*

$$\Phi\phi = \theta, \quad (*)$$

где θ есть нулевой функционал на $M^s \times N^r$.

Равенство (*) означает выполнение соотношения

$$\Phi(\phi(m,n)) = 0 \quad \forall m \in M^s, n \in N^r,$$

где под $\phi(m,n)$ понимается матрица с компонентами $\phi(m_i, n_j)$, причем m_i, n_j – компоненты векторов m и n .

Приведенное определение прекрасно согласуется с понятием структуры по Бурбаки, а объект $(M,N;\Phi,\phi)$ оказывается структуризованным множеством с носителем (M,N) и структурой (Φ,ϕ) . Не исключено, что за всем этим стоит какая-то категория с указанными объектами. Однако над определением морфизмов такой категории стоит еще подумать. Но если их удастся грамотно ввести, то мы, возможно, получим инструмент для установления связи между различными физическими структурами, что едва ли сильно повредит делу.

Соотношение (*), говорящее о том, что композиция верификатора с репрезентатором является нулевым преобразованием, оказывается, возможно, предельно общим определением ФС (здесь уже, как будто, и нечего сокращать), если, конечно, я правильно понял суть дела. Рассматриваемое определение фактически говорит о том, что пара нетривиальных преобразований указанного вида является ФС, если их композиция равна нулю.

Было бы любопытно узнать, что Вы думаете на этот счет. А пока – читаю дальше.

С уважением,

Семен.

Письмо 16. 6 декабря 2003 г.

Дорогой Юрий Иванович!

По ходу чтения Вашей книги, обнаружилась еще одна любопытная вещь. В студенческие годы нам рассказывали о понятии обобщенного решения задачи математической физики. У меня оно сразу вызвало какое-то странное чувство. Обобщенным решением уравнения

$$Ax = 0 \quad (1)$$

называлась такая функция x из некоторого класса X , которая удовлетворяет некоторому интегральному соотношению типа

$$B(x, y) = 0 \quad \forall y \in Y. \quad (2)$$

Помимо существенно более сложного вида по сравнению с уравнением (1) определенное недоумение вызывало наличие произвольной функции y из некоторого множества Y . Первое уравнение обладало несомненным физическим смыслом. Помнится, я спросил преподавателя о физическом смысле соотношения (2), но так и не получил ответа. Не нашел я его и в известных мне учебниках по уравнениям математической физики.

Всё это вскоре забылось. Я многократно пользовался понятием обобщенного решения, не задумываясь о его природе за ненадобностью. Однако несколько лет назад я вышел на проблему корректного вывода математических моделей. Получив желаемый результат за счет введения несколько иной формы решения задач математической физики, я захотел прочитать соответствующий курс лекций. В виду необходимости сравнения различных форм решения проблема физической природы обобщенного решения всплыла вновь. Научившись на простых примерах выводить соотношение (2) напрямую из законов физики без обращения к уравнению (1), я окончательно понял, что условие (2) является самостоятельной формой модели. Отсюда также следовало, что принятое словосочетание "обобщенное решение уравнения (1)" является не вполне корректным, коль скоро задача (2) может быть получена и без обращения к уравнению (1), в том числе, и в том случае, когда это уравнение заведомо не имеет смысла.

Однако мне еще предстояло популярно объяснить студентам-математикам, почему соотношение (2) (обобщенная математическая модель конкретного процесса) наряду с естественной величиной x (обобщенным состоянием системы) содержит величину y , как будто не имеющую прямого отношения к исследуемому процессу, да еще и выбираемую произвольно. Поразмыслив, я предложил студентам интерпретировать процесс, описываемый соотношением (2), как черный ящик. Мы не знаем, что там происходит на самом деле, но можем регистрировать отклик системы на внешнее воздействие. Туманная величина y , напрямую не связанная с процессом, интерпретируется как наше воздействие на систему. Поскольку потенциально мы можем поставить эксперимент при любых условиях, то и величина y должна быть непременно произвольной (в пределах соответствующего множества Y). После этого и моим студентам, и мне самому стало ясно, что задача (2) не только не уступает уравнению (1) с физической точки зрения (как модель), но даже превосходит его (о математических преимуществах обобщенного решения по сравнению с классическим можно прочесть в любом учебнике).

И вот, прочитав в Вашей книге о том, что физическая величина зависит от физического объекта и измерительной процедуры, я увидел полнейшую аналогию. За физической величиной стоит обобщенная модель процесса в форме соотношения (2). Роль физического объекта играет входящая в эту задачу состояние системы x . Ну а измерительная процедура, понятно, описывается функцией y . Жаль, что я не был знаком со всем этим раньше... Любопытно, что у меня соотношение (2) подобно уравнению (1) было только промежуточным этапом на пути корректного вывода математической модели. Для решения этой проблемы потребовалось ввести третью форму модели, в основе которой лежит аппроксимационный процесс, позволяющий помимо всего прочего дать корректный вывод задачи (2), а значит, и уравнения (1). Определенную интерпретацию этой модели я дал, но это выглядит еще не столь прозрачно, как в случае классической и обобщенной модели. Надо еще подумать.

С уважением,

Семен

10.12.3

Дорогой Семён!

Я получил Ваше письмо, адресованное Андрею. Полностью разделяю Ваши убеждения в необходимости точных, ясных и прозрачных формулировок исходных положений. Не существует языка более ясного, однозначного и потому наиболее понятного, чем язык современной математики. Однако освоение этого языка, как и освоение иностранного языка, на первых порах мучительно трудно.

Чтобы уловить смысл Вашей формулировки физической структуры, приведённой в письме 13, я попытался ответить на вопрос -- что такое определитель, не прибегая к наглядному образу таблицы, состоящей из s строк и g столбцов. Что же такое матрица?

Из Вашего письма я понял, что матрица -- это вещественный функционал на прямом произведении s -той степени множества индексов $N = \{1, 2, \dots, n\}$ и g -ой степени другого множества индексов $M = \{1, 2, \dots, m\}$. Я понимал, как всё это красиво и просто! Но я не понимал, почему нужно брать s - и g -тые степени N и M , и почему берётся отображение в sg степень R . И никто из математиков не мог объяснить мне этого. И только сегодня мне наконец-то стало понятно это.

Таким образом, в основании Мира лежит удивительно простая программа; в самом начале математики лежат понятия множества, отображения и нетривиальное понятие вещественного числа. Как из них построить по общему плану буквально все фундаментальные законы физики и геометрии?

Очень просто! Зададим два целых натуральных числа s и g . Рассмотрим два множества индексов N и M .

Рассмотрим суперпозицию двух операторов:

функционала, отображающего N в степени s на M в степени g в R в степени sg и вещественной функции sg переменных.

Полученный функционал полагаем равным тождественному нулю -- получаем сакральное уравнение,

имеющее всего четыре решения. Из этих решений, как из "атомов" дедуктивным путём строятся все фундаментальные уравнения, лежащие в основании всей физики и геометрии.

Итак, обнаружена неизвестная ранее новая математическая структура, допускающая огромное число приложений.

Таким образом, из чистой математики рождается физика в виде сакральных уравнений, допускающих наглядную интерпретацию на языке антропных моделей.

Воистину -- "В начале было Слово". Из него родился весь Мир!

Спасибо! Искренне Ваш Ю.И.

Письмо 17. 14 декабря 2003 г.

Дорогой Юрий Иванович!

Полностью разделяю Ваше мнение о языке. Не зря у меня в *Архитектуре* на первом этаже описывается язык. Собственно, наш разговор в основном и посвящен языку математики с тем, чтобы сказать на нем что-то важное для физики. Я в силу своей профессии являюсь в определенной степени носителем этого языка. Я более или менее знаю, как следует грамотно говорить отдельные фразы, но (не будучи физиком) до сих пор еще смутно представляю, что надо сказать. Вы и Ваши ученики, напротив, хорошо знаете

сюжет, но (не будучи в полной степени профессиональными математиками) изъясняетесь на этом языке не совсем чисто. Есть основание надеяться, что в процессе разговора мы все чему-нибудь научимся. Собственно, в своем последнем письме к Андрею я всего лишь прошу его попытаться изложить свои результаты как можно четче и лаконичнее, убрав ненужные детали и заострив внимание на главном. А ссылка на мое письмо №13 дана исключительно потому, что там на конкретном примере показывается, как может осуществляться формализация результатов.

Теперь несколько слов о матрицах и соответствующем сакральном уравнении. Требуется маленькое уточнение. Функционалом называется отображение с числовым множеством значений. В частности, в моих рассуждениях говорится о функционале ϕ , определенном на паре множеств (M, N) . Выбирая конкретные элементы m_i из M и n_j из N , мы получаем число $\phi(m_i, n_j)$, что в точности соответствует природе обсуждаемого объекта: двум элементам указанных множеств ставится в соответствие конкретное число. Далее, рассматриваются вектор m порядка s с компонентами m_i из множества M и вектор n порядка r с компонентами n_j из множества N . Совокупность всевозможных значений $\phi(m_i, n_j)$ образует матрицу порядка $s \times r$, которая и обозначается через $\phi(m, n)$. Тем самым мы распространяем функционал ϕ с множества (M, N) на произведение степеней множеств $M^s \times N^r$. При этом ϕ уже приобретает смысл преобразования из множества $M^s \times N^r$ на множество матриц порядка $s \times r$: каждой паре соответствующих векторов m и n ставится в соответствие матрица $\phi(m, n)$. После этого сакральное уравнение приобретает вид

$$\Phi(\phi(m, n)) = 0 \quad \forall m \in M^s, n \in N^r,$$

где Φ есть некоторая функция sr переменных. Теперь мы можем рассмотреть суперпозицию $\Phi\phi$. Согласно последнему соотношению $\Phi\phi$ ставит в соответствие любой паре векторов (m, n) число 0. По определению нулевым функционалом на множестве $M^s \times N^r$ как раз и называется такое отображение, которое переводит любую пару (m, n) в нуль. Обозначив этот функционал через θ , мы приходим к равенству $\Phi\phi = \theta$. В принципе, мы имеем полное право писать $\Phi\phi = 0$, понимая под выражением в правой части не число 0, а нулевой функционал. Определяют же, к примеру, уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. Однако в левой его части стоит функция (действие оператора Лапласа на функцию u). Следовательно, символ 0 в правой части этого равенства обозначает не число "нуль", а функцию, тождественно равную нулю (нулевую функцию). Тем самым утверждение о том, что композиция верификатора с репрезентатором равна нулю (является нулевым преобразованием) представляется математически корректной формой записи сакрального уравнения.

Теперь кое-что о природе матрицы без обращения к соответствующей таблице чисел. Рассмотрим пространства X и Y размерности s и r . Зададимся вопросом, какова природа преобразования, связывающего точки этих пространств. Каждая точка $x \in X$ характеризуется s координатами (является вектором порядка s). Если бы пространство было одномерным Y , то произвольное преобразование A из X в Y представляло бы собой функцию s переменных: точке (вектору) x ставится в соответствие значение (число) Ax . У нас любая точка $y \in Y$ характеризуется r координатами (является вектором порядка r). Если она является результатом действия преобразования A из X , то каждая ее координата будет значением функции s переменных. Таким образом, преобразование A наших пространств в общем виде характеризуется r функциями s переменных. Если мы не определим на множествах X и Y какую-либо структуру, то дальше двигаться некуда. Однако предположим, что на них определена линейная структура, т.е. имеют смысл сложение векторов и умножение вектора на число. Возникает естественный вопрос, какие преобразования рассматриваемых пространств сохраняют линейную структуру, т.е. переводят сумму векторов в сумму векторов, а произведение вектора на число – в произведение вектора на число? В этих условиях преобразование A удовлетворяет условиям

$$A(x + x') = Ax + Ax', A(\alpha x) = \alpha Ax$$

для любых векторов x и x' из X и произвольного числа α . Преобразование A (r функций s переменных), удовлетворяющее указанным требованиям, и является матрицей порядка $s \times r$. Тем самым матрица соответствующего порядка есть не что иное, как линейное преобразование пространств соответствующей размерности. Кстати, некоторый свет на все это, возможно, проливает прилагаемый маленький кусочек из самого начала моей книги *"Введение в спектральную теорию операторов"*, изданной совсем недавно.

Я понемногу читаю Вашу книгу. Добравшись до закона Ома и столкнувшись со структурой ранга (2,3), я почувствовал острое желание (грешен!) проверить справедливость результата Михайличенко. Никаких сомнений в том, что его формулы действительно дают решение поставленных уравнений у меня не было. Но вот по поводу единственности... Для начала я попробовал взять более общий вид функции φ и подобрать функцию Φ так, чтобы обеспечить выполнение соответствующего равенства. Сделать это удалось лишь при дополнительных ограничениях на φ , в результате чего получилась... формула Михайличенко в точности. Тогда я стал искать вырожденные решения, подобные тем, что нашлись для случая (2,2). Такие решения удалось отыскать без труда.

Рассмотрим уравнение

$$\Phi[\varphi(\xi_1, \eta_1; x_1), \varphi(\xi_1, \eta_1; x_2), \varphi(\xi_1, \eta_1; x_3), \varphi(\xi_2, \eta_2; x_1), \varphi(\xi_2, \eta_2; x_2), \varphi(\xi_2, \eta_2; x_3)] = 0. \quad (1)$$

Прежде всего, упростим формулу, определив $y = (\xi, \eta)$. Получаем уравнение

$$\Phi[\varphi(y_1, x_1), \varphi(y_1, x_2), \varphi(y_1, x_3), \varphi(y_2, x_1), \varphi(y_2, x_2), \varphi(y_2, x_3)] = 0. \quad (1')$$

Один из вариантов вырожденного решения дают формулы

$$\varphi(y, x) = \max\{y, x\} = \max\{\xi, \eta, x\}, \quad \Phi(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}) = \max\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}\} - \max\{a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}\} \quad (2)$$

Проверяем

$$\begin{aligned} &\Phi[\varphi(y_1, x_1), \varphi(y_1, x_2), \varphi(y_1, x_3), \varphi(y_2, x_1), \varphi(y_2, x_2), \varphi(y_2, x_3)] = \\ &\quad \max\{\varphi(y_1, x_1), \varphi(y_1, x_2), \varphi(y_1, x_3), \varphi(y_2, x_1)\} - \\ &\quad - \max\{\varphi(y_1, x_3), \varphi(y_2, x_1), \varphi(y_2, x_2), \varphi(y_2, x_3)\} = \max\{y_1, x_1, x_2, x_3, y_2\} - \max\{y_1, x_1, x_2, x_3, y_2\} = 0 \end{aligned}$$

Решение (2) не укладывается в формулу Михайличенко хотя бы в силу экзотического вида функции Φ . Впрочем, его можно было бы не принимать во внимание, например, из-за негладкости.

После этого захотелось узнать, а не обладает ли уравнение (1) линейным решением. Рассмотрим функции

$$\varphi(y, x) = y + x = \xi + \eta + x, \quad \Phi(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}) = a_{11} + a_{12} - 2a_{13} - a_{21} - a_{22} + 2a_{23} \quad (3)$$

Проверяем

$$\begin{aligned} &\Phi[\varphi(y_1, x_1), \varphi(y_1, x_2), \varphi(y_1, x_3), \varphi(y_2, x_1), \varphi(y_2, x_2), \varphi(y_2, x_3)] = \varphi(y_1, x_1) + \varphi(y_1, x_2) - 2\varphi(y_1, x_3) - \\ &\quad - \varphi(y_2, x_1) - \varphi(y_2, x_2) + 2\varphi(y_2, x_3) = (y_1 + x_1) + (y_1 + x_2) - 2(y_1 + x_3) - (y_2 + x_1) - (y_2 + x_2) + 2(y_2 + x_3) = 0 \end{aligned}$$

Линейная функция φ описывается формулой Михайличенко, но функция Φ опять-таки является линейной, а не квадратичной. Последнее решение нельзя даже назвать вырожденным. Понятно, что конструкция решения (3) позволяет построить целый класс решений уравнения (1), не подпадающих под известную формулу.

Отсюда три пути: наложить на функции Φ и φ такие ограничения, которым бы приведенные решения не удовлетворяли; найти у нового решения физический смысл; вывести формулу, обобщающую как решение Михайличенко, так и приведенное выше (тогда можно было бы утверждать об определенной степени эквивалентности всех решений). На каждом пути – свои трудности. К тому же у меня нет ни малейшей уверенности в том, что уравнению (1) не удовлетворяет что-то еще. Я до сих пор не могу понять, как можно для таких уравнений (даже для физической структуры ранга 2,2) вообще получить общее решение (т.е. охватывающее действительно все случаи). Я даже

не представляю, как подступиться к этой задаче. Доказать существование или отсутствие решений определенного вида – да. Но в общем случае? Не знаю. Но вот, что ясно наверняка – при аксиоматизации физических структур надо обязательно отсекаать вырожденные случаи.

Читаю дальше...

С уважением,

Семен

Письмо 17. 20 декабря 2003 г.

Дорогой Юрий Иванович!

Дойдя до феноменологического уравнения ранга 3, я естественно занялся поиском его "лишних" решений. Итак, имеем уравнение

$$\Phi[\varphi(\xi_1, \xi_2), \varphi(\xi_1, \xi_3), \varphi(\xi_2, \xi_3)] = 0 \quad (1)$$

Его лучше записать в виде

$$\Phi[\varphi(\xi_1, \xi_2), \varphi(\xi_2, \xi_3), \varphi(\xi_3, \xi_1)] = 0, \quad (2)$$

поскольку все аргументы здесь становятся равноправными. Это делает более прозрачными последующие выкладки.

Попробуем для начала искать линейное решение

$$\varphi(x, y) = x - y \quad (3)$$

Уравнение (2) записывается в виде

$$\Phi(\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1) = 0 \quad (4)$$

Сразу видно, что полагая $\Phi(a, b, c) = a + b + c$, мы наверняка получим решение задачи. Однако более интересные результаты получаются, если ввести обозначения

$$a = \xi_1 - \xi_2, \quad b = \xi_2 - \xi_3. \quad (5)$$

Уравнение (4) принимает вид

$$\Phi[a, b, -(a+b)] = 0 \quad (6)$$

Известна формула для бинома Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m},$$

откуда следует

$$(-1)^n \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m} - (-1)^n (a + b)^n = 0 \quad (7)$$

Сравнивая соотношения (6) и (7), определяем

$$\Phi_n(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^n \sum_{m=0}^n C_n^m \alpha^m \beta^{n-m} - \gamma^n \quad (8)$$

Формула (8) для любого n дает решение уравнения (2) с линейной функцией φ . В частности, при $n=2$ получается приведенное антисимметричное решение.

Принцип построения других решений. Будем искать степенное решение

$$\varphi_k(x, y) = (x - y)^k \quad (3)'$$

Уравнение (2) записывается в виде

$$\Phi[(\xi_1 - \xi_2)^k, (\xi_2 - \xi_3)^k, (\xi_3 - \xi_1)^k] = 0 \quad (4)'$$

В обозначениях (5) имеем уравнение (4)' принимает вид

$$\Phi[a^k, b^k, (-1)^k(a+b)^k] = 0 \quad (6)'$$

Формула бинома

$$(a+b)^{kn} = \sum_{m=0}^{kn} C_{kn}^m a^m b^{kn-m}$$

вновь связывает три аргумента функции Φ из равенства (6)', что даст класс решений Φ_{kn} , соответствующих Φ_k .

Вслед за этим можно рассмотреть

Феноменологическое уравнение ранга 4

Дано уравнение

$$\Phi[\varphi(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2), \varphi(\xi_1, \eta_1; \xi_3, \eta_3), \varphi(\xi_1, \eta_1; \xi_4, \eta_4), \varphi(\xi_2, \eta_2; \xi_3, \eta_3), \varphi(\xi_2, \eta_2; \xi_4, \eta_4), \varphi(\xi_3, \eta_3; \xi_4, \eta_4)] = 0 \quad (1)$$

Определим функции

$$\varphi(a, b, c, d) = f(a) + f(b) + f(c) + f(d), \quad \Phi(a, b, c, d, e, g) = 2a - b - c - d - e - 2g \quad (2)$$

с произвольной функцией f . Имеем

$$\begin{aligned} & \Phi[\varphi(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2), \varphi(\xi_1, \eta_1; \xi_3, \eta_3), \varphi(\xi_1, \eta_1; \xi_4, \eta_4), \varphi(\xi_2, \eta_2; \xi_3, \eta_3), \varphi(\xi_2, \eta_2; \xi_4, \eta_4), \varphi(\xi_3, \eta_3; \xi_4, \eta_4)] = \\ & = 2[f(\xi_1) + f(\eta_1) + f(\xi_2) + f(\eta_2)] - [f(\xi_1) + f(\eta_1) + f(\xi_3) + f(\eta_3)] - [f(\xi_1) + f(\eta_1) + f(\xi_4) + f(\eta_4)] - \\ & - [f(\xi_2) + f(\eta_2) + f(\xi_3) + f(\eta_3)] - [f(\xi_2) + f(\eta_2) + f(\xi_4) + f(\eta_4)] + 2[f(\xi_3) + f(\eta_3) + f(\xi_4) + f(\eta_4)] = 0. \end{aligned}$$

Другой вариант. Использование бинома

Обозначим $x = (\xi, \eta)$. Уравнение (1):

$$\Phi[\varphi(x_1, x_2), \varphi(x_1, x_3), \varphi(x_1, x_4), \varphi(x_2, x_3), \varphi(x_2, x_4), \varphi(x_3, x_4)] = 0 \quad (3)$$

Вид решения: $\varphi(x, y) = x - y$. Уравнение (3)

$$\Phi[x_1 - x_2, x_1 - x_3, x_1 - x_4, x_2 - x_3, x_2 - x_4, x_3 - x_4] = 0 \quad (4)$$

Обозначения: $a = x_1 - x_2$, $b = x_2 - x_3$, $c = x_3 - x_4$. Уравнение (4)

$$\Phi[a, a+b, a+b+c, b, b+c, c] = 0 \quad (5)$$

Бином:

$$(a+b+c)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m (a+b)^m c^{n-m} \quad (6)$$

Определив

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \chi) = \gamma^n - \sum_{m=0}^n C_n^m \beta^m \chi^{n-m}, \quad (7)$$

приведем (6) к виду (5). Тогда (7) и функция $\varphi(a, b, c, d) = a+b-c-d$ есть решение (1).

Другой вариант решения с тем же Φ . Имеем равенство:

$$3(a+b+c) = (a+b) + (b+c) + 2a + b + 2c \quad (8)$$

Оно связывает все шесть аргументов функции Φ из (5). Возводя (8) в произвольную степень и пользуясь формулой бинома многократно, получаем соотношение, связывающее все аргументы функции Φ . Переносим все слагаемые в левую часть и определяя соответствующим образом Φ , получаем новое решение (5), а значит, и (1) при том же Φ . Естественно, выбирая вместо (8) другое соотношение между аргументами Φ из (5) (таковых бесконечное количество), с помощью бинома получается новое решение (1) с линейным Φ .

Как и для уравнения ранга 3 можно выйти и на другие степенные зависимости Φ , а возможно, и не только степенные.

Здесь, пожалуй, стоит остановиться и подвести итоги. Есть серьезные основания усомниться в высказываниях о числе решений практически всех рассматриваемых уравнений. Не вызывают сомнения приведенные формулы найденных решений. Но вот утверждения об отсутствии других решений... Слишком уж общий вид имеют эти уравнения, чтобы допускать столь малое количество решений. Можно, конечно, отождествить различные решения, считая их в определенной степени "эквивалентными".

Но тогда возникает вопрос: а как быть в той ситуации, когда хочется иметь несколько решения одного уравнения? Что можно отождествлять, а что нельзя? Можно попытаться интерпретировать вновь найденные решения. Но где гарантия, что этим всё ограничивается? Кстати, наличие нескольких найденных ранее "экзотических" решений для уравнения ранга 4 наряду с "естественными" однозначно говорит: другие решения будут наверняка. К примеру, любая связь между аргументами уравнения (5) приводит к какому-то решению этого уравнения. В любом случае надо обязательно четко оговорить свойства искомых функций и принцип отождествления решений. Без этого ничего не получится. Но даже после этого я не вижу реального пути оценки числа решений. А, может быть, существенная неединственность не столь уж страшна? Но тогда как это все интерпретировать физически? Думаю, надо как-то существенным образом снизить степень неопределенности постановки задачи. Так или иначе, есть над чем подумать. Хотелось бы узнать Ваше мнение.

С уважением,
Семен

Дорогой Семён!

С большим интересом читаю Ваши письма, в которых Вы находите всё новые и новые решения сакрального уравнения. К сожалению, на меня навалилась трудная и не интересная работа по редактированию и приведению к единому стандарту моей 850-страничной книги. А кроме того мой технический редактор электронного журнала "Credo" постоянно требует от меня всё новых и новых материалов для дискуссионной страницы при этом журнале. А так хотелось бы сосредоточиться на переписке с Вами. Завтра я уезжаю на несколько дней в Барнаул по поводу лекций по ТФС.

Ваши сомнения по поводу строгого доказательства единственности существования решений сакральных уравнений я надеюсь разрешить, приведя точную формулировку постановки задачи, Одно существенное требование, которое осталось "по умолчанию" -- это требование "существенной зависимости" достаточно гладкого репрезентатора от всех его $r - 1 + s - 1$ числовых переменных в случае структуры ранга (s,r) . Это значит, что нельзя никаким преобразованием уменьшить число независимых переменных.

Ваше письмо я переслал в Горно-Алтайск автору этого доказательства Геннадию Григорьевичу Михайличенко.

Искренне Ваш Юрий Иванович

Письмо 18. 2 января 2004 г.

Дорогой Юрий Иванович!

...

P.S. В качестве приложения я привожу решение уравнения ранга (2,6).

Дано уравнение

$$\Phi[\varphi(x_1, y_1), \varphi(x_1, y_2), \dots, \varphi(x_1, y_6), \varphi(x_2, y_1), \dots, \varphi(x_2, y_6)] = 0 \quad (1)$$

Будем искать линейное решение: $\varphi(x, y) = x + y$. Уравнение (1) принимает вид

$$\Phi(x_1 + y_1, x_1 + y_2, \dots, x_1 + y_6, x_2 + y_1, \dots, x_2 + y_6) = 0 \quad (2)$$

Вводятся обозначения: $a_i = x_1 + y_i$, $i = 1, \dots, 6$; $b = x_2 + y_1$

Справедливы равенства: $a_i - a_1 = y_i - y_1$, $a_i - a_1 + b = x_2 + y_i$, $i = 2, \dots, 6$

Уравнение (2) принимает вид:

$$\Phi(a_1, \dots, a_6, b, a_2 - a_1 + b, \dots, a_6 - a_1 + b) = 0 \quad (3)$$

Обозначая аргументы Φ в (3) через c_{ji} , $i=1, \dots, 6; j=1, 2$, приводим уравнение (3) к виду

$$\Phi(c_{11}, \dots, c_{26}) = 0. \quad (4)$$

Справедливы равенства: $c_{1i} + c_{21} = c_{2i} + c_{11}$, $i = 2, \dots, 6$. Отсюда следуют равенства

$$f_i(c_{1i} + c_{21}) = f_i(c_{2i} + c_{11}), i = 2, \dots, 6 \quad (5)$$

для любых функций f_i . В результате получаем, к примеру, равенство

$$\Sigma[f_i(c_{1i} + c_{21}) - f_i(c_{2i} + c_{11})] = 0, \quad (6)$$

Сравнивая соотношения (5) и (6), заключаем, что в качестве значения функции Φ , удовлетворяющей уравнению (1) с аддитивной функцией ϕ и аргументами c_{ji} можно выбрать левую часть равенства (5). Естественно соотношение (6) является не единственным следствием условий (5).

Есть основания полагать, что и для других функций ϕ найдутся решения уравнения (1).

Боюсь, что и уравнения других рангов тоже окажутся разрешимыми. Но, видимо, не это является главным.

P.P.S. По ходу чтения Вашей книги я дошел-таки до доказательств заявленных свойств уравнений, и, похоже, понял причину полученных несоответствий. Итак, рассматривается уравнение

$$\Phi[\phi(x_1, y_1), \dots, \phi(x_1, y_s), \dots, \phi(x_r, y_s)] = 0 \quad (1)$$

Предлагается продифференцировать его по всем аргументам x_i, y_j . В результате получается $r+s$ уравнений относительно частных производных искомых функций – система (2). Последняя является линейной, а значит, может быть исследована средствами линейной алгебры, что и осуществляется (остается затем по производным восстановить функцию). Только вот системы (1) и (2) не эквивалентны. Обратный переход не очевиден. Не все свойства системы (2) переносимы на уравнение (1). Да и было бы уж очень странным, если бы нелинейное уравнение (1) оказалось в полной степени сводимо к линейной задаче. Так не бывает. И уж что совсем забавно, так это то, что основное направление моих научных исследований как раз и было связано с теорией линеаризации (правда, на бесконечномерном уровне), т.е. с возможностью воспроизведения некоторых (ох, далеко не всех!) свойств нелинейной системы на основе соответствующих свойств ее линейного приближения. Метод линеаризации, основанный на операции дифференцирования, является мощным инструментом нелинейного анализа. Но любая основанная на нем теория – это всего лишь теория первого порядка. Более точной (и существенно более сложной) является теория второго порядка, поскольку в ней учитываются два члена разложения в ряд Тейлора. Но и вторые производные не в полной степени характеризуют свойства функции. Бывают случаи, когда и их не достаточно. Теории более высоких порядков (особенно для функций многих переменных, не говоря уже об операторах общего вида) слишком громоздки, а потому мало содержательны. Потому ничего удивительного нет в том, что даже для одного нелинейного уравнения общего вида $f(x)=0$ нет полной (справедливой для всех функций f) теории.

И всё-таки, я думаю, что существенная неединственность решения уравнений не столь уж важна. Наши математические задачи живут своей жизнью и зачастую оказываются не совсем такими, какими мы их хотели бы видеть. Но если мы уверены в исходных посылах, мы получим то, что и должно получиться. Значит, надо идти дальше.

Дорогой Семён!

Я считаю, что очень важно разобраться с вопросом о единственности решения сакрального уравнения и с вопросом о возникновении линейности в математике. Необходимо написать по этому поводу совместную статью. Так что приезжайте.

Искренне Ваш Юрий Иванович

Дорогой Семён!

Уточняю, что мы понимаем под решением сакрального уравнения ранга (s,r)

1. Сакральное уравнение ранга (2,2)

$$\Phi(\varphi_{\alpha i}, \varphi_{\alpha k}, \varphi_{\beta i}, \varphi_{\beta k}) \equiv 0$$

сводится к тождеству

$$\forall \xi(\alpha)_1, \xi(\beta)_1 \quad \forall x(i)^1, x(k)^1$$

$$\Phi(\varphi(\xi(\alpha)_1; x(i)^1), \varphi(\xi(\alpha)_1; x(k)^1), \varphi(\xi(\beta)_1; x(i)^1), \varphi(\xi(\beta)_1; x(k)^1)) \equiv 0$$

Задача состоит в том, чтобы найти функцию двух переменных

$$\varphi(\xi(\alpha)_1; x(i)^1)$$

2. Сакральное уравнение ранга (2,3)

$$\Phi(\varphi_{\alpha i}, \varphi_{\alpha k}, \varphi_{\alpha m}, \varphi_{\beta i}, \varphi_{\beta k}, \varphi_{\beta m}) \equiv 0$$

сводится к тождеству

$$\forall \begin{matrix} \xi(\alpha)_1, \xi(\beta)_1 \\ \xi(\alpha)_2, \xi(\beta)_2 \end{matrix} \quad \forall x(i)^1, x(k)^1, x(m)^1$$

$$\Phi(\varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2; x(i)^1), \varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2; x(k)^1), \varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2; x(m)^1), \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2; x(i)^1), \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2; x(k)^1), \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2; x(m)^1)) \equiv 0$$

Задача состоит в том, чтобы найти функцию трёх (2 + 1) существенных переменных

$$\varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2; x(i)^1)$$

Число существенных переменных m и n связано с рангом s и r следующими соотношениями:

$$m = r - 1$$

$$n = s - 1$$

3. Сакральное уравнение ранга (2,4)

$$\Phi(\varphi_{\alpha i}, \varphi_{\alpha k}, \varphi_{\alpha m}, \varphi_{\alpha n}, \varphi_{\beta i}, \varphi_{\beta k}, \varphi_{\beta m}, \varphi_{\beta n}) \equiv 0$$

сводится к тождеству

$$\forall \begin{matrix} \xi(\alpha)_1, \xi(\beta)_1 \\ \xi(\alpha)_2, \xi(\beta)_2 \\ \xi(\alpha)_3, \xi(\beta)_3 \end{matrix} \quad \forall \begin{matrix} x(i)^1, x(k)^1, x(m)^1, x(n)^1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &\Phi(\varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3; x(i)^1), \varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3; x(k)^1), \varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3; x(m)^1), \\ &\quad \varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3; x(n)^1), \\ &\varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3; x(i)^1), \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3; x(k)^1), \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3; x(m)^1), \\ &\quad \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3; x(n)^1)) \equiv 0 \end{aligned}$$

Задача состоит в том, чтобы найти функцию четырёх $(3 + 1)$ существенных переменных

$$\varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3; x(i)^1)$$

4. Сакральное уравнение ранга (2,5)

$$\Phi(\varphi_{\alpha i}, \varphi_{\alpha k}, \varphi_{\alpha m}, \varphi_{\alpha n}, \varphi_{\alpha p}, \varphi_{\beta i}, \varphi_{\beta k}, \varphi_{\beta m}, \varphi_{\beta n}, \varphi_{\beta p}) \equiv 0$$

сводится к тождеству

$$\forall \begin{matrix} \xi(\alpha)_1, \xi(\beta)_1 \\ \xi(\alpha)_2, \xi(\beta)_2 \\ \xi(\alpha)_3, \xi(\beta)_3 \\ \xi(\alpha)_4, \xi(\beta)_4 \end{matrix} \quad \forall \begin{matrix} x(i)^1, x(k)^1, x(m)^1, x(n)^1, x(p)^1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &\Phi(\varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3, \xi(\alpha)_4; x(i)^1), \varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3, \xi(\alpha)_4; x(k)^1), \\ &\varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3, \xi(\alpha)_4; x(m)^1), \varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3, \xi(\alpha)_4; x(n)^1), \\ &\quad \varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3, \xi(\alpha)_4; x(p)^1), \\ &\varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3, \xi(\beta)_4; x(i)^1), \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3, \xi(\beta)_4; x(k)^1), \\ &\varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3, \xi(\beta)_4; x(m)^1), \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3, \xi(\beta)_4; x(n)^1), \\ &\quad \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3, \xi(\beta)_4; x(p)^1)) \equiv 0 \end{aligned}$$

Задача состоит в том, чтобы найти функцию пяти $(4 + 1)$ существенных переменных

$$\varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3, \xi(\alpha)_4; x(i)^1)$$

5. Сакральное уравнение ранга (2,6)

$$\Phi(\varphi_{\alpha i}, \varphi_{\alpha k}, \varphi_{\alpha m}, \varphi_{\alpha n}, \varphi_{\alpha p}, \varphi_{\alpha q}, \\ \varphi_{\beta i}, \varphi_{\beta k}, \varphi_{\beta m}, \varphi_{\beta n}, \varphi_{\beta p}, \varphi_{\beta q}) \equiv 0$$

сводится к тождеству

$$\forall \begin{matrix} \xi(\alpha)_1, \xi(\beta)_1 \\ \xi(\alpha)_2, \xi(\beta)_2 \\ \xi(\alpha)_3, \xi(\beta)_3 \\ \xi(\alpha)_4, \xi(\beta)_4 \\ \xi(\alpha)_5, \xi(\beta)_5 \end{matrix} \quad \forall \begin{matrix} x(i)^1, x(k)^1, x(m)^1, x(n)^1, x(p)^1, x(q)^1 \end{matrix}$$

$$\Phi(\varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3, \xi(\alpha)_4, \xi(\alpha)_5; x(i)^1), \varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3, \xi(\alpha)_4, \xi(\alpha)_5; x(k)^1), \\ \varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3, \xi(\alpha)_4, \xi(\alpha)_5; x(m)^1), \varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3, \xi(\alpha)_4, \xi(\alpha)_5; x(n)^1), \\ \varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3, \xi(\alpha)_4, \xi(\alpha)_5; x(p)^1), \varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3, \xi(\alpha)_4, \xi(\alpha)_5; x(q)^1), \\ \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3, \xi(\beta)_4, \xi(\beta)_5; x(i)^1), \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3, \xi(\beta)_4, \xi(\beta)_5; x(k)^1), \\ \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3, \xi(\beta)_4, \xi(\beta)_5; x(m)^1), \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3, \xi(\beta)_4, \xi(\beta)_5; x(n)^1), \\ \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3, \xi(\beta)_4, \xi(\beta)_5; x(p)^1), \varphi(\xi(\beta)_1, \xi(\beta)_2, \xi(\beta)_3, \xi(\beta)_4, \xi(\beta)_5; x(q)^1)) \equiv 0$$

Задача состоит в том, чтобы найти функцию шести $(5 + 1)$ существенных переменных

$$\varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3, \xi(\alpha)_4, \xi(\alpha)_5; x(i)^1)$$

Дорогой Семён, не могли бы Вы привести в явном виде выражение для репрезентатора

$$\varphi_{\alpha i} = \varphi(\xi(\alpha)_1, \xi(\alpha)_2, \xi(\alpha)_3, \xi(\alpha)_4, \xi(\alpha)_5; x(i)^1)$$

в случае полученного Вами решения сакрального уравнения ранга (2,6)?

Искренне Ваш Юрий Иванович

Письмо 19. 4 января 2004 г.

Дорогой Юрий Иванович!

Двигаемся по порядку.

1. О теореме Михайличенко

Мотив 1. Известно, что, зная производную, можно получить некоторую информацию о поведении самой функции. Однако по производной функция восстанавливается не однозначно (с точностью до произвольной постоянной), вследствие чего производная не в полной степени характеризует свойства исходной функции. Если мы имеем функцию двух переменных, то, зная ее первые частные производные, мы можем восстановить исходную функцию уже с точностью до произвольных функций одной переменной. Для функций многих переменных степень произвола будет еще выше. В принципе, лишь совокупность всех производных в полной степени характеризует гладкую функцию. Конечно, если к дифференциальному уравнению добавить краевые условия, то всё будет в порядке. Но здесь разговор иной: по функции производная восстанавливается однозначно, по производной функция – нет. Мы имеем дело с неэквивалентным преобразованием.

Мотив 2. Мы имеем исходный объект – уравнение (1). В результате дифференцирования мы получаем систему (2). А теперь представьте, что мы будем дифференцировать каждое из уравнений (2) по каждой из переменных или, что то же самое, дважды дифференцировать уравнение (1) по всем переменным. В результате получается некоторая система (3) относительно уже вторых производных. Это качественно иная задача, также содержащая в себе некоторую информацию об (1). Понятно, что (2) есть следствие (1), но это – не единственное следствие. Система (3) дает некоторую дополнительную информацию. Если мы работаем с бесконечно дифференцируемые функциями, то лишь вся совокупность уравнений, полученных в результате дифференцирования любого порядка, даст полную информацию о системе.

Мотив 3. Представьте себе, что мы выполняем над уравнением (1) другое преобразование, например, жестко фиксируем одну переменную. В результате получается новое более простое уравнение (2) с меньшим числом переменных. Будучи следствием уравнения (1), оно несет в себе некоторую информацию о нем. Но, естественно, не всю. К примеру, по функции одной переменной функцию двух переменных не восстановить. Это тривиально. Однако действие – аналогичное. Из данного уравнения выводится более простое следствие. Будучи более простым, оно допускает более детальный анализ. Но природу-то не обманешь. Раз мы упростили задачу, значит, за это придется платить. Преобразование не эквивалентно. А потому, не все свойства уравнения (2) переносимы на (1).

Мотив 4. Ранее я приводил решения тех или иных уравнений, которых не должно было быть, если верна теория. Чтобы проверить, прав я или нет, достаточно подставить найденные мною решения в уравнение. В последнем письме я привел решение для уравнения ранга (2,6), которое было признано не разрешимым. Найденное решение гладкое и включает в себя все переменные, т.е. никак не может быть отброшено по внешним признакам.

Вывод, думаю, понятен. Но возникает другой вопрос: а действительно ли Вам нужно, чтобы одни уравнения имели только те решения, а другие вообще не имели решения? Разве это – главное в Вашей теории. Я ведь не отрицаю ни на одно из полученных решений, а значит, не покушаюсь ни на один из позитивных результатов. А вдруг Вы еще сможете найти физический закон, место которого лежит вне той узкой зоны, которую указал Михайличенко?

В основаниях математики есть удивительный результат – теорема Лёвенгейма – Сколема (она же, мотив 5), сильно связанная со знаменитыми теоремами Гёделя о неполноте и Тарского об истинности. Суть этого утверждения состоит в следующем:

любая достаточно содержательная аксиоматическая теория, призванная описывать некоторый заранее фиксированный класс объектов, будет непременно описывать, по крайней мере, один объект, указанному классу не принадлежащей. Другими словами, теории, призванной описывать эти и только эти объекты (не важно, какие именно, но фиксированные заранее) просто не существует. Понятно, что речь идет о теореме, относящейся исключительно к математической логике. Но, я думаю, подобно теоремам Гёделя и Тарского у данного утверждения есть общефилософский смысл.

В теореме Михайличенко есть положительная часть (такие-то уравнения имеют такие-то решения) и отрицательная часть (ничего иного нет). Думаю, от второй части придется отказаться. Есть, правда, альтернатива: найти такие хитрые ограничения, чтобы нужные Вам ограничения отсеивали "нехорошие" решения, оставляя лишь "хорошие". Но для этого нужно четко знать, что такое хорошо и что такое плохо. Отличить по свойствам мое решение уравнения ранга (2,6) от известных Вам результатов не просто. Кроме того, у нас нет методов выделения всего множества решения этих уравнений. Если удастся забраковать имеющиеся "нехорошие" решения, то нет никаких гарантий, что мы не найдем новые решения, не подпадающие под выбранный критерий отбора. К тому же надо иметь в виду, что в случае разработки аксиоматической теории физических структур, то она может попасть под действия теоремы Лёвенгейма – Сколема с известными последствиями. Так действительно ли нужна негативная часть теоремы Михайличенко?

2. О линейности в математике.

Вот здесь-то мне есть, что сказать всерьез, поскольку основные мои результаты (включая докторскую диссертацию) посвящены именно этому вопросу. Прежде всего, линейная математика – это раздел алгебры, наиболее формализованной, наиболее разработанной части математики. Линейная структура – структура чисто алгебраическая. Алгебра (со времен Гильберта – Нётер – Ван дер Вардена) – это теория операций. Операция – это непременно конечная процедура. Именно этим обстоятельством объясняется сила и мощь алгебраических методов. Но и ограниченность их применения. В нелинейных задачах алгебраический аппарат не решает проблему в целом. Однако, возможно, в какой-то степени алгебраический аппарат всё же удастся применить для анализа нелинейных систем. Как? С помощью линеаризации – ведущего метода нелинейного анализа.

Что является основой метода линеаризации (т.е. линейной аппроксимации нелинейной системы)? Ответ известен – операция дифференцирования! Как сказал Жан Дьёдонне, один из главных персонажей команды Бурбаки *"основная идея дифференциального исчисления... локальное приближение функции линейной функцией"*. Далее Дьёдонне замечает, что тот факт, что производной функции одной переменной (например, синуса) оказывается другая функция одной переменной (тот же косинус) носит случайный характер, вводящий людей в заблуждение. Это, выражаясь словами Кулакова, явление, а не сущность. В чем же истинная природа дифференцирования, ее, так сказать, сакральный смысл? Ответ простой – это процедура локальной линейной аппроксимации. В неявной форме это уже содержалось в основаниях дифференциального исчисления.

Что такое производная по Ньютону в его геометрической интерпретации – тангенс угла наклона касательной. Это значит, что в малой окрестности точки рассматриваемый нелинейный объект (кривая) может быть аппроксимирован линейным объектом (касательной). Что такое дифференциал по Лейбницу – главная линейная часть приращения функции. Подчеркнем слова "линейная" и "главная". Интерпретация – та же: нелинейный объект (функция) локально аппроксимируется ("главная" – значит, есть приближение, тем более точное, чем меньше выбрана область аппроксимации) линейным (дифференциалом).

На этих принципах строится огромное количество математических результатов. Что такое метод Ньютона (он же, метод касательных!) для решения нелинейных уравнений? После его распространения Канторовичем на операторные уравнения стало отчетливо видна его линеаризационная природа: решение нелинейной задачи сводится к последовательности решений линейных задач. Соответствующие линейные задачи получаются в результате дифференцирования данного оператора. На чем держится вся теория экстремума? Условие Ферма экстремума функции, уравнение Эйлера, принцип максимума Понтрягина и многое другое получаются в процессе вариации функционала, что эквивалентно его дифференцированию. Всё это – необходимые условия первого порядка. Кстати, их недостаточность в общем случае (неэквивалентность исходной задаче) опять-таки обусловлена именно тем обстоятельством, что в процессе исследования учитывались лишь члены первого порядка, получаемые в процессе дифференцирования. Отметим, что к линеаризации и дифференцированию я пришел именно из теории экстремума. А что такое первый метод Ляпунова – основной аппарат теории устойчивости динамических систем? Это установление устойчивости нелинейной системы по ее линейному приближению, получаемому в процессе дифференцирования исходного оператора. Что является основным инструментом исследования групп Ли, играющих чрезвычайно важную роль в геометрии, да и не только там? На это дал ответ сам Софус Ли – переход от исследуемого нелинейного объекта (группы Ли) к объекту чисто алгебраической природы (алгебре Ли) с помощью линейной аппроксимации, т.е. того же дифференцирования. А что такое гладкое многообразие? Это нелинейный объект, который локально устроен также, как линейное пространство. Всё это (перечень естественно, не полный) нелинейных объектов, которые исследуются на основе теорий первого порядка, получаемых в результате локальной линейной аппроксимации на основе операции дифференцирования.

Кстати, результат, за которым я охочусь много лет выглядит примерно так. То, что дифференцирование это операция локальной линеаризации – давно известно. Я хочу показать обратное, т.е. показать, что любой объект, который можно локально линеаризовать, в определенном смысле дифференцируем. Если это так, то дифференцирование и локальная линеаризация – это одно и то же... Но вернемся к делу.

Так откуда же у Вас появляется аппарат линейной алгебры: матрицы, определители и т.д. Вы для исследования исходного нелинейного уравнения применили технику линеаризации, т.е. построили теорию первого порядка с помощью всё той же процедуры дифференцирования. И получили Вы именно то, что и должно получиться в подобной ситуации. Ваш выигрыш состоит в том, что от совершенно не подъемной нелинейной задачи Вы перешли к линейной системе, допускающей какой-то положительный анализ. Ваш неминуемый проигрыш – отсутствие эквивалентности полученной задачи исходному уравнению, а значит, неполное соответствие полученных результатов постановке задачи. Кое-какие выводы оказались верными: некоторые решения некоторых уравнений были действительно найдены. Но не все. Это закономерно для любой теории первого порядка. К примеру, необходимым условием (Ферма) экстремума функции является равенство нулю ее производной в этой точке (отметим появление первой производной – неперенный признак теории первого порядка). В чем преимущество этого результата? Точку экстремума функции f следует искать исключительно среди решений уравнения $f'(x)=0$. В чем ограниченность этого подхода? Не всякое решение данного уравнения доставляет экстремум данной функции. Общий вывод, неизменный для любой теории первого порядка: линейное приближение дает определенную информацию о нелинейном объекте, но не всю.

До встречи,
Семен.

Письмо 20. 5 января 2004 г.

Дорогой Юрий Иванович!

Ну конечно, я искал решение уравнения $\Phi\varphi=0$, не предъявляя дополнительных требований к функции φ . Конкретный вид φ у меня приводится – простейшее аддитивное представление. Конечно, если считать, что функция φ для уравнения ранга (r,s) должна зависеть от $r-1$ произвольных функций одного аргумента и $s-1$ произвольных функций другого аргумента, то приведенная функция не подпадает под это требование со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Собственно, я отталкивался от основополагающего определения физической структуры, приведенного на стр. 52, где указанное требование отсутствует. Там, правда, говорится, что область определения φ будет уточнена в дальнейшем. Но область определения – это лишь диапазон изменения аргументов, т.е. нечто иное. Правда, на последующей странице сказано, что можно показать, что искомая функция φ должна быть представима в соответствующем виде. Но эта фраза как будто подразумевает, что соответствующий вид φ является не априорным требованием к постановке задачи, а результатом каких-то преобразований, и непосредственным объектом исследования остается уравнение (1), т.е. $\Phi\varphi=0$, которое я и пытался исследовать. Опять-таки на стр. 54 приводятся решения уравнения ранга $(2,2)$ в конкретном виде, т.е. без каких-либо произвольных функций. Понятно, необходимый произвол (введение двух произвольных функций) получается без труда, но приводятся-то решения конкретные. К тому же, изначально получив первые сакральные уравнения, я сразу же запросил ограничения на функции Φ и φ , но про указанное свойство сказано не было и во всех представленных ранее решениях я нисколько не заботился о его выполнении. Понятно, что мне стоило более внимательно читать книгу, где об этом говорится. Так что прошу прощения.

Подводим итоги. Во-первых, приведенное мною решение уравнения ранга $(2,6)$ теореме Михайличенко не опровергает, поскольку соответствующему требованию не удовлетворяет. Возникает вопрос: могу ли я найти сходный контрпример? Та методика, которой я пользовался при построении решения уравнения ранга $(2,6)$ легко формализуется и переносится на структуру ранга (r,s) . Я могу найти решение общего уравнения указанным способом с функцией φ , зависящей от q произвольных функций любого аргумента, но при непременном условии $q \leq rs - r - s$. Естественно, при $q = (r-1)(s-1)$ мы получаем превышение максимально допустимого значения q ровно на единицу, т.е. на минимально возможную величину, что едва ли случайно. Таким образом, указанный прием не позволит в принципе построить контрпример к теореме Михайличенко. Следует ли из этого, таких примеров вообще нет? Не следует. Это говорит лишь об отсутствии у меня контрпримера в данный момент. Можно ли построить такой пример или нет, я не знаю. Меня настораживает допустимость решения в нужной форме для уравнения ранга $(2,4)$. Это единственный случай, разрешенный Михайличенко, для которого использованный мною прием решения уравнения $\Phi\varphi=0$ с нужными свойствами φ не срабатывает. Условие $q \leq rs - r - s$ при $q = (r-1)(s-1)$ для него нарушено, а результат есть. Это говорит о том, что существует более сильный метод решения уравнения $\Phi\varphi=0$, чем тот, которым я пользовался. Что это за метод и можно ли с его помощью построить соответствующий контрпример, я не знаю. Но случай $(2,4)$ меня смущает. Если бы у меня был общий метод решения уравнения произвольного ранга, включающий этот случай и исключаящий все остальные, ситуация бы существенно прояснилась. Хочу лишь отметить, что неэквивалентность исходного уравнения и системы уравнений относительно производных остается в силе. Если существует доказательство теоремы Михайличенко, не использующее этот прием, то моя критика отпадает. В противном случае сомнения остаются.

Еще один важный вопрос – происхождение указанного ограничения на Φ . Для априорного ограничения оно представляется несколько искусственным (Вы же явно работали и с конкретными Φ). Скорее всего, это следствие чего-то более естественного. Единственное, что мне приходит на ум, это возможные ограничения на Φ . Возможно, для этой функции матричного аргумента важна инвариантность относительно произвольной замены строк и столбцов аргументов. Указанное свойство можно в общем виде записать в виде условия $\Phi P_{ij} = \Phi = \Phi P^{kl} \forall i,j;k,l$, где P_{ij} – перестановка i -ой и j -ой строки матрицы, а P^{kl} – перестановка ее k -ого и l -ого столбцов. Необходимым свойством обладают определители, и у Вас используются именно такие Φ . Существуют ли другие функции матричного аргумента с таким свойством, я не знаю. Кстати, если не налагать указанные ограничения на Φ , то я, возможно, смогу найти решения уравнений с допустимым видом Φ (в разрешенном диапазоне рангов), но с качественно иным Φ , т.е. не сводящиеся к допустимым решениям.

Так или иначе, мы возвращаемся к четкой постановке задачи – к строгому определению физической структуры. В любом случае ситуация прояснится.

С уважением, Семен.

Письмо 21. 11 января 2004 г.

Дорогой Юрий Иванович!

У меня сейчас серьезные проблемы со временем в связи с предстоящей поездкой к Вам (билеты я взял на указанные ранее даты). Поэтому написать обстоятельный ответ на Ваши последние письма пока не могу. Но кое-какие обрывочные мысли постараюсь высказать.

1. Сакральная математика и основания математики. Прежде всего, (о чем я уже писал) ссылка на Энгельса как на рупора официальной науки выглядит, мягко говоря, странной. Это что, авторитет в области математики? Мало ли что писал Математический словарь в те годы. Это утверждение содержит здравые мысли, но даже в 19-ом веке существовало много глубочайших результатов, не подпадающих под это определение, никакой официальной наукой (что это вообще?) не признанное. О природе математических аксиом сказано уже так много и будет сказано еще немало. Но достаточно назвать два имени – Гильберт и Гёдель (собственно, после Гёделя, как мне кажется, радикальных сдвигов и не было). Об условном характере аксиом известно, по меньшей мере, уже два века (вспомним неевклидовы геометрии и кватернионы). Определенный (естественно, в разумных пределах) плюрализм в выборе аксиом – исторический факт: вспомним, например, конвенционализм Пуанкаре, многообразие геометрий Гильберта и, что самое главное, теорему Гёделя, где этот факт получил безупречно строгое обоснование. Наглядность при выборе аксиом характерна лишь для евклидовой геометрии (да и то, как показал Гильберт, не в полной степени) и (с определенными оговорками) для натуральных чисел. О какой там наглядности можно говорить для аксиом оснований математики (а на них всё держится) или абстрактной алгебры, топологии и теории меры (а это важнейшие классы математических структур, из которых строится всё остальное)?

В моем понимании строения математики то, что находится ниже в архитектуре – это ее основания, фундамент для того, что расположено выше. Поэтому более общие (и более простые) структуры располагаются ниже, а более частные (сложные, специализированные, адаптированные к приложениям) – выше (здание строится снизу вверх). Можно, конечно, рассуждать и так – то, что выше – ближе к небу, то, что внизу – покоится на грешной земле. Но это уже не столь уж принципиально. Но вот, что мне явно не нравится – деление пополам. Всякое возведение границ – дело не благодарное. На мой взгляд, математика сама по себе вообще не описывает явления, а характеризует исключительно сущность. То, что принято называть прикладной математикой, на самом деле разделом математики не является, подобно тому, как экспериментальная физика

никак не является разделом физики. Поэтому я по-прежнему не понимаю, что такое сакральное математика и в чем необходимость этой концепции.

Я не знаю, кто конкретно считает, что математика сводится к бесконечному усовершенствованию антропных моделей. Не думаю, что в этом смысле она чем-либо отличается от физики, живописи или религии. Да, конечно, математика работает с моделями. Да, они являются антропными по происхождению в том смысле, что были предложены отдельными конкретными людьми. Да модели постепенно совершенствуются. Но сводить математику к этому... Математика дает (и постепенно пополняет) многообразие логически не противоречивых мыслимых форм. А поскольку все нормальные науки (физика, биология, экономика, психология и др.) призваны разрабатывать концепции тех или иных классов явлений, они непременно нуждаются в каких-либо формах для наполнения их конкретным содержанием. Все математические конструкции несут в себя потенциальную востребованность, хотя большинство наработок так и остаются не задействованными. Периодически те или иные математические положения, ранее не находившие применения, оказываются позарез необходимыми для чего-нибудь. Часто бывает и наоборот – в приложении возникла необходимость в форме, отсутствующей в данный момент в математике. Тогда математики вынуждены восполнять обнаружившийся пробел.

Сама по себе математика в окружающем мире не нуждается (зато окружающий мир остро нуждается в ней). Это, так сказать, чистый полет мысли. Однако именно приложения (как правило, физика) подбрасывают математике идеи, нуждающиеся в оформлении. И среди практически не ограниченного множества потенциально осуществимых математических объектов стимулируется развитие некоторого весьма ограниченного класса конструкций, что служит путеводной звездой, в первую очередь, для математиков-прикладников. Последние ставят задачи перед математиками-теоретиками (аналитиками), призывая их разработать необходимый инструментарий. Часто эту функцию выполняют сами физики, но они, будучи не профессионалами в этой области, всё-таки хуже ориентируются в здании математики и могут не знать, что там припасено в дальних закоулках. А со временем за дело берутся математики-системщики, призванные навести порядок в тех перестройках, вызванных вновь появившимися идеями.

Словом, здесь есть немало того, что стоит обсудить. Но есть вещи, где предмет разговора остается пока вне моего понимания. К примеру, что понимается под сакральным смыслом числа "пи"? Ну да, возникло это число в геометрии – единственном "наглядном" разделе математике. Но всё многообразие появления этого числа в математике сводится к эквивалентным конструкциям. А иначе и быть не может, коль скоро речь идет об одном и том же объекте. К примеру, "пи" является естественным значением функции "синус". Последняя, будучи бесконечно дифференцируемой, представима в виде ряда Тейлора. Отсюда следует представление числа "пи" в виде ряда. Это представление может быть выбрано в качестве альтернативного определения числа "пи", не зависящего от наглядных конструкций (что было известно уже в первой половине семнадцатого века Валлису, хотя несколько членов ряда как приближение "пи" были известны средневековым арабским математикам и отчасти Архимеду). Самое важное здесь то, что такое определение в полной степени вписывается в концепцию действительных чисел Кантора, т.е. "пи" низводится до роли одного из элементов этого класса, чем оно и является. А теперь мой вопрос: чем такая концепция числа "пи" (а ей фактически уже без малого 400 лет) нас не устраивает? В чем тут предмет обсуждения? Примерно то же самое можно сказать и о других конкретных математических объектах, давно нашедших конкретное место в здании математике.

2. О 22 математических проблемах на предмет обсуждения. О проблеме сакральности поговорить стоит хотя бы для того, чтобы прояснить ситуацию и лучше понять друг друга.

Точная формулировка теории физических структур – безусловный предмет разговора. Но здесь моя функция – чистильщика. Думать здесь Вам. Но я могу попытаться слегка подправить форму.

Проблема единственности решений – обязательно. Однако ее глубокое исследование требует времени. Поэтому, к сожалению, в данный момент я вынужден отложить в сторону и проверку доказательства, и поиск новых решений, и изучение постановки задачи. Последний вопрос, думаю, и будет главным предметом разговора. А уж над следствиями, возможно, подумать придется позднее.

С бинарными отношениями ситуация иная. Если под этим понимается математический объект, поименованный именно так (в математической литературе никаких разночтений на этот счет нет), то здесь я, пожалуй, могу быть хозяином положения. В том смысле, что достаточно хорошо представляю, что это такое и для чего это надо. У меня этому объекту посвящена отдельная комната на втором этаже Архитектуры. Всё, что мне известно, я готов рассказать. Деление математических структур на поколения я не понимаю, но могу сказать определенно. Теории бинарных отношений и действительных чисел никак не могут быть объектами одного класса (поколения?) структур хотя бы потому, что первая из них многозначна, а вторая однозначна. Это означает, что существует много неизоморфных бинарных отношений, но лишь одна самостоятельная теория действительных чисел (все известные теории действительных чисел изоморфны, т.е. описывают один и тот же объект, хотя и разными словами). Кстати, все структуры порядка представляют собой маленький частный случай бинарных отношений. Проблему новизны этой теории я не понимаю. Если речь идет о бинарном отношении, как его принято понимать в математике, то это чрезвычайно хорошо известный объект.

Мне достаточно хорошо знакомы все четыре известные теории действительных чисел: формально аксиоматическое определение, Дедекинда (основанное на структурах порядка), Кантора (самое конструктивное, основанное на процедуре пополнения, а значит, на равномерных структурах) и Вейерштрасса (через десятичные дроби, что фактически является частным случаем определения Кантора). На мой взгляд, здесь спорить не о чем (в чем проблема?). Но всё, что знаю, готов рассказать. Кстати, именно канторово определение действительного числа дало мне инструмент для обоснования процедуры вывода уравнений математической физики.

Двухиндексные переменные, биполярность объектов и их тройная дихотомия не относятся к числу известных мне понятий. Однако при наличии их четкого определения, я, возможно, отыщу им место в здании математики.

Двухэлементное множество представляется достаточно простым объектом. Едва ли отсюда можно вывести математическую логику (обширное направление с собственной проблематикой), алгебры Буля (конкретную алгебраическую структуру) и элементарную (?) теорию множеств (двухэлементный объект сам относится к теории множеств, причем весьма элементарной). Но поговорить можно.

Сакральная физика – Вам и карты в руки.

Происхождение производной и ее природа – уже мой хлеб. С этим вопросом напрямую связана моя докторская диссертация. Исторические корни здесь – три интерпретации производной Ньютона, восходящие к трем интерпретациям переменной величины у Декарта. И это притом, что истинная природа операции дифференцирования стала в определенной степени ясна, когда перешли сначала к функциям многих переменных, а потом – к операторам (я, собственно, и занимался операторами). Выход на физическую природу дифференциальных уравнений (вопрос совершенно самостоятельный, хотя и базирующийся на предыдущем) – более чем интересная проблема. Она имеет самое непосредственное отношение к моей ныне завершаемой книге, посвященной обоснованию процедуры вывода уравнений математической физики. Было бы весьма интересно (надеюсь, не только для меня), если этому вопросу будет у нас посвящен отдельный

семинар. Но природа дифференцирования – вопрос совершенно самостоятельный, о котором стоит поговорить отдельно. Именно отсюда – путь к линейным структурам.

В геометрии я не столь уж силен. Далеко не все геометрические классы мне известны. Но кое-что мне все же известно. Здесь можно особо поговорить о сущности геометрической размерности, проблеме, как мне кажется, представляющей для Вас интерес. Здесь мне, пожалуй, будет, что сказать. С римановой геометрией я знаком не очень хорошо, а о финслеровой знаю только то, что таковая имеется и как-то связана с обобщением метрического пространства.

Природа скалярного произведения, расстояния, площади и объема мне, напротив, более или менее известна. Прежде всего, единственное, что их объединяет, так это то, что все они являются функционалами. Однако первое из этих понятий стоит явно особняком. В то же время остальные три являются мерами, т.е. относятся к классу измеримых структур. Кстати, у меня сложилось впечатление, что Вы несколько недооцениваете этот тип структур. А ведь им Бурбаки посвятили свою шестую книгу, включающую три солидных тома. Теория измеримых структур едва ли сильно уступает алгебре и топологии (никак к ним не сводясь) и существенно превосходит теорию упорядоченных структур (весьма простых по своим свойствам). Скалярное произведение в отличие от всех выше указанных относится к числу смешанных структур. Оно может быть определено исключительно на линейном пространстве (то есть весьма частном алгебраическом объекте). Пространство со скалярным произведением неминуемо является нормируемым, т.е. обладает чрезвычайно сильными (а значит, по математическим рамкам, весьма редкими) топологическими свойствами. Наконец, именно теория меры вскрывает то обстоятельство, что оригинальных (не изоморфных друг другу) пространств со скалярным произведением крайне мало. А это, в свою очередь, служит свидетельством того, что речь идет о структуре весьма специфической (зато с чрезвычайно богатыми свойствами). С другой стороны, длина, площадь и объем – это меры Лебега (точнее их частные случаи) в евклидовом пространстве одного, двух и трех измерений.

О линейных математических объектах – разговор особый. Природа линейности меня волнует очень сильно (собственно именно сюда выводит теория дифференцирования). С тензорами (включая метрический) и спинорами я никогда не работал. Зато немного разбираюсь в общей теории линейных пространств, в рамках которой все этого излагается. Квадратичные формы – часть линейной алгебры, стало бы – часть той же проблемы. Где-то рядом (в здании математики) расположены и определители. В этой серии вопросов для меня покрыто туманом словосочетание "сакральное происхождение". Для каждого из указанных понятий есть аксиоматическое определение. Но это – вопрос номер один из отмеченных ранее.

По поводу конкретных чисел и функций я уже писал. В чем проблема, я не понимаю, но поговорить готов. Что такое "пограничные столбы" на числовой оси – я не знаю.

Шестая проблема Гильберта – хлеб не мой. Но поговорить готов с большим удовольствием. Вот только в связи с возможностью ее полного решения мне почему-то сразу на ум приходит нечто знакомое... Решение этой проблемы не может не оказаться аксиоматической теорией, содержащей арифметику. А тогда в силу теоремы Гёделя она неминуемо окажется не полной. На аналогичном месте споткнулся сам Гильберт. Правда, речь идет о понятии полноты в строго математическом (гильбертовом) смысле.

О месте математики в любой картине мира я говорить готов всегда и везде.

Если хотите, я мог бы, помимо всего прочего, дать предельно краткое и доступное (например, для Ваших учеников) изложение теории структур Бурбаки и близкой, но существенно более часто применяемой на практике теории категорий.

3. О книгах. Вопрос о написании книг – открыт. Сейчас я не вижу их предмета. Слово "сакральный" вообще, а в математике в особенности, для меня до сих пор носит несколько туманный смысл. Ни в логике, ни в геометрии я специалистом не являюсь, хотя кое-что

мне естественно знакомо. Вопрос открыт, но не закрыт. Возможно, при встрече ситуация прояснится.

Свои книги я, конечно, привезу. Должен сказать, что у меня есть и другие книги, некоторые из которых, возможно, будут для Вас и Ваших учеников небезынтересны. Даю их полный перечень (кроме Архитектуры):

- **Математические и компьютерные модели в экологии. 1999 г.** Едва ли это для Вас интересно. Эту книгу я написал по просьбе руководителя нашей межкафедральной специальности (магистратуры) "экология".
- **Математическое моделирование. 2000 г.** Это может Вас (тем более, Вашу молодежь) в некоторой степени заинтересовать. В принципе – это курс лекций для студентов-математиков. Большая часть материала (в частности, известные модели физических процессов) не представляет для Вас ценности. Но здесь есть еще общая концепция математической модели и характеристика места математики в общей картине мира (первая лекция). Небезынтересно должно быть и то обстоятельство, что я не ограничиваюсь физическими моделями, забираясь (правда, очень не глубоко) в химию, биологию, экономику, социологию и др. Я стремлюсь показать, что для математика нет принципиальной разницы между, к примеру, физикой и психологией.
- **Контрпримеры в теории оптимального управления. 2001 г.** Будучи поклонником Вейерштрасса, я вообще люблю собирать и придумывать контрпримеры. Сюжет это чрезвычайно интересный (книгу сейчас переводят на английский язык), но для более узкого круга читателей.
- **Введение в спектральную теорию операторов. 2003 г.** Хотя здесь описан сравнительно специальный сюжет (в сравнении с Архитектурой и Моделированием), это может быть интересно и для Вас. По крайней мере, в наших краях физики проявляют к этой книге больший интерес, чем математики. Здесь я уделяю большое внимание природе явления (в частности, показываю, что основные идеи спектральной теории могут быть изложены на примере простейшего линейного алгебраического уравнения первого порядка). Книга является самодостаточной, т.е. не требует практически никаких предварительных знаний. Несмотря на изрядную избитость сюжета, изложена она не стандартно. Немалую роль (хотя и в неявной форме) здесь играет теория структур (или категорий, что в данном случае не принципиально). Первая часть (конечномерная) является чисто алгебраической, всё укладывается в теорию линейных пространств. Отказавшись от конечномерности, мы тут же попадаем под власть топологии. Разложение вектора по координатным осям в бесконечномерном случае преобразуется в ряд Фурье, который должен сходиться (сходимость – это чисто топологическое понятие). Наконец, в заключительной части книги снимается требование компактности, и синтезирующая все три уровня теория строится уже на базе теории меры (конечная сумма, бесконечный ряд и обычный интеграл в действительности различаются только выбором меры).

Если что-то Вас (или кого другого) заинтересует, сообщите. Должен сказать, что все эти книги (как и Архитектура) не содержат моих оригинальных результатов (в отличие от завершаемой мною сейчас книги *Секвенциальные модели математической физики* и планируемой в далекой перспективе книге по теории дифференцирования и линеаризации бесконечномерных объектов). Я здесь лишь интерпретатор.

Возможно, до отъезда, завершив прочие дела, я попытаюсь как-то упорядочить всё сказанное, чтобы сэкономить время на месте.

С уважением,

Семён.

P.S. Сообщите, пожалуйста, как Вас найти в Новосибирске.

Письмо 22. 15 января 2004 г.

Дорогой Юрий Иванович!

Я понемногу привожу в порядок все свои дела и, как водится, освобожусь полностью лишь в последний день. На данный момент у меня примерно следующее виденье программы действий. Имеются большие вопросы:

1. **Цель.** Проблема сакральности в физике и математике. Что нас не устраивает в том, что есть? Что мы хотим, вообще?
2. **Состояние.** Что уже сделано в нужном направлении, в принципе? Какие выводы можно сделать из конкретных результатов? Какие еще имеются пробелы? Где имеются сомнительные места?
3. **Формализация.** Аксиоматическое определение физической структуры и сакрального уравнения. Четкая постановка задачи с обоснованием налагаемых ограничений на ее параметры и свойства решения. Четкая формулировка результатов. Здесь же проясняется ситуация с проблемой единственностью.
4. **Инструментарий.** Обсуждение природы тех или иных математических понятий, их расположения в здании математики и степени востребованности в физике.
5. **Перспективы.** Что мы собираемся делать вообще и в ближайшее время, в частности, в свете обсуждения предшествующих вопросов.

Думаю, наша встреча должна начаться с разговора о первых двух вопросах. При этом Ваша миссия – говорить, а моя – задавать глупые вопросы (разве что по ходу дела возникнут какие-либо общематематические проблемы). Как только мы разберемся с этими предварительными вопросами (т.е. когда я более или менее пойму предмет разговора), мы принимаем план конкретный действий на время моего визита, согласовываем программу семинаров и т.д.

Решение проблемы формализации, видимо, потребует совместных усилий. Вы объясняете мне, что Вы хотите. Я пытаюсь подобрать под это содержание необходимую форму. Сложность здесь неминуемо возникнет, поскольку я исхожу из того, что я ничего не знаю и ничему не верю. Всё должно быть максимально упрощено и не содержать никаких неясностей. Хочется верить, что какие-нибудь сдвиги будут.

Четвертый вопрос может решаться отчасти параллельно с предшествующим. Вы предлагаете список математических проблем и объясняете, что Вы думаете и что хотите. Я готов в любой форме участвовать в обсуждении.

В последний день подводим итоги.

До встречи (теперь уже действительно скорой).

Семен.

Письмо 23. 23 января 2004 г.

Дорогой Юрий Иванович!

Вот я и вернулся назад. Мои общие впечатления от встречи – однозначно положительные. Если брать за основу перечень предложенных Вами изначально вопросов, то мы не так уж далеко продвинулись вперед. Но я думаю, что сделано главное. Я понял, наконец, что такое физическая структура. Вы, как я думаю, несколько изменили свое представление о математике. Мне было чрезвычайно интересно познакомиться с окружающими Вас людьми, и было бы удивительным, если бы они оказались иными. Я не очень избалован встречами с живыми творчески активными людьми. Так что все было прекрасно. Думаю, в обозримом будущем я соберу здесь интересующийся народ, чтобы обсудить итоги. К сожалению, в ближайшие несколько месяцев я буду сильно загружен в связи со сдачей своего договора. Поэтому на серьезную работу я пока не способен.

Впрочем, время в поезде даром я не терял. Главный итог – скорректированное определение физической структуры, которое я прикладываю к письму (этот материал я направляю параллельно Михайличенко и Симонову). По сравнению с тем вариантом, о

котором мы говорили непосредственно перед моим отъездом, были сделаны следующие изменения:

- Мне кажется, что репрезентатор и верификатор необходимо ввести непосредственно в определение физической структуры.
- Аксиома разрешимости (возможность однозначного определения одной из связей при известных значениях остальных связей) важна лишь на стадии построения уравнения. В этой связи ее можно не требовать при определении физической структуры, поскольку разрешимость все же относится скорее к средству, а не к цели. В этой связи появляется понятие разрешимой физической структуры, где это средство работает, и структуры общего вида (не разрешимые), которые, как мне кажется, вполне осмысленны, хотя и не ясно, что с ними делать.
- Понадобилось более глубоко вскрыть природу эталонных элементов. Здесь фактически всплыло два самостоятельных вопроса. Первый из них состоит в следующем: что определяет структуру – конкретные эталонные элементы или все-таки их количество на каждом множестве объектов. Я предположил второе, хотя возможно это и не так. Второй вопрос состоит в независимости эталонных элементов. Возможно, какой-то эталон может быть выражен через остальные, т.е. является зависимым. В этом случае необходимости в таком эталоне нет. Таким образом, пришлось ввести еще не совсем глубоко проработанные понятия зависимости эталонов и эталонной размерности. Подумав, я включил также в состав аксиом физической структуры аксиому о согласованности всех эталонов на разных множествах объектов. Ранее у меня это требование было, но почему-то не включалось в состав аксиом.
- Для того чтобы локализовать теоремы Михайличенко, я ввел также понятие дифференцируемой физической структуры, т.е. такой, у которой репрезентатор и верификатор дифференцируемы. Этим более четко устанавливается и направленность работ Андрея.

Было бы неплохо, если бы Вы проанализировали этот материал. Может быть, я что-то не так понял или упустил из виду.

Помимо этого я просмотрел начало первой книги Михайличенко. Некоторые мысли на этот счет я направляю ему непосредственно. Кроме того, я прочитал первую книгу Целищева – *Философия математики*. Книга, безусловно, интересная. Жаль, что мне не удалось познакомиться с его автором. Благодаря этой книге я непременно сделаю несколько замечаний в новом варианте моей *Архитектуры*. Книга написана с умом и со знанием дела, а именно, математики, что удивительно для философа. Вот только название книги, как мне кажется, намного шире сюжета. Здесь описывается исключительно проблемы философии оснований математики. Это, конечно, момент ключевой, но далеко не единственный. В результате за бортом остаются ряд чрезвычайно важных философских проблем математики. Возможно, впрочем, они составляют сюжет последующих книг автора.

До свидания, Семен

Письмо 24. 31 января 2004 г.

Дорогой Юрий Иванович!

Оглядываясь назад и вспоминая несколько дней, проведенных в Новосибирске, я говорю: это было прекрасно! Я уже не помню, когда я мог в такой степени отвлечься от всякой ерунды и заниматься настоящими делами. Тем более остро чувствуется та научная изоляция, в которой я нахожусь. Сейчас я сразу погрузился в эту затхлую атмосферу, в грязные интриги наших местных деятелей от науки (завершая проект, я вынужден с ними

общаться). Мне бы только продержаться до апреля, сдать проект и послать их всех подальше. Но эти два-три месяца будут стоить мне очень дорого. Пока я не способен ни на какую активную работу, но этому будет конец.

Со всеми Вашими алма-атинскими знакомыми я уже говорил (включая Сергея Михайличенко), и приветы от Вас передал. В ближайшее время мы проведем небольшой семинар по результатам моей поездки к Вам. Может быть, появятся какие-нибудь новые мысли.

В плане формализации физических структур я хочу обратить Ваше внимание на проблему независимости эталонов. Этот вопрос мне пришел в голову лишь в поезде. Самостоятельно я его решить не могу, поскольку проблема эта скорее физическая, чем математическая. Итак, эталон – это такой объект данного множества, для которого известна связь с любым объектом другого множества. Однако если мы имеем несколько таких объектов, то, возможно, одни из них как-то выражаются через другие, вследствие чего их можно исключить из рассмотрения без потери информации. Добавление "лишнего" эталона по идее не должно менять размерность физической структуры. Здесь напрашивается аналогия с понятием алгебраической размерности. Этим и объясняется введенный термин эталонной размерности множества объектов. Так вот, действительно ли понятие эталонной размерности имеет физический смысл? А если это так (думаю, что так), то что следует понимать выражением одних эталонов через другие? В геометрии этому соответствует понятие линейной зависимости. Но для нас как будто свойство линейности на данном этапе не важно (чем нелинейная зависимость хуже?), да и вводить на множествах объектов сразу линейную структуру как-то не хотелось бы. Здесь надо подумать. Так или иначе, этот пункт формализации меня не совсем удовлетворяет (невеста-то не без изъяна). Я поговорю еще об этом с нашими физиками...

В свете алгебраического вопроса даю следующие уточнения. Конечно, умножению на нуль не соответствует никакая процедура для сложения. Однако фиксация конкретного элемента (нуля) есть операция нулевого порядка, меняющая сигнатуру соответствующей универсальной алгебры (универсальная алгебра – это множество с операциями произвольной природы, сигнатура – набор всех операций на множестве). А мы принимаем в расчет исключительно операцию второго порядка. Более точно вопрос звучит так: можно ли на множестве действительных чисел задать два неизоморфных группоида так, чтобы соответствующие операции были коммутативны, ассоциативны и дифференцируемы (в обычном смысле, как отображения из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$)? Еще раз подчеркиваю, что изоморфизм понимается в смысле группоидов, т.е. как биекция, сохраняющая операции в прямом и обратном направлении. Более короткая форма вопроса: можно ли на множестве действительных чисел определить неизоморфные абелевы полугруппы с дифференцируемой операцией? Понятно, что сложение и умножение не будут изоморфными, если учитывать фиксированные элементы нуль или единицу (операции нулевого порядка), однако, как мне кажется, они станут таковыми, если эти элементы не принимать в расчет (при нахождении решения соответствующего уравнения они не нужны). В этой связи попросите алгебраистов еще раз подумать. В любом случае будет интересно (для них тоже).

И еще у меня возникла мысль в сторону. Мне кажется, назрела необходимость в написании качественно иной книги по теории физических структур, дополняющей и популяризирующей Вашу книгу и теорию физических структур в целом. Что-то вроде введения в эту теорию. Она должна быть достаточно небольшой (порядка 100 страниц), свободной от громоздких выкладок и идеологии. Можно разделять или не разделять Ваши общепhilosophические концепции (я, к примеру, не вполне стою на Ваших позициях, хотя у нас есть немало точек соприкосновения). Однако есть факты, которые нельзя отрицать. Так вот, эти-то неопровержимые факты (и только их) стоит изложить. Пусть читатель верит в аллаха или марксизм-ленинизм, если ему так нравится. Но вот есть конкретная физическая концепция, освященная строгими математическими результатами, которая не

зависит от нашего мировоззрения (тот самый черный бок овцы). Во введении можно было бы популярно и убедительно объяснить (основной читатель – думающий молодой человек, потенциальный потребитель этой теории), в чем состоит недостаток имеющихся физических концепций (не на идеологическом, а на фактическом уровне) и что, в принципе, качественно иное предлагается. Затем в первом разделе описываются простейшие примеры (три-четыре, не более), выводящие на конкретные физические структуры с доходчивым объяснением, что дает в конкретной ситуации именно такая форма известного физического закона. Во втором разделе можно формализовать эти результаты, описав физическую структуру вообще, не гонясь за максимальной общностью, отдавая предпочтение простоте изложения. Потом дать полное решение (с безупречно строгим доказательством) задачи для структуры (2,2). Завершением этого раздела была бы теорема Михайличенко. При ее изложении опять-таки лучше придерживаться принципов максимальной простоты и строгости изложения, возможно, в ущерб общности результата. Третья часть могла бы включать в себя основные следствия из этой теории (незначительное количество, но разнообразные) опять-таки с соблюдением выше указанных принципов: меньше громоздких выкладок, никакой идеологии, только проверенные факты. На финише дается четкая инструкция по эксплуатации для человека, решившего применить теорию физических структур для построения нового физического закона. Эту ситуацию можно промоделировать следующим образом. Мы исследуем какой-то известный процесс, но действуем так, как если мы не знаем форму соответствующего физического закона. И вот, следуя приведенной инструкции и основываясь на эксперименте, мы устанавливаем этот закон сначала в форме конкретной физической структуры, а потом и в классическом виде. Ну а в заключении можно дать обзор известных результатов по теории физических структур (без выкладок, но со ссылками) и перечень нерешенных проблем. Такая книга была бы крайне полезна, особенно после выхода Вашей книги, которая неминуемо привлечет внимание к теории физических структур. Мне кажется, такую книгу мог бы написать Геннадий Григорьевич под Вашей общей редакцией. При необходимости я готов внимательно прочитать рукопись до ее выхода в печать на предмет обнаружения слабых мест, нуждающихся в уточнении. Подумайте.

С уважением, Семен

Письмо 26. 12 февраля 2004 г.

Дорогой Юрий Иванович!

Мы тут провели небольшой семинар по итогам... Из приглашенных отсутствовал, к большому моему сожалению, лишь Лёня Чечин. Дебаты были достаточно бурные, но серьезного прорыва не произошло. Пожалуй, главным результатом этого дела было то, что я попытался сформулировать гипотезы, которые положены в основу формализации физической структуры. Фактически – это то, что Вы с Геннадием Григорьевичем мне рассказали, прежде чем я взялся за формализацию. А точнее – то, что я понял. Собственно, мне следовало бы сначала четко зафиксировать это и обсудить с Вами, а лишь потом браться за формализацию. Но мысли приходят в голову так, как они приходят, а не так как надо. Так или иначе, перед выступлением я почувствовал необходимость объяснить народу (физики все-таки), почему формализация именно такая. В результате получилось следующее:

Гипотезы физической структуры (ФС)

Гипотеза 1. Физический закон характеризуется взаимодействием двух *классов объектов*.

Гипотеза 2. В основе физического закона лежит взаимодействие пары объектов разных классов, описываемое некой величиной, называемой *репрезентатором* ФС.

Гипотеза 3. Конкретный физический закон описывает взаимодействия конечных наборов объектов обоих классов, причем количества элементов каждого из классов, фигурирующих в описании закона, фиксировано и называется *рангом* ФС.

Гипотеза 4. Физический закон характеризуется некоторой величиной, называемой *верификатором*, которая зависит от всевозможных сочетаний парных взаимодействий объектов данных классов в количестве, соответствующем рангу физической структуры, причем получаемый результат не зависит от выбора конкретных объектов.

Гипотеза 5. На классах объектов существует наборы *эталонов* в количестве (называемом *размерностью* ФС), на единицу меньшем значений, определяющих ранг ФС. Определяющим свойством эталонного объекта является известный результат его взаимодействия с любым объектом другого класса.

Гипотеза 6. Физическая структура однозначно определяется классами объектов, репрезентатором, размерностью и верификатором.

Соответствует ли всё это Вашим представлениям? Я-то описывал именно это, но, возможно, что-то не так.

От семинара я больше всего ждал каких-то сдвигов по поводу более чем сомнительного понятия эталонной зависимости. Но, к сожалению, никаких идей на этот счет не поступило. Может быть, Вы проясните ситуацию? Я понимаю это дело так. Эталонный элемент позволяет получить некоторую (как правило, далеко не полную) информацию о произвольном объекте другого класса. Если выбрать два эталона, то, вообще говоря, мы получим больше информации об объекте. Однако на какой-то стадии исследования добавление нового эталона уже не даст нам дополнительной информации. Это означает, что множество эталонов оказалось зависимым. Нечто аналогичное наблюдается в случае линейной зависимости векторов. Насколько осмысленны эти рассуждения? Что же такое зависимость эталонов с физической точки зрения? Как мы узнаем, сколько эталонов следует брать, если речь идет об описании нового, ранее не известного закона?

Помимо всего прочего я решил исключить множества значений верификатора и репрезентатора из определения физической структуры. Зная оператор с множеством его определений, мы автоматически получим и множество значений.

И еще один вопрос по существу. Одному репрезентатору могут соответствовать несколько разных верификаторов. Получим ли мы в результате разные физические структуры или разные представления одной и той же структуры? Вопрос этот, на мой взгляд, весьма принципиален. Если в данном случае физическая структура – одна и та же, то верификатор не должен входить в определение физической структуры. Однако разные верификаторы, по-видимому, выведут на разные физические законы в классической форме, что едва ли очень хорошо для практического применения физических структур. Если же структуры получатся разные, то придется несколько скорректировать понятие единственности решения уравнений – насколько я понял, у Михайличенко не говорится о нахождении единственного (хотя бы с точностью до изоморфизма) верификатора. Если это действительно так, то физических структур окажется много больше, чем хотелось бы. А как быть, если в конкретной ситуации мы верно угадали ранг и репрезентатор, а вот результат получается не тот, поскольку у нас нет в руках полного набора верификаторов? Каково Ваше мнение по поводу всего этого комплекса проблем?

С уважением, Семен

Дорогой Семён!

Простите меня за долгое молчание. Я всё это время обдумывал, данную Вами, формулировку исходных положений Теории физических структур. Мне кажется не очень убедительным с самого начала вводить понятие эталонных объектов. По моему их введение диктуется не сутью дела, а техническими соображениями, возникающими при решении сакрального уравнения. И это не даёт мне покоя. Под Вашим влиянием я постарался заново отделить суть дела от менее важных технических деталей. Оказалось, что естественней всего начать с алгебраической формулировки понятия физической структуры. При этом сразу же можно написать четыре, и только четыре, возможных решения. Правда здесь даже не стоит вопрос о строгом доказательстве единственности этих решений. Но зато, эти решения угадываются безо всякого труда. После этого приступаем к доказательству единственности полученных четырёх регулярных решений. Для этого осуществляется достаточно естественный переход от алгебраической формулировки к аналитической (к сакральному уравнению). При этом вводятся дополнительные требования технического характера, позволяющие использовать аналитические методы решения этого уравнения -- вещественность, дифференцируемость, отличие от нуля градиента верификатора и существенная зависимость репрезентатора от всех переменных. При этом выясняется, что появляется ещё два спорадических решения ранга (2,4) и (4,2).

Я долго не писал Вам, так как хотел привести подробные соображения по поводу эффективности алгебраической формулировки ТФС, сопроводив их соответствующими формулами. Но очень много времени заняла редакционная подготовка к печати моей 840-страничной книги.

Результаты Андрея, полученные из ТФС на множестве произвольной природы, очень заинтересовали Бокутя после того, как он узнал, что крупнейший алгебраист, Президент Лондонского математического общества Кон (Kohn), подыскивая различные экзотические примеры алгебраических структур совершенно случайно наткнулся на структуру Симонова, полученную им из ТФС. В марте Бокуть едет в Лондон и будет обсуждать с Коном эту проблему. Я понемногу начинаю вникать в суть дела и начинаю понимать, что ТФС только начинается и что её ждёт великое будущее. И по сути дела, всё началось с Theorema egregium Михайличенко!

Искренне Ваш Юрий Иванович

8.5.4

Письмо № 2

Дорогой Семён!

Один из участников нашего семинара -- сотрудник отдела Бокутя Анатолий Корюкин предлагает описывать структуру, уже полученных Михайличенко 4+2 типов решений.

Посылаю Вам тезисы его сообщения.

Искренне Ваш Юрий Иванович

11.4.4

Дорогой Юрий Иванович,

Я ознакомился с материалами Корюкина. В целом, впечатление -- благоприятное. Чувствуется достаточно высокая математическая (главным образом, алгебраическая)

культура и желание взглянуть на проблему сверху. Хочу поделиться своими предварительными впечатлениями. Чтобы бы я занес в его актив.

1. **Алгебраическая природа ТФС.** С самого начала у меня было ощущение, постепенно переросшее в уверенность, что мы имеем дело с проблемой чисто алгебраической природы. Физические структуры, как они интуитивно понимаются, по своей природе являются алгебраическими, поскольку оперируют с конечными процедурами над конечным числом объектов. Те функции, о которых идет речь при попытках формализации теории, фактически являются операциями. Поэтому общая постановка задачи и пути ее решения (в частности, классификационные вопросы) должно решать именно средствами абстрактной алгебры. Используемый на определенной стадии исследования аналитический аппарат, по-видимому, не адекватен постановке задачи и годится лишь для решения частных проблем. Таким образом, можно приветствовать вовлечение в дело профессиональных алгебраистов (коим я не являюсь), поскольку, видимо, именно у них имеется наибольший шанс приведение теории в надлежащий вид. Самое сложно было привлечь их внимание к этим вопросам – уж больно далеки они в своей массе от физики. Хочется верить, что дело сдвинулось и, как сказал один классик, процесс пошел...
2. **Погружение уравнения в структуру.** Эта мысль вполне естественна и является логическим следствием алгебраической природы задачи. Ваши уравнения являются не просто функциональными, а, если можно так выразиться, "операционными". В том смысле, что искомыми величинами являются некоторые алгебраические операции. Поставив корректно уравнение, мы фактически налагаем некоторые ограничения на искомые операции, а значит, задаем специфическую алгебраическую структуру. Классификация физических структур является классификации возможных свойств рассматриваемых уравнений, т.е. фактически возможных операций.
3. **Расширение классов алгебраических структур.** Коль скоро мы ищем класс операций и действий над ними при условии выполнения некоторых свойств, сохраняющих возможность использования для исследуемых объектов понятия ФС, вполне естественно попытаться найти как можно более широкий класс объектов, подпадающих под определение ФС. Поиск алгебраической структуры, наиболее адекватно отражающей понятие физической структуры, т.е. наиболее полного погружения ТФС в алгебру представляется, возможно, наиболее плодотворным путем формализации ТФС. Если для получаемой по ходу дела алгебраической структуры не находится общепринятого ярлыка, то надо выделить и описать новый класс алгебраических объектов со свойствами ФС.
4. **Связь с категориями.** Представляется логичным, что за соответствующей алгебраической структурой будет стоять какая-то категория. После локализации класса алгебраических объектов под единым флагом ФС нам вполне может понадобиться установление связи между различными объектами данного класса (при возвращении к физике – связь между различными физическими законами). А тогда в дополнении к объектам понадобятся еще и морфизмы (а там и функторы) со всеми вытекающими отсюда свойствами. А, получив в руки стандартный аппарат теории категорий, мы можем увереннее чувствовать себя в теории и приложениях ФС.
5. **Необходимость спуска к физике.** Я согласен с последним абзацем "размышлений", где высказывается мысль о том, что с разрабатываемым аппаратом следует вернуться в физику с проработкой ее разделов, без чего вся теория висит в воздухе. Более того, на мой взгляд, более эффективно двигаться методом последовательных приближений. Вместо того чтобы сначала разработать

окончательный вариант математической теории и лишь потом обратиться к физике, думаю, было бы неплохо на текущем этапе формализации заглянуть в физику, чтобы прочувствовать, как эта еще не окончательная теория там работает. Возможно, в процессе "возвращения" выявятся какие-то недоработки гипотез, положенных в основу формализации, появятся некоторые ранее не учтенные требования, или, напротив, возникнет необходимость ослабления принятых условий с целью охвата более широкого класса задач. Скорее всего, формализация теории и ее приложение к физике должны идти параллельно, стимулируя движение друг друга. Собственно, меня до сих пор не покинуло ощущение неполноты проблемы. Я более или менее понял, откуда все пошло. Примерно представляю, где всё это находится на данный момент. Вижу движение в сторону математической формализации результатов и философского осмысления сути. Но вот адекватного возврата к физике я не чувствую. Возможно, я бы и рискнул прочитать спецкурс по теории физических структур. А это неминуемо стимулировало бы мою активную работу и, возможно, со временем привело бы к написанию книги. Но я не вижу в цепи завершающего звена, замыкающего разрабатываемую теорию. Предположим, что весь необходимый аппарат уже разработан. Что дальше? Маленькая аналогия – мои выступления в Новосибирске. После первого семинара слушатель видит впереди огонек, появляется надежда увидеть математику в целом, во всем своем величии. Но вот прошла вторая лекция, и все убедились, что да, фактически любое математическое понятие можно задать по единой схеме на языке структур. Но стоила ли игра свеч? Что это дает математикам, физикам и т.д. кроме голого факта возможности унификации известных математических понятий? Каково было бы Ваше впечатление от моих выступлений, если бы этим всё и завершилось? Теория структур Бурбаки так и не получила серьезного распространения в математическом мире в отличие от той же теории категорий. Можно дать определение, к примеру, группы или топологического пространства в рамках теории структур. А можно ограничиться и стандартным аксиоматическим определением. Приятно, конечно, что у столь разных объектов обнаружилось что-то общее. Но на групповые и топологические свойства этот факт никак не отразился. И теория категорий, видимо, не была бы взята на вооружение, если бы в нее не была изначально заложена возможность установления связей между различными локальными теориями посредством функторов. Одно дело, если ТФС позволяет лишь записывать физические законы в единообразной форме и устанавливает в этой связи их специфическую классификацию (примерно аналогичную роль выполняют структуры Бурбаки). Другое дело, если ТФС откроет возможности получить новую физическую информацию, а не только интерпретировать уже имеющуюся. Я по-прежнему сомневаюсь в возможности и целесообразности серьезных изменений в самой математике под влиянием ТФС (деление математики на сакральную и антропную – вне моего понимания). Но в самой физике что-то ведь должно быть. Не идет ли неуклонная математизация Вашей команды в ущерб физике? Так или иначе, заключительные аккорды "размышлений" Корюкина созвучны моим сомнениям.

Что же я бы отнес в пассив? Прежде всего, сюжет совершенно справедливо назван "размышлениями". Здесь есть любопытные необработанные мысли, из которых, возможно, получится что-то интересное, но при обязательном условии соблюдения стандартных правил игр: четкой постановки задачи и ее строго решения. Непонятной осталась точка старта. Есть основания подозревать, что анализируемые таблицы, определители и т.п. вторичны по отношению истинной постановке задачи, т.е. являются результатами преобразований того, что, собственно, и является главным и непосредственным предметом исследования. Кроме того, попытки обобщения алгебраических структур должны иметь оправдание. До каких пор, обобщая структуру,

мы еще имеем интересующий нас объект (т.е. ФС)? Естественно, дать ответ здесь можно исключительно при условии четкого определения понятия физической структуры. Хочется надеяться, что за "размышлениями" последуют конкретные действия. Пока – это потенциально интересно. А что реально – видно будет.

С уважением,

Семен

7.6.4

Письмо № 4.

Дорогой Семён!

Постараюсь ответить на Ваши вопросы относительно будущего теории физических структур.

Действительно, всё началось с анализа разнообразных физических законов. Был установлен общий принцип их строения. Возникла формальная математическая задача, полностью освобождённая от всяких физических интерпретаций. При этом возникли необычные уравнения, до этого не встречавшиеся в математике. Математикам известны алгебраические, трансцендентные, дифференциальные, интегральные, функциональные уравнения. Все они содержат определенные операции -- сложение, умножение, возведение в ту или иную степень, дифференцирование, интегрирование и множество коэффициентов и произвольных функций. А здесь, при анализе самых различных фундаментальных физических законов, возникают неизвестные ранее странные функциональные уравнения, не содержащие никаких операций, никаких произвольных постоянных и никаких произвольных функций.

Заданы два натуральных числа s и r -- ранг уравнения. Уравнение содержит две неизвестные функции: верификатор -- вещественную, достаточно гладкую функцию sr вещественных переменных и репрезентатор -- вещественную, достаточно гладкую функцию двух групп, состоящих из существенных $s-1$ и $r-1$ вещественных переменных.

Задача состоит в том, чтобы найти такие s и r и такие верификатор и репрезентатор, чтобы после подстановки всех sr репрезентаторов в верификатор в результате получился тождественный ноль относительно всех $s(r-1) + r(s-1)$ независимых переменных.

И вот оказалось, что при такой чрезвычайно общей постановке задачи, когда всё неизвестно -- и ранг (s,r) , и репрезентатор, и верификатор, задача имеет фактически единственное решение:

при рангах (s,s) , $(s,s+1)$, $(s,s-1)$ -- линейные регулярные решения, при рангах $(2,4)$ и $(4,2)$ -- единственное дробно-линейное решение; при всех других рангах решение в принципе не существует.

Что же касается существующих четырёх решений, то их достаточно, чтобы получить из них, после соответствующей физической интерпретации, все фундаментальные физические и геометрические законы.

Как по-вашему, представляет ли интерес для математики теория физических структур, "очищенная " от всякой физической интерпретации, как чисто математическая теория совершенно неисследованных сакральных уравнений?

Может ли теория физических структур, вопреки от её "плебейскому" происхождению, занять какое-то место в Вашей аристократической "Архитектуре математики" как чисто математическая структура, представляющая собой математическое основание геометрии и всей современной теоретической физики?

Вот пока и всё. Искренне Ваш Юрий Иванович

8 июня 2004

Дорогой Юрий Иванович,

Некоторые мысли в связи с Вашим последним письмом и ТФС вообще.

1. О "плебейском" происхождении ТФС и моей аристократической "Архитектуре математики". Здесь, прежде всего, излишним будет слово "моей". Все-таки я не Архитектор и в лучшем случае могу претендовать на участие в отделочных работах в нескольких из неисчислимого количества комнат Здания Математики. В данном случае я выступаю как литератор, интерпретатор, методист. Впрочем, понятно, что речь в Вашем письме идет о месте ТФС в математике. Кроме того, не совсем понятно, почему слово "плебейское" взято в кавычки, а слово "аристократическое" – нет. Тут должен быть паритет. Всё, что есть в математике, в равной степени является продуктом чистого разума, а значит, обладает определенным налетом "аристократизма". С другой стороны, все объекты математики прямо или косвенно возникли в связи с потребностями реальной жизни. Тем самым происхождение у ТФС не более и не менее "плебейское", чем у всего остального, с чем сталкивается математика. Так что, думаю, противопоставление плебейства и аристократизма в данном случае не к чему. Оба эти слова здесь излишни.

2. ТФС как математическое основание геометрии. Здесь следует четко различать геометрию как науку о строении и свойствах реально существующего пространства от исторически сложившейся геометрии, как разделе математики. Первая геометрия является естественно научной дисциплиной (типа механики) и к математике не относится. Я готов признать принципиальные права ТФС (или другой физическо-математической концепции) быть математической основой именно такой геометрии. С другой стороны, "геометрия, как раздел математики" включает в себя такие направления, как алгебраическая геометрия, проекционная геометрия, дифференциальная геометрия, неевклидовы геометрии, выпуклая геометрия, диофантова геометрия и др. Многие относят к геометрии и топологию – одну из наиболее глубоких и бурно развивающихся математических дисциплин. Естественно, никаким математическим основанием такой геометрии ТФС служить не может, что ни в коей степени не может быть поставлено ей в упрек. А вот наличие естественных выходов ТФС на те или иные разделы математической геометрии, конечно же, является хорошим свидетельством содержательности данной теории.

3. Принципиальная новизна уравнений ТФС и их место. Для уравнений ТФС в общей теории математических уравнений можно отвести более или менее четкое место. Прежде всего, это уравнения функциональные, коль скоро неизвестными величинами в них служат объекты, являющиеся по своей природе функциями, а процедуры типа дифференцирования, интегрирования и т.п. здесь отсутствуют. В классе функциональных уравнений я бы отвел уравнениям ТФС более конкретное место. Поскольку искомые функции определены на конечном множестве наборов однотипных объектов заранее фиксированной размерности, то функции эти по своей природе, видимо, являются алгебраическими операциями с некоторыми специфическими свойствами.

Соответственно, и математические структуры, в рамках которых должно осуществляться исследование этих уравнений, относятся, по-видимому, к классу алгебраических структур. Для соответствующих уравнений мог бы быть уместным термин "операционные уравнения". Я с таким термином никогда не сталкивался, да и про уравнения, объектом поиска в которых служат операции, тоже не слышал. Мое субъективное мнение здесь таково. Наивно рассчитывать на постановку математической задачи, которую было бы нельзя классифицировать, указав ее четкое место в Здании Математики. Однако, уравнения ТФС, безусловно, содержательны и весьма не стандартны. А их физическое (т.е. естественное) происхождение служит очень серьезным козырем в деле.

4. О месте ТФС в математике. Для того чтобы четко указать место ТФС, следует дать строгие определения, после чего вопрос решится сам собой. В Новосибирске Вы просили меня попытаться сделать что-то в этом духе. Я сделал это в той степени, в какой понял суть дела. Что уж получилось, то и получилось. По крайней мере, соответствующее место более или менее понято. В принципе, эту свою миссию я могу считать выполненной. Однако в процессе осмысления полученного я почувствовал несколько слабых мест, о чем Вам и написал. Поставленные вопросы носят не математический характер, а потому – не мне на них отвечать. При получении соответствующих разъяснений я готов доработать тот материал.

5. О роли ранга структуры в постановке задачи. На мой взгляд, постановка задачи все-таки включает в себя ярко выраженные параметры. Ранг структуры никак не является неизвестной величиной. При каждом значении ранга мы имеем свое решение. Да, при некоторых значениях ранга решения вообще нет, а существующие опять-таки в зависимости от ранга распадаются на четкие классы. Но факт остается фактом. Мы сначала задаем ранг, а потом проводим анализ (да Вы и сами так говорите). Ранг не служит объектом поиска и не восстанавливается в процессе решения. Данная ситуация вполне типична. В математике часто встречаются теоремы вида "для того, чтобы задача оказалась разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы ее параметры удовлетворяли такому-то условию". Критерий разрешимости задачи не говорит о том, что ее параметры служат объектом поиска, а лишь локализует класс параметров, при которых задача имеет смысл.

6. О проблеме единственности решения и "вмешательстве извне". Надо иметь в виду, что единственность решения достигается при неременной оговорке формы, в которой мы это решение ищем (с точностью до соответствующего числа функций соответствующих аргументов). Стоит нам отказаться от этого чрезвычайно жесткого требования, оставив имеющиеся уравнения "сами по себе", и у нас появится бесконечное множество весьма разнообразных решений. Те многочисленные примеры, которые я Вам в свое время приводил, остаются в силе. Уравнениям указанные решения успешно удовлетворяют, но форма у них – "не та". Ограничения на форму получаемых решений, без сомнения, являются вмешательством извне, поскольку для математической постановки уравнений (в отрыве от физического прототипа) они не выглядят естественными. Однако сам факт наличия ограничений является не недостатком, а крупным достоинством постановки задачи, коль скоро, с одной стороны, таким образом от мало содержательной задачи с бесконечным множеством решений мы переходим к весьма содержательной задаче с единственностью решения. С другой стороны, чрезвычайно важна физическая оправданность принятых ограничений, поскольку при остром желании из любой бесконечно разрешимой задачи можно сделать однозначно разрешимую за счет введения соответствующих условий. Нельзя говорить о постановке задачи и единственности решения в отрыве от той формы, в которой эти решения следует искать. Форма решения – неотъемлемая часть постановки задачи. Собственно, сами фразы "задача имеет решение" или "решение задачи единственно" являются математически не корректными, поскольку надо четко указывать, во-первых, при каких условиях мы имеем

решение, а, во-вторых, в каком смысле это решение понимаем. Таковы правила игры. Понятно, что включение в постановку задачи допустимой формы решения неминуемо делает постановку задачи более сложной простой. Понятно, что степень удивительности факта единственности решения в результате снизится. Однако сами-то результаты остаются в силе, а это главное.

7. О неединственности восстановления верификатора. Еще одна важная оговорка при констатации факта единственности решения связана с явным отсутствием единственности верификатора. Если в постановке задачи заявлен поиск двух функций, то единственность решения задачи (без каких либо оговорок) подразумевает существование единственной пары функций, удовлетворяющих уравнению. Однако фактически обосновывается только единственность репрезентатора. Поэтому при формулировке результата о единственности нужно четко подчеркивать, в каком смысле эта единственность понимается. В противном случае нарушаются правила игры. Кстати, именно факт неединственности верификатора был одним из главных моих вопросов, на который я так и не получил ответа. Две пары с одним репрезентатором и разными верификаторами определяют одну и ту же физическую структуру или разные (пусть даже родственные) структуры? Другими словами, входит ли верификатор в определение физической структуры? Понятно, что без ответа на этот вопрос дать окончательное определение физической структуры невозможно. Понятно, что ни я, ни весь математический люд ответ на этот вопрос не даст. Однако в зависимости от четкого ответа на вопрос результаты будут качественно разные. Признав зависимость физической структуры от верификатора, мы окончательно потеряем единственность решения уравнений. Физических структур окажется чрезмерно много. Считая физическую структуру не зависящей от верификатора, мы сохраняем единственность, но неизбежно исключаем верификатор из числа искомых величин соответствующих уравнений и констатируем, что математическое описание физического процесса никак не связано с верификатором. Мне кажется, что без ответа на этот вопрос мы далеко не уйдем.

И, наконец, главный итог. Да, я вижу содержательность теории физических структур и более или менее, представляю ее положение в математике. Но я-то акцентировал внимание на другом. Мне хотелось бы видеть проблему в целом. Я понимаю дело так. В процессе выявления общих закономерностей в разнообразных физических законах выявилось нечто весьма любопытное. В процессе формализации и математического анализа этого самого "нечто" выявились еще более любопытные факты. И вот, вооружившись этими фактами, мы... Что? Задача, возникшая в физике и исследуемая ради нужд физики, неизбежно должна на физику замыкаться. Это прекрасно, что в процессе появились чрезвычайно интересные математические задачи, живущие самостоятельной математической жизнью. Но классический вопрос: за что боролись? Понятно, что речь идет не о повышении удоев молока или урожайности зернобобовых... Но возникшие математические задачи можно по-разному формализовывать. Теорию можно развивать в разных направлениях. Какие-то из этих направлений будут физически содержательны, а какие-то нет, причем у той, что связана с физикой, повышенные шансы на математическую содержательность. Без обратной связи с физикой в этом не разобраться. Меня, к примеру, крайне удивило, что, когда я прямо спросил у Михайличенко, какие физические выводы он делает из своей теории, он честно ответил, что вообще не задумывался над этим вопросом, оставляя его Юрию Ивановичу... Очень странный диалог между чистым математиком и профессиональным физиком (по крайней мере, по своему происхождению) получился... Это прекрасно, что Ваши молодые люди (главным образом, физики по образованию) вгрызаются в математику. Но кто-то должен продвигать и физическую сторону вопроса хотя бы в целях стимуляции и диагностики математического анализа. Трудно рассчитывать, что теория физических структур получит адекватное признание без ответа на вопрос, что она дает (хотя бы в принципе) для самой физики. По крайней мере, у меня здесь ясности нет.

Ну а в целом, жизнь идет...

С уважением,

Семен

19.10.4

Дорогой Юрий Иванович,

Откроем Математический энциклопедический словарь. Читаем: "*кортеж – конечная последовательность элементов какого-нибудь множества*". Какого? Любого! Это могут быть числа, слоны, идеи, проводники, события, что хотите. Из физической, математической или иной реальности – не важно. Те объекты, с которыми Вы работаете, в полной степени подпадают под это определение. Кстати, даже за элементами обычного множеством (без выделения какой-то структуры) сохраняется право обладать какими-то общими свойствами. Любое множество (тем более, кортеж) – единый объект, состоящий из индивидуальных элементов.

Вы напрасно полагаете, что кортеж – понятие неопределенное, подобно множеству. Напротив – это понятие четко определяется посредством множества. Прежде всего, запись $X = \{x, y, \dots\}$ подразумевает множество X , состоящее из элементов x , y и т.д. вне зависимости от природы этих объектов. Это – аксиома, включающая первичные (а потому, не определенные) понятия элемента и множества, связанные определенным (указанным выше) способом - включением. Под парой (x, y) , т.е. кортежем (вектором, словом) второго порядка понимается вполне конкретное множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, состоящее из двух конкретных объектов $\{x\}$ и $\{x, y\}$. Здесь заложено единственное определяющее свойство пары: наличие исключительно двух элементов в отсутствии их равноправия. Тем самым две пары равны исключительно при совпадении у них обоих составляющих. То обстоятельство, что элементы пары оказываются по своей природе множествами, возражений вызывать не может, поскольку не исключается первичной аксиомой (см. выше). В рамках теории типов (одного из вариантов аксиоматики оснований математики) вводится иерархия математических объектов: "простой" элемент (тип 1); "простое" множество, состоящее из элементов (тип 2); множество, состоящее из "простых" множеств (тип 3, для объектов которого применяется также термин "класс"); множество, состоящее из множеств типа 3 (тип 4) и т.д. Так вот, пара (и любой кортеж) относится к третьему типу.

Аналогично тройкой или кортежем (вектором, словом) третьего порядка (x, y, z) принято называть объект $\{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$. Точно так же (по индукции) определяют вектор произвольного порядка. Такое определение было предложено Норбертом Винером лет 70 назад и давно принято математической общественностью. То, что Вы называете кортом мужского и женского рода, соответствует хорошо известным (Вам в том числе) понятиям: вектор-строка и вектор-столбец.

Я читал Ваши книги, слушал Ваши лекции, беседовал с Вами неоднократно. Признаков новых математических структур у Вас я не обнаружил. Новые нестандартные концепции, новые интересные задачи, новые математические результаты – да, безусловно. Но все математические объекты, с которыми Вы и Ваши ученики работаете, уже существуют в математике. А, стало быть, должны называться так, как это в ней принято. Другое дело, что Вы применяете их для своих задач, наполняется эти конструкции своим смыслом. Но понятие (форма) и смысл (содержание) – это, как говорится, две большие разницы. Пока Вы говорите: корт – понятие физическое, я молчу. На физической территории я боевых действий не веду. Как только Вы утверждаете, что корт – новое математическое понятие, я говорю: нет! И дело здесь не в моих или Ваших привычках и амбициях. Если Вы считаете, что в математике отсутствует понятие, которое Вы называли кортом, то это проблема Ваша, а не математики.

Если, к примеру, Фет отказывает Вам в праве употребления словосочетания "сакральное уравнение" на том основании, что одно из этих слов является математическим, а другое – нематематическим, то понять его я могу, а согласиться – нет. Я вижу математический объект, который может быть классифицирован как уравнение. Конкретного такого уравнения я не встречал, а значит, готов признать его новизну. Сомнений в Ваших авторских правах на этот объект у меня нет. В этих условиях я считаю, что Вы вправе называть его так, как считаете нужным. И меня меньше всего волнует, кто дал имя этому математическому понятию – физик, математик или трубочист. Но стоит Вам отказать ему, к примеру, в праве называться уравнением на том основании, что в нем сидит какая-то особая реальность, я начну ругаться нехорошими словами. Я согласен с Вами, что *"точно найденный термин или удачно найденное слово позволяет понять суть проблемы"*. Но верно и обратное: неудачная терминология затемняет суть проблемы... Здесь вспоминается заключительная строка из старого детского стишка: *"назовем лучше кошку кошкой"*. Как сказал один уважаемый человек, *"Сначала было Слово"*. Что же касается ссылки на разных людей, хотя бы и весьма авторитетных, которые не разобрались в Ваших теориях, как на аргумент, подтверждающий наличие там новых математических структур и понятий, то, я думаю, Вам самому всё ясно...

Однако настоящий разговор у нас всё-таки о другом. Мы, как будто, немало времени потратили на обсуждение определения физической структуры в геометрической и алгебраической интерпретации. Хочется верить, что не напрасно... Итоговые (но, боюсь, не окончательные) материалы я Вам выслал. Жду ответа.

С уважением,
Семен

Дорогой Семён!

В дополнение к предыдущему письму:

Каждый вектор (тензор, спинор, кватернион, матрица) представляет собой кортеж.

Но не каждый кортеж является вектором, тензором, спинором и т.п.

Для описания физического закона я ввожу новое понятие -- корт. Корт является частным случаем кортежа, то есть представляет собой конечную последовательность вполне определённых компонент. Но на этом сходство оканчивается; не каждый кортеж является кортом .

Теория кортежей (См. Ю. А. Сиханович, "Введение в современную математику", гл. 3. Кортеж, стр. 89 - 119) не имеет ничего общего с Теорией кортов (См. гл. 12. в моей книге Теория физических структур.)

Кортеж и корт не являются синонимами.

С глубоким уважением.

Искренне Ваш Юрий Иванович

21.10.4

Дорогой Семён!

Я с большим интересом прочитал Ваше письмо. Многое, о чём Вы пишете, мне известно. Например, что понятие кортежа может быть чётко определено в понятиях

множества. Чтобы не уходить в сторону от главного вопроса -- чем отличается понятие корта от понятия кортежа, я неосторожно привёл фразу "Как и понятие множества, понятие кортежа будет у нас исходным, неопределяемым понятием", взятую из полупопулярной книги Ю.А.Шихановича "Введение в современную математику". Я думаю, что Шихановичу было хорошо известно, как сводится понятие кортежа к понятию множества, но он просто несколько огрубил ситуацию, чтобы сказать о главном -- что же такое кортеж. Итак, вернёмся к главному вопросу -- является ли понятие вектора синонимом понятия кортежа? Другими словами, можно ли сказать, что вектор -- это конечная последовательность элементов некоторого множества? Если это так, то чём различаются между собой вектор, кватернион, спинор, спинтензор, тензор дважды ковариантный, тензор один раз ковариантный и один раз контравариантный, тензор дважды контравариантный? Чем отличаются между собой вектор-строка и вектор-столбец?

По-видимому они отличаются друг от друга чем-то очень важным и существенным, если существуют различные области математики, такие как: теория кортежей (см. Шихановича), векторное исчисление и векторный анализ, тензорное исчисление и тензорный анализ, теория спиноров (см. замечательную книгу Румера), теория кватернионов и т.п. (Прошу извинить меня за перечисление хорошо известных Вам фактов). Действительно, вектор -- это кортеж состоящий из конечного числа вещественных или комплексных чисел. Однако, чтобы понять, что такое вектор, этого определения явно недостаточно. Необходимо сказать, что вектор -- это элемент множества, на котором определена структура линейного пространства. И только после этого вектор, как кортеж, приобретает замечательное свойство -- записывать громоздкую систему уравнений в виде одного компактного векторного уравнения. Рассматривая вектор как единое целое, можно легко осуществлять различные преобразования, не переходя к его компонентам.

Что такое тензор? Можно сказать, что тензор -- это тоже кортеж, состоящий из конечного числа компонент. Но вместе с тем, тензор это элемент множества, на котором определена структура тензорного пространства. В результате чего, используя тензорные обозначения, мы сможем записать достаточно громоздкие в векторной форме уравнения Максвелла в виде одного простейшего в тензорной формулировке равенства.

Точно так же обстоит дело с биспинором, который так же является кортежем, состоящим из четырёх комплексных компонент, Но биспинор является элементом нового множества, на котором определена особая структура. И в этом случае введение понятия биспинора позволяет записать уравнение Дирака в предельно компактной и ясной форме.

Итак, специализация чрезвычайно общего понятия кортежа с необходимостью приводит к введению таких новых понятий, как вектор, тензор, спинор и биспинор и многих других. Заметьте -- введение новых терминов для обозначения абстрактного кортежа открывает, как правило, новые области физики и математики.

В конце XIX века Кантор формализовал всем хорошо известное на интуитивном уровне понятие бесконечности и открыл совершенно новую весьма содержательную область математики -- теорию множеств.

С тех пор прошло сто лет. Но никому, ни физикам, ни математикам не пришла в голову мысль формализовать понятие физического закона. По-видимому математиков отпугивало слово "физический", а физики высокомерно считали эту проблему чисто "философской".

43 года тому назад я занялся этой проблемой. И только сейчас я начинаю понимать связь этой проблемы с чистой математикой.

Основным понятием ТФС является понятие корта.

Что же такое корт? На первый взгляд -- это обычный кортеж (конечная последовательность физических объектов одной и той же природы). Однако это кортеж специального вида, с помощью которого можно формализовать само понятие фундаментального физического закона и записать в компактном виде некоторое неизвестное ранее уравнение, решения которого, содержат в себе все возможные, уже известные и ещё неизвестные фундаментальные законы физики.

Понятие корта позволяет сформулировать общее понятие фундаментального физического закона как отношение между двумя абстрактными кортами. Отношение между конкретными кортами приводит к конкретному Фундаментальному физическому закону.

Естественно, не каждый кортеж является вектором, не каждый кортеж является тензором или биспинором. Однако, все известные кортежи, лежащие в основании различных разделов физики, представляют собой числовые последовательности.

Так, например, кватернион представляет собой кортеж, состоящий из четырёх вещественных чисел -- одной скалярной координаты и трёх векторных.

Грубо говоря, кортом называется кортеж, состоящий из элементов множества M , на котором определена физическая структура.

Мы будем различать канонические и макроканонические корты. В терминах макроканонических кортов излагается аналитическая теория ТФС (у Михайличенко), В терминах канонических кортов излагается алгебраическая теория ТФС (у Симонова),

Макроканоническим кортом первого (женского) рода называется кортеж длины s , состоящий из элементов множества N -- первого из двух множеств N и M , на прямом произведении которых определена физическая структура ранга (s, r) .

Макроканоническим кортом второго (мужского) рода называется кортеж длины r , состоящий из элементов множества M -- второго из двух множеств N и M , на прямом произведении которых определена физическая структура ранга (s, r) .

Каноническим кортом первого (женского) рода называется кортеж длины m , состоящий из элементов множества N -- первого из двух множеств N и M , на прямом произведении которых определена физическая структура размерности (n, m) .

Каноническим кортом второго (мужского) рода называется кортеж длины n , состоящий из элементов множества M -- второго из двух множеств N и M , на прямом

произведении которых определена физическая структура размерности (n, m) . Между рангом и размерностью имеет место следующая связь $(s, r) = (m+1, n+1)$.

Отсюда следует, что корт не может быть кортежем, состоящим из вещественных или комплексных чисел. Всякий корт представляет собой кортеж, состоящий из нечисловых переменных. Так как на множестве источников тока N и множестве проводников M имеет место физическая структура ранга $(2,3)$ (или размерности $(2,1)$), то макроканонический корт первого рода в этом случае представляет собой кортеж, состоящий из двух источников тока, а макроканонический корт второго рода представляет собой кортеж, состоящий из трёх проводников.

При этом канонический корт первого рода является кортежем, состоящим из одного источника тока, а канонический корт второго рода является кортежем, состоящим из двух проводников.

Итак, корт представляет собой кортеж вполне определённого вида и строения, состоящий лишь из элементов тех множеств, на которых определена физическая структура определённого ранга и размерности. Из-за этой специализации возникает содержательная теория кортов, не имеющая аналогов в современной математике.

С огромным удовольствием смотрим фотографии на подаренном Вами компакт-диске.

Искренне Ваш Юрий Иванович

22.10.4

Дорогой Юрий Иванович,

Прежде всего, о векторе. Это понятие встречается в математике в трех облициях, связанных между собой, но все-таки разных. Прежде всего, так сказать, вектор-1 – хорошо известное Вам геометрическое понятие, пронизывающее всю физику. Главной заслугой Декарта и Ферма было то обстоятельство, что вектор на плоскости они интерпретировали как пару чисел, заменив геометрические образы на чисто аналитический язык. Затем Лаир, Клеро и Эйлер проделали ту же процедуру в пространстве, установив изоморфизм между вектором в пространстве и тройкой чисел. В последствии у Римана, Грассмана и Кэли появилась концепция многомерного евклидова пространства, элементы которого ассоциировались с конечными упорядоченными наборами чисел. Поскольку свойства этих наборов фактически ничем не отличались от двухмерного и трехмерного случая, для рассматриваемых объектов сохранили прежний термин – вектор. Это и есть то самое, что я назвал вектором-1 (в действительности такого термина нет).

Затем Гильберт выдвинул концепцию бесконечномерного пространства и привел пример конкретного пространства последовательностей (то, что называют пространством l_2). Его в определенном смысле можно понимать, как предел евклидова пространства, когда размерность стремится к бесконечности. Гильберт показал, что для элементов данного пространства остаются справедливыми большинство свойств евклидовых пространств. Последовательности можно складывать и умножать на число, для них можно вводить топологии, метрики и нормы. Вполне осмысленным и чрезвычайно содержательным становится последовательность, составленная из последовательностей (элементов пространства Гильберта). Впоследствии прояснилось, что присутствующее у Гильберта понятие размерности, хотя бы и бесконечной, не является обязательным для характеристики линейных свойств. Было введено общее понятие пространства, отличительной особенностью которого является возможность сложения элементов и умножения элемента на число. Его стали называть векторным пространством, а его элементами – векторами. Это и есть то, что я в данный момент называю (несуществующим) термином "вектор-2". Природа вектора-2 может быть произвольной:

числа, обычные векторы (векторы-1), матрицы, функции, операторы и т.д. Единственно, что требуется – это возможность их сложения и умножения на число (скаляр). Постепенно термин "векторное пространство" стал вытесняться термином "линейное пространство", поскольку главным здесь является алгебраические свойства элементов, а не их геометрическое происхождение, а тем более, (естественно не обязательная) представимость в виде конечного набора чисел (особенность вектора-1). Хотя термин "векторное пространство" в современной математике постепенно уступает свои позиции, даже при использовании более употребительного термина "линейное пространство" сохраняется наименование вектора, как элемента этого пространства.

Наконец, существует еще одна линия, также берущая свое начало от концепции Гильберта бесконечномерного пространства. Хаусдорф, Фреше и др. пришли к общему понятию абстрактного математического пространства – множеству объектов произвольной природы, наделенных некоторой специфической структурой – топологической, метрической и т.д. Объекты такого пространства стали называть точками, опять-таки в силу геометрического происхождения. В качестве таких точек могли выступать числа, векторы, матрицы, последовательности, функции, операторы и т.д. Лишь бы только для них имела смысл соответствующая структура. Так, определив на множестве непрерывных функций в качестве расстояния максимум модуля разности значений этих функций, мы превращаем это множество в метрическое пространство, точками которого будут функции. И работаем при этом с функциями мы в точности так же, как и с точками на плоскости. Кстати, именно в то же время и появилось общее понятие векторного (линейного) пространства, прекрасно вписывающегося в ту же концепцию.

Ну а дальше с этими точками стали выполнять различные процедуры и конструкции, обобщающие соответствующие числовые операции. Так, упорядоченные конечные наборы точек стали называть векторами (вот здесь и появился вектор-3), соответствующие бесконечные (счетные) наборы – последовательностями, двояко упорядоченные конечные наборы точек – матрицами. Для преобразования точек сохранили термин "функция", хотя более употребительными здесь остаются термины "оператор" и "отображение". И, тем не менее, расширенное толкование понятия функции считается допустимым, и, я думаю, когда-нибудь вытеснит все остальные, поскольку здесь отражается общая тенденция распространения тех или иных числовых конструкций и понятий на объекты произвольной природы. Соответственно, для абстрактных математических объектов и их элементов стали использовать и прочие числовые термины – сходимости, операции, непрерывность, ряд, интеграл, производная и т.п. Ряд, составленный из операторов, все равно называют рядом, потому что его формальная конструкция в точности повторяет конструкцию числового ряда, хотя содержание элементов другое. Вектор-3 – это конечный набор элементов произвольной природы (точек некоторого математического пространства). Конструкция у него – та же, что и у обычного вектора (вектора-1), хотя объекты – произвольны. Преимущество термина "вектор-3" (тройка – от меня сейчас) как раз и состоит в том, что рассматривается некая конструкция, являющаяся естественным обобщением соответствующего числового объекта, получаемая исключительно при замене числа на точку произвольного пространства. В этой интерпретации вектор оказывается в одном ряду с другими понятиями, превратившимися в результате указанных действий из узко числовых в общематематические – пространством, точкой, матрицей, последовательностью, рядом, интегралом и т.д.

Но возникает естественный вопрос: почему именно такая интерпретация вектора (вектор-3) не признается в математике единственно допустимой? Прежде всего, дело в традиции, которая меняется крайне медленно. На существование вектора-1 никто бы не обратил внимания – уж очень узкий (с математической точки зрения) класс объектов. Но в линейной алгебре прочно утвердилось понятие вектора-2 – элемента весьма важного и чрезвычайно распространенного класса линейных пространств. По сути своей, наличие

специального термина для обозначения элемента конкретной алгебраической структуры не характерно для алгебры. Насколько мне известно, это единственное исключение. Мы не имеем специального названия для элемента группы (ничуть не менее важного алгебраического объекта), кольца, поля и т.д. На мой взгляд, никакой острой необходимости в сохранении термина "вектор-2" (двойка моя) как объекта линейного пространства нет, тем более что прямое практическое использование в геометрии и физике имеет все-таки именно вектор-1. Но понятие вектора-2 в силу традиции существует (я сам его использую в своей "Архитектуре"), что затрудняет признание вектора-3 в качестве наиболее естественного наименования для обсуждаемого нами математического объекта.

С другой стороны, в теории множеств для наименования того же объекта стали использовать термин "кортеж". Его преимущество над вектором-3 состояло в отсутствии возможных недоразумений, возникших из-за сосуществования нескольких смыслов понятия "вектор". Но и недостаток очевиден. Термин "кортеж" является изолированным от общематематических тенденций (см. выше). Вот и стали эти термины сосуществовать. А тут еще в математической лингвистике возник термин "слово" для обозначения конечного набора символов любой природы. Оно и понятно: в списке "язык – алфавит – буква – синтаксис – семантика" "слову" самое место. Но далее этот термин проник в математическую логику, близко соприкасающуюся с математической лингвистикой. Ну а логика чрезвычайно тесно связана, с одной стороны, с основаниями математики, а с другой, с алгеброй. По мере углубления связей между указанными дисциплинами, "слово" перекочевало и туда, и стало использоваться практически, где угодно, заменяя зачастую вектор или кортеж. Действительно, между символом общего вида и объектом общего вида разницу углядеть трудно, а в алгебраических конструкциях "языковое" происхождение "слова" столь же не существенно, сколь и "геометрическое" происхождение "вектора". Вот они и сосуществуют уже вдвоем. Хуже того, при попытке вывода указанных понятий из теории множеств (см. мое предшествующее письмо) отправной точкой было понятие пары, т.е. кортежа (вектора, слова) второго порядка. Оно является ключевым и для определения таких понятий как соответствие, отношение, оператор и т.д. Вслед за парой (двойкой) была определена тройка, четверка и т.д. объектов произвольной природы. И вот уже в литературе появился четвертый термин для наименования всё того же, а именно, "энка" (я не шучу). Его несомненное (и единственное) преимущество по сравнению с остальными состоит в фиксации размерности: мы можем избежать словосочетания "кортеж энного порядка". Правда, при одновременной работе с объектами разной размерности наряду с энками у нас появятся и эмки или чего-нибудь того хуже. Но такие вещи действительно употребляются в серьезной математической литературе. А тут еще Ваши корты...

Ну вот мы дошли и до них. Видите ли, математика изучает формы объектов, а не их содержание. Вот, к примеру, возьмем три конкретных объекта:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = (1, 2, 3, 4), C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Все они скомпонованы из одних и тех же элементов. Но в первом случае все они равноправны, вследствие чего объект A мы называем просто множеством. Если мы возьмем формально другую запись, например $\{2, 1, 3, 4\}$, то получим тот же самый объект. Более того, множество A оказывается изоморфным любому множеству $\{a, b, c, d\}$ вне природы составляющих его элементов. Объект B , хотя и содержит те же элементы, но обладает качественно более богатыми свойствами. В частности, он уже не совпадает с объектом $(2, 1, 3, 4)$, поскольку порядок элементов здесь играет существенную роль. Вследствие этого, в данном случае мы пользуемся термином "вектор", хотя, конечно, вектор можно свести к множеству. Но определяющим здесь являются не внутренняя природа объектов, а факт их линейного упорядочения. В объекте C мы также не имеем

равноправия элементов. Но их "степень упорядочения" здесь еще выше. Элемент 1 в определенном смысле является прямым предшественником одновременно элемента 2 (в строке) и элемента 3 (в столбце). Мы используем для C термин "матрица", хотя и понимаем, что матрицу можно свести к векторам и множествам. Отметим, что двойная упорядоченность элементов матрицы сохранится, если мы вместо одних чисел подставим другие числа, а то и объекты произвольной природы. Вы вот, в частности, легко переходите к минорам, т.е. рассматриваете матрицы, составленные из матриц. Почему же Вас смущают векторы, составленные из векторов? В математике нас интересует структура объектов, а не их конкретный смысл, который, конечно же, может быть весьма разнообразен. Аналогичным образом характеризуется соотношение, к примеру, между вектором и тензором общего вида.

Рассмотрим пример. Мы исследуем решения уравнения Лапласа, называемые гармоническими функциями. Это чрезвычайно важные объекты, встречающиеся во многих разделах математики, не обязательно напрямую связанных с уравнениями с частными производными (например, в теории функций комплексного переменного). Они имеют прекрасный физический смысл (это по Вашей части) и обладают массой весьма интересных свойств. Теория гармонических функций за примерно двести лет своего существования превратилась в достаточно мощное математическое направление. Но можем ли мы сказать что "гармоническая функция" есть качественно новый математический объект? Ни в коем случае. С формальной точки зрения это всего лишь функция. И относятся к ней как функции: рассматривают число ее независимых переменных, область определения, гладкость и другие функциональные свойства. Конечно, никто не ставит тождество между теорией функций вообще и теорией гармонических функций. Слово "гармоническая" здесь служит прилагательным, указывающим на то, что мы имеем дело не с функцией общего вида, а с их специфическим классом.

Ваши корты – той же природы. Конструкция у них – чисто от кортежа. Из Ваших книг, лекций и писем видно, что по форме (содержание – дело другое) это именно кортежи. Да, Вы проводите над ними особые процедуры, включаете их в особые отношения. Вы и теорию строите, и физическую интерпретацию даете, не характерную естественно для кортежей общего вида. Но внутренняя структура у них осталась та же (линейно упорядоченный конечный набор объектов произвольной природы). Точно также гармоническая функция участвует в специфических отношениях, далеко не характерных для функций общего вида (то же уравнение Лапласа). И теория для них особая, и физическая начинка своя. Если бы Вы сказали, к примеру, "физический кортеж" или что-нибудь в том же духе, другое дело: мы имели бы дело с математическим объектом, относящимся по своей природе к кортежам, но, обладающим особыми свойствами и важным практическим приложением, что и было бы мотивировкой для введения нового термина: не в виде самостоятельного математического объекта, а в виде содержательного класса уже имеющихся математических объектов.

Я бы закрыл глаза на всё это. Главное, всё-таки суть дела, а не ярлыки (назови хоть горшком...). Но ведь в книгах, лекциях, и письмах у Вас систематически встречаются утверждения о том, что в современной математике отсутствует адекватный математический аппарат для описания Вашей теории, что речь идет о новой математической структуре... И, что совсем печально, это соседствует с утверждениями о том, что из теории физических структур можно вывести едва ли не добрую половину математики, а то, что не выводится, являет собой засохшие веточки на соответствующем древе... Подумайте о своих читателях и слушателях. О молодежи, которая еще не имеет должного опыта и знания, чтобы разобраться в сути дела. Иные могут и впрямь подумать, что теория физических структур – основа всей математики. А потом ведь разочаруются... А другие, понимая, что не может, к примеру, аксиоматика Гильберта евклидовой геометрии быть следствием теории физических структур, не имеющей решительно

никакого отношения к аксиоматике, а под таинственным кортом (теоретической базой ТФС) в действительности скрывается хорошо знакомый кортеж, придут к выводу, что не может быть в этой теории при подобных заявлениях ничего путного. Вокруг слишком много всяких псевдонаучных теорий на любой вкус. У серьезных людей на такие вещи – аллергия. Так стоит ли отпугивать их, своих потенциальных союзников. Я потому и призываю Вас подумать о написании книги качества иного вида. Одна должна быть короткой, простой, ясной. Только проверенные факты. И никакой идеологии. Вот Вы хорошо сказали (вслед за Лапласом), что не нуждаетесь при описании своей теории в понятии материи. Так ведь Вы вообще не нуждаетесь в какой-либо идеологии для описания физической теории. Можно быть правоверным мусульманином или воинствующим атеистом, но закон Ньютона – один для всех. Подумайте...

Однако вернемся все-таки к тем материалам, что я Вам отправил. Я тут думаю в обозримом будущем провести семинар с приглашением всех наших заинтересованных лиц (их уже немало) по горячим следам. Поэтому вдвойне желательно услышать Ваше мнение. Кстати, у меня уже возникла мысль, как можно кое-что упростить. И попутно выяснилось, что есть еще один вопрос, напрямую связанный с формализацией, который я Вам почему-то не задал. Но об этом потом...

За мной остается также проблема единственности (или нет) для Φ . Но к этим вопросам я обращусь позднее. Я уже и так с начала сентября никак не могу закончить одну статью. По ее завершении постараюсь подумать.

С уважением, Семен

Дорогой Семён!

Извините меня, но я снова возвращаюсь к понятию корта.

Необходимо различать множество вообще (в общей теории множеств) и специальные множества, наделённые определённой структурой, для которых существуют вполне определённые названия: действительные числа, линейные пространства, группы, кольца, поля, топологические пространства и т.д.

Точно так же необходимо различать кортежи вообще (в общей теории кортежей) и специализированные кортежи различной длины, компонентами которых являются действительные или комплексные числа. Для того, чтобы отличать один кортеж от другого, существуют определённые названия тех математических объектов, которым сопоставляется кортеж вполне определённой длины и определённой природы его компонент. Так за простейшим понятием кортежа скрываются гораздо более глубокие и содержательные математические объекты: векторы, кватернионы, тензоры, спиноры, спинтензоры и т. п. Их свойства изучаются в специальных разделах математики -- в векторном, тензорном, спинорном исчислениях. В самом деле, за кортежем, состоящим из четырёх действительных чисел, могут скрываться совершенно различные математические объекты: либо векторы в 4-мерном евклидовом пространстве, либо тензоры валентности 2, либо векторы в 4-мерном пространстве Минковского, либо кватернионы.

Совершенно естественно предположить, что за понятием кортежа, возникающим на первом этапе формулировки теории физических структур, и состоящим из конечного числа физических объектов, скрывается гораздо более глубокий и содержательный новый математический объект -- корт. Для изучения его свойств, а не свойств кортежа, состоящего из конечного числа физических объектов, мной создан специальный раздел математики -- теория кортов.

Что же касается посланного Вами вложения в письме от 20 октября, то оно состоит из 39 файлов по 200 байт каждый и не может быть прочитано.

Искренне Ваш Юрий Иванович

Дорогой Юрий Иванович,

Что касается спора о природе корта, то ничего нового сказать Вам не могу по сравнению с тем, что было сказано в последнем письме. Есть объект, и есть его свойства, соотношения, в которые он вступает. Точка в четырехмерном евклидовом пространстве и пространстве Минковского сами по себе действительно служат различными интерпретациями соответствующего кортежа. От соответствующего тензора или кватерниона требуют еще и дополнительных алгебраических свойств, а значит, это уже не просто кортежи. Всё это так... Можно, конечно, сказать, что коль скоро объект, названный Вами кортом, обладает интересными свойствами, не характерными для кортежей общего вида, а заодно и глубоким физическим смыслом (в том и в другом сомнений нет), то это качественно новый математический объект, а его теория – новый раздел математики (есть алгебра, топология, теория вероятностей – а есть теория кортов). А можно сказать, что коль скоро функция $3\sin 2x$ или правильный семиугольник обладают своими индивидуальными свойствами, то теории этих объектов – новые разделы математики. Здесь каждый решает за себя...

Предлагаю на этом завершить данный спор. Будем считать, что мнения наши здесь не совпадают. Но это не мешает вести обсуждение конкретных проблем, где властвуют объективные факты, а не субъективные мнения. Материал для обсуждения я выслал.

С уважением,
Семен

29.10.4

Дорогой Юрий Иванович.

Сообщаю Вам некоторые мысли по поводу Вашего последнего материала.

Здесь я руководствуюсь следующим представлением о взаимодействии между физикой и математикой. Физик изучает то, что есть; математик – то, что может быть. Для физика критерий истины – соответствие окружающей реальности, для математика – внутренняя непротиворечивость. Математик обладает абсолютной свободой в выборе правил игры. Он может сказать: я делаю это, потому что мне так нравится, что недопустимо для физика. С другой стороны, выбрав правила игры, математик обязан их строго соблюдать, с физика же спрос не столь велик. Физик обязан знать, что делать, но может не знать, как делать. Математик обязан знать, как делать, но может не знать, что делать. При их совместной работе первое слово – за физиком. Постановка задачи (исходные аксиомы) – исключительно его дело. Математика с его аксиоматическими вольностями допускать до этого серьезного занятия никак нельзя...

Но вот задача поставлена. Физик сделал свое дело, физик может (и должен!) уходить. Конечно, его физическая интуиция может подсказать возможный путь к решению задачи. Но, увы, физикам свойственно нарушать (часто произвольно) правила игры в процессе игры, т.е. допускать немалые вольности в обращении с собственными аксиомами. Поэтому на второй стадии работы в дело вступает математик. Он не производит никакой качественно новой информации, но преобразует ту, что в неявной форме уже заложена в постановке задачи. Всё, что сидит в исходных аксиомах, должно быть выставлено наружу в виде теорем вне зависимости от того, нравится ли физiku полученный результат или нет...

Но вот результаты получены, теоремы доказаны. Теперь дело вновь за физиком. Ему предстоит выяснить, насколько полученный результат отвечает его ожиданиям. Если что-то не так, то в постановку задачи вносятся коррективы, правила игры корректируются, и

ход вновь переходит к математике, который выводит следствия из новых аксиом. И так, пока не будет получено что-то приличное...

Вот я и хочу отделить в постановке задачи физику от математики, а заодно поставить вопрос о некоторых уточнениях. Итак, обращаемся к Вашим материалам.

Аксиома № 1 о множествах

Здесь четко проглядывается исходная физическая мысль. Физический закон, в принципе, описывает взаимодействие двух различных объектов. В "шаровой" интерпретации всё выглядит чрезвычайно естественно. Был бы шар один, с ним бы ничего не произошло. А вот в результате столкновения двух шаров уже могут произойти какие-то процессы. С другой стороны, одновременное столкновение трех шаров сразу представляется мало вероятным. Поэтому привлечение третьего множества, по-видимому, не оправданно. Не зря, к примеру, в химии формально осуществимые реакции третьего и более порядков фактически представляют собой систему более простых реакций.

С первой аксиомой всё ясно. Единственно, я бы вместо "качественно различных" сказал бы просто "различных". Два разных множества – значит, не одинаковых. В противном случае требуется пояснение, чем качественное различие отличается от некачественного.

Аксиома № 2 о ящиках

Здесь уже, как мне кажется, требуются уточнения. Первое, что бросается в глаза, это утверждение о бесконечности множества шаров. Если это действительно необходимо, то бесконечность должна постулироваться в первой аксиоме, где речь идет как раз о множествах. Однако я думаю, что требование бесконечности лучше убрать. А вдруг мы захотим установить физический закон в условиях дискретно меняющихся параметров? Не говоря ничего, мы допускаем бесконечность, но не утверждаем ее как единственно возможную реальность. В противном случае следует пояснить в аксиоме №1, почему множества не могут быть конечными.

Думаю, суть аксиомы, как она есть, не в иерархическом принципе. Мы ведь уже в первой аксиоме утвердили существование единого объекта – множества и его элементарной единицы – шара. Повторяться не стоит. Стало быть, сюжетом аксиомы служит фиксация промежуточного объекта – ящика, т.е. подмножества определенных размеров.

Из текста аксиомы не понятно, какой ящик следует считать каноническим. Это любой набор шаров фиксированного количества? Или существуют какие-то заранее выделенные ящики данного размера, которые (и только они) считаются каноническими? Если реализуется первый вариант (думаю, так и есть), то слово "канонический" будет излишним, поскольку никакие другие ящики рассмотрению не подлежат. Напротив, во втором случае уточнение необходимо: среди множества потенциально реализуемых ящиков данного размера выбираются именно те, которые признаются каноническими. Таким образом, первая фраза должна характеризовать выделение на каждом множестве соответствующих ящиков.

Насколько я понимаю, отношение между множествами в целом мы вообще не затрагиваем. Здесь постулируется факт того, что физический закон выражает соотношение между двумя ящиками различных множеств, которое сводится к соотношениям между всевозможными парами шаров различных ящиков.

Аксиома № 3 о координатах

Здесь размерность шаров рассматривается вне связи с размерами ящиков. Если Вы ограничитесь приведенными аксиомами, то Вам едва ли удастся доказать связь между этими понятиями. Напоминаю, что все физические предположения должны быть включены в состав аксиом. Всё остальное должно строго получаться в виде теорем. Правила игры в процессе игры не меняются. Может быть, все-таки жестко закрепить эту

связь аксиоматически? Насколько я Вас правильно понял, первопричина здесь – размерность шаров. Вот, к примеру, при рассмотрении закона Ома для участка цепи батарейка имеет одну координату, а в случае полной цепи – две. Именно это (и только это) предопределяет тот факт, что в соответствующий ящик мы в первом случае кладем два шара, а во втором – три. Наличие фиксированной размерности шара отражает четкую физику: сколько независимых характеристик имеет физический объект в рамках данного закона, столько и координат у шара. А вот какая физика заложена в выборе размера ящика, не ясно. Если Вы убеждены в возможной независимости двух указанных характеристик или в возможности вывода их связи только из этих аксиом (в чем я сильно сомневаюсь), то все можно оставить, как есть. В противном случае аксиому о координатах следует сделать второй, а аксиому о ящиках – третьей (с констатацией того, что размер ящика есть конкретное следствие размерности шара).

Мне кажется, что эта аксиома содержит две различные мысли. Во-первых, постулируется факт наличия размерности, ни коем образом не связанный с аксиомой ящиков. Во-вторых, раскрывается суть заявленного в аксиоме ящиков соотношения между шарами и ящиками. В этой связи мне кажется, что данную аксиому следует разбить на две, причем вне зависимости от того, признаете ли Вы аксиоматическую связь между размерами ящиков и размерностью шаров.

По поводу репрезентатора не очень красиво выглядит предположение о достаточной гладкости. Во-первых, какую гладкость следует признать достаточной? Здесь чувствуется рука математика, которому на данном этапе исследования здесь делать нечего. Это математик может сказать: достаточная гладкость – та, при которой мне удастся получить данный результат. Но получение результата – проблема его, а не физика-постановщика. Если физик убежден, что репрезентатор должен быть непрерывным, дифференцируемым или каким-то еще из каких-то там высших соображений, то он должен так прямо и сказать. Думаю, здесь упоминание о гладкости следует опустить. А потом где-нибудь при доказательстве конкретной теоремы математик скажет: пусть функция такая-то имеет такую-то (конкретно такую) гладкость, тогда я гарантирую, что...

Требуется пояснить, что такое репрезентативная матрица. Я-то это понимаю, но из текста это не очевидно.

Аксиома № 4 о законе

Коренное отличие данной аксиомы от всех остальных – отсутствие физики, то самое, о чем мы долго спорили в Алма-Ате. Это математик может сказать: хочу так. Вот Вы прекрасно пишете в книге: результат (единственность решения уравнения) появляется естественным образом, а не вносится руками. А здесь всё, что есть (кроме репрезентативных матриц, определенных в предшествующей аксиоме) внесено руками. Что такое умножение матриц с физической точки зрения? Что такое обратная матрица с физической точки зрения? Чего ради связь между матрицами должна быть именно такой, а не какой иначе? Подумайте еще и о том, что умножение матриц никак не может быть введено в постановку задачи, будучи исключительно математической процедурой. Оно появляется именно в процессе решения задачи в связи с какой-то физической необходимостью. Но что это за необходимость? Если речь идет о разработке какой-то чисто математической теории, то всё прекрасно. А так, на любой полученный в дальнейшем результат Ваши потенциальные оппоненты могут сказать: этот результат является антропным, а не сакральным. Вот захотел математик Кулаков принять такую аксиому, получил именно это. А взял бы другую аксиому, получил бы совсем другое. Но физика-то процесса (так сказать, объективная реальность) не зависит от воли конкретного человека. Поэтому в отличие от предшествующих положений, эта аксиома, я думаю, должна быть доработана существенным образом. Естественно, заключительное утверждение о том, что можно показать (т.е. вид уравнения относительно верификатора),

формулируется в виде теоремы (если это действительно является прямым следствием принятых аксиом), но не здесь.

Такие вот мысли. И еще, я думаю, все-таки не стоит откладывать в сторону и геометрический вариант определения. Симонов, как я понимаю, еще не вышел на уровень Михайличенко, т.е. не доказал в рамках своей теории соответствующие теоремы о возможных видах физических структур.

С уважением,
Семен

12.11.04

Дорогой Юрий Иванович,

Мы таки провели семинар по итогам... Сильно откладывать это дело не хотелось бы – лучше действовать по горячим следам. На семинаре были практически все заинтересованные люди, исключая Нику. По ходу дела возник, пожалуй, один любопытный вопрос: можно ли количество эталонов данного класса объектов брать исходя из числа характеристик данного класса, а не противоположного? Тут же на месте выяснилось, что разницы никакой нет, вся теория остается в силе...

Ну и потом я немного подумал по поводу Φ . Можно констатировать следующие факты: ни у Вас, ни у Михайличенко доказательства единственности Φ нет. Более того, я попытался доказать единственность для структуры (2,2) при уже известной ϕ . С ходу не получилось. Но и подобрать контрпример не удалось (исключая вырожденные и негладкие случаи). Ясно, что вопрос этот не тривиален. Есть, правда, одна зацепка. Если Φ рассматривать как матричнозначный функционал, то он должен обладать весьма ограничительными свойствами: инвариантность относительно перестановки любых строк и столбцов. Возможно, Ваши знакомые алгебраисты смогут узнать, много ли таких объектов. Так или иначе, вопрос остается открытым.

С уважением,
Семен

13.11.4

Дорогой Семён!

Прошу простить меня за долгое молчание. Всё это время я тщательно анализировал Ваши письма и пытался найти наиболее адекватную формулировку исходных принципов, лежащих в основании ТФС. Вчера провели расширенный семинар с участием Андрея Симонова, нескольких математиков-алгебраистов и Геннадия Михайличенко, который приехал из Горно-Алтайска. Многое прояснилось и стало на свои места. Однако все мы чувствуем острую необходимость в Вашем участии. На новом витке нам крайне необходим Ваш критический анализ.

Нам очень странным показалось Ваше утверждение, что можно количество эталонов данного класса объектов брать исходя из числа характеристик данного класса, а не противоположного. Тут же на месте проверили, что разницы никакой нет, вся теория остается в силе...

Искренне Ваш Юрий Иванович

16.11.4

Дорогой Юрий Иванович,

События развивались так. Мне хотелось прочесть более или менее широким народным массам обзорную лекцию по теории физических структур. Ситуация, вообще-то, забавная. Процент физиков среди моих (математика!) потенциальных слушателей был весьма высок. Но четкого представления о предмете практически ни у кого не было, хотя люди Вас слушали и не раз. В общих чертах народ представление имел, но весьма поверхностно. Кроме того, среди слушателей намечалось какое-то количество молодых

людей. А эти-то (мои ребята) как раз не физики вовсе. Поэтому требовалась максимальная простота и четкость.

План лекции был такой:

1. Как проверить экспериментально закон Ньютона, если мы не знаем, в принципе, что такое масса и сила.
2. Как в этих же условиях количественно охарактеризовать тела и акселераторы.
3. Насколько предопределен закон Ньютона.
4. Что делать, если объект имеет несколько числовых характеристик (на примере закона Ома).
5. Какие гипотезы положены в основу теории физических структур.
6. Как строго определить понятие физической структуры.
7. Что известно о математических свойствах физических структур.

И вот в пункте четыре я задался вопросом, почему для проводника мы выбираем два эталона, хотя он имеет одну характеристику, а для батарейки ситуация – противоположная. Лично для меня никакого парадокса здесь не было: мы выбираем два эталона проводника с тем, чтобы с их помощью померить две характеристики батарейки и наоборот. Собственно, в моей последней книге (Секвенциальные модели) анализируется соотношение между классическими и обобщенными решениями задач математической физики. И там я пишу, что в рамках классического подхода мы ориентируемся на прямое наблюдение системы, а в рамках обобщенного подхода регистрируем отклик системы на воздействие извне. Понятно, что имеющийся способ выбора эталонов вполне соответствует обобщенному подходу. Но вставал неминуемый вопрос: а допустим ли классический подход, при котором проводник имел бы один эталон, а батарейка два? На всякий случай до семинара я обсудил этот вопрос с Кашкаровым и Савельевым. Мнение наше совпало – разницы не должно быть. Потом я проделал соответствующие выкладки. Количество произвольных параметров в обоих случаях одно и то же: три. Все характеристики перевязаны соответствующими соотношениями. Что конкретно фиксировать в качестве эталонов – не важно. А после полной формализации, когда мы переходим от физических объектов к их числовым характеристикам, получается одно и то же определение. Мы ничего не выигрываем и не проигрываем.

Такие дела.

С уважением,

Семен

4.4.8

Дорогой Семён!

Моя главная цель - разработка оснований физики второго поколения - Теории физических структур. Суть её в двух словах состоит в следующем.

Арифметика имеет дело с натуральными числами.

Алгебра имеет дело с абстрактными символами $a, b, c, \dots$

Далее вся математика и физика первого поколения ("физика Ландау") также имеют дело с различными абстрактными символами $a, b, c, \dots, i, k, j, \dots$

На языке абстрактных символов математика и физика первого поколения описывают многочисленные частные закономерности. Однако её аппарат не в состоянии уловить более глубокое понятие Универсального Закона.

Подобно тому, как для решения вопроса о разрешении в радикала алгебраического уравнения необходимо ввести чрезвычайно общее и глубокое понятие - группу, так и в случае понятия Универсального Закона, необходимо ввести новое фундаментальное абстрактное понятие - Корт, существенно обобщающее понятие вектора и точки.

Математика и физика второго поколения имеет дело с КОРТАМИ - ещё более абстрактными конечными последовательностями абстрактных символов $A = (a \dots c)$, $I =$

(i...j), рассматриваемыми как ЕДИНОЕ ЦЕЛОЕ. Подобно тому, как вектор представляет собой конечную последовательность вещественных чисел, корт как целое представляет собой конечную последовательность абстрактных символов, обобщающих понятие вектора и точки.

Замечу, что переход от буквенного счисления к СЧИСЛЕНИЮ КОРТОВ подобен переходу от счисления натуральных чисел к более широкому счислению букв и несомненно расширяет возможности существующей математики.

Скалярные произведения двух пар кортов - бикорты (А I), (В I), (А К), (В К) связаны между собой некоторым тождеством

$$(A I)/(B I) = (A K)/(B K) \text{ справедлив при любом выборе кортов } A, B, I, K.$$

Это тождество накладывает на вид скалярного произведения (А I) очень жёсткие ограничения. В результате чего возникает некоторое функциональное уравнение относительно бикорта (А I). имеющее единственное решение, зависящее от трёх целочисленных параметров.

Придавая этим параметрам различные значения получаем полный набор допустимых фундаментальных Физических Законов, из которых следуют хорошо известные физические законы первого поколения.

Итак, вся теоретическая физика может быть получена единственным образом из одного только требования инвариантности любого Универсального Закона относительно выбора двух пар кортов (А и В) и (I и К).

Я понимаю, что из этого краткого сообщения ничего понять невозможно. Но суть всё таки в том, что я нашёл, как мне кажется, новую более компактную аксиоматику ТФС. Ты единственный из всех математиков, с которыми я всерьёз могу обсуждать основания ТФС. Но нам так трудно встретиться по-видимому из-за утраты твоего интереса к ТФС. Я надеюсь, что принципиально новый подход к основаниям ТФС мог бы вновь заинтересовать тебя.

Большой привет от Люси. Твой Юрий Иванович.

5.4.8

Дорогой Юрий Иванович!

Я бы не стал говорить об утрате мною интереса к ТФС, хотя не совсем чувствую своё место в этом деле (не считая, естественно, обсуждения тех или иных вопросов). Не совсем понятно мне также, что понимается под математикой второго поколения. С конечными наборами объектов произвольной природы (а в равной степени, и с бесконечными, и даже – несчетными) математика работает очень давно (порядка ста лет), и даже имеет для них три наименования (в разных ее разделах) – кортеж, слово и вектор (понимаемый в широком смысле). В сущности, речь идет о точке (едином объекте) абстрактного конечномерного пространства, для которой составляющие элементарные объекты служат своего рода координатами. А при желании можно рассматривать и бесконечномерные пространства, составленные из объектов произвольной природы, или даже вообще убрать из рассмотрения понятие размерности. К примеру, во многих разделах математики рассматриваются функциональные пространства, точками которых являются функции – единые объекты с несчетным (но упорядоченным) множеством числовых "координат". А можно рассматривать пространства операторов, связывающие множества произвольной природы. В этом случае "координат" может оказаться даже больше континуума, причем каждая "координата" оказывается уже, вообще говоря, не числовой характеристикой. Естественно по сравнению с подобными объектами кортежи и т.п. образуются

чрезвычайно узкий класс. И всё это исследуется (и не без успеха) топологией, функциональным анализом, отчасти, алгеброй.

Мне кажется (возможно, я не прав), что ТФС выходит всё-таки не на основания математики, а куда-то в ее середину. Это, естественно, ни в коей степени не сказывается на результатах Ваших и Ваших учеников. Естественно, я готов всё это (и, в первую очередь, аксиоматику ТФС) обсуждать. Приехать я смогу лишь осенью (скорее всего, в октябре). Однако все вопросы я готов обсуждать сейчас по переписке. Высылайте. Мне это интересно.

Ваш Семен

Дорогой Семён!

Главная тема на моём семинаре - Архитектура математики.

Математика в целом как ориентированный граф?

Физическая структура как частный случай математических структур?

Как показать, что $(A|A) \mid (B|B) = (A \vee B)$, где $(A|B)$ - штрих Шеффера с истинно-ложностной таблицей:

A	B	$(A B)$
---	---	---------

1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

а $(A \vee B)$ - дизъюнкция с истинно-ложностной таблицей:

A	B	$(A \vee B)$
---	---	--------------

1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

До скорой встречи. Твой Юрий Иванович

Дорогой Юрий Иванович,

По поводу выражения дизъюнкции через штрих Шеффера, проблем никаких. Хотя я и не логик, но ответить могу с ходу. Здесь просто надо выполнить указанные процедуры, т.е. вычислить значения $(A|A) \mid (B|B)$ и $A \vee B$ при всех сочетаниях A и B. Точнее, вычислить надо первое значение, а потом сравнить результат с уже имеющимся для $A \vee B$.

Итак, согласно первой таблице имеем значения для штриха в квадрате:

$A|A$ принимает значение 1 при $A=0$ (случай $A|B$ при $B=A=0$) и значение 0 при $A=1$ (случай $A|B$ при $B=A=1$)

$B|B$ принимает значение 1 при $B=0$ (случай $A|B$ при $A=B=0$) и значение 0 при $A=1$ (случай $A|B$ при $A=B=1$)

Теперь вычисляем $(A|A) \mid (B|B)$ с учетом полученных выше значений $A|A$ и $B|B$.

При $A=0, B=0$ имеем $(A|A) \mid (B|B) = 1|1 = 0$

При $A=1, B=0$ имеем $(A|A) \mid (B|B) = 0|1 = 1$

При $A=0, B=1$ имеем $(A|A) \mid (B|B) = 1|0 = 1$

При $A=1, B=1$ имеем $(A|A) \mid (B|B) = 0|0 = 1$

А это в точности совпадает с таблицей $A \vee B$.

Ваш Семен

2.9.8

Дорогой Семён!

Всё понял. Спасибо!

Моя ошибка заключалась в том, что я считал, что поскольку каждой из шестнадцати логических функций, представляющей собой целочисленную функцию двух целочисленных переменных, естественным образом сопоставляется 2×2 -матрица, то композиции двух операций должна соответствовать новая 2×2 -матрица, полученная по определённому правилу из двух исходных матриц, минуя способ тупого перебора вариантов. Однако, то что я считал 2×2 -матрицей, на самом деле является строкой, состоящей из четырёх целочисленных координат одной из шестнадцати вершин четырёхмерного куба. И в этом случае, по-видимому, без тупого перебора вариантов не обойтись.

С нетерпением жду твоего приезда.

Твой Юрий Иванович

Дорогой Семён!

Я вновь возвращаюсь к понятию банаховского пространства.

В чём смысл открытия банаховских пространств?

Всё началось с трёхмерного «пространства», в котором мы живём.

Что такое пространство?

Евклид попытался ответить на этот вопрос, создав достаточно громоздкую систему аксиом. По сути дела он заменил интуитивное понятие «невидимого вместилища, в котором всё происходит» более абстрактным и более строгим математическим объектом, который определил с помощью некоторой системы аксиом. Долгое время математики думали, что между физическим пространством, то есть интуитивным пространством, в котором мы живём, и евклидовой системой аксиом существует единственное взаимно-однозначное соответствие. Однако, спустя 2300 лет выяснилось, что изменяя систему аксиом можно получить новые объекты, не совпадающие с физическим пространством, но обладающие не менее богатыми свойствами. Испытав некоторый шок; «Вижу, но не верю!» математики, в конце концов поняли, что существует целый мир богатых невидимых математических объектов, опосредованно связанных с тем миром материальной действительности, в котором мы живём.

Так появились новые математические объекты: пространство Лобачевского, n – мерные евклидовы пространства. Дальше – больше. Математики научились с помощью соответствующего выбора исходных аксиом создавать всё новые и новые математические объекты, лишь весьма отдалённо напоминающие исходное трёхмерное евклидово пространство.

Так были открыты целые залежи (к настоящему времени их насчитывается более двухсот) богатых «пространств», среди которых особенно выделяются банаховские пространства.

В чём состоит их богатство?

Юрий Иванович

Дорогой Юрий Иванович!

С банаховыми пространствами история такая. После открытия евклидовых пространств произвольной размерности решающий шаг вперед был сделан Гильбертом,

который ввел в рассмотрение бесконечномерное пространство. Современный анализ (функциональный анализ!) – это, конечно же, бесконечномерный анализ. Если ранее под точкой подразумевали два, три, в крайнем случае, n чисел (вектора соответствующей размерности), то у Гильберта роль точки играло бесконечное множество чисел (последовательность). Непосредственные последователи Гильберта развили концепцию гильбертова пространства, но здесь предстояло сделать еще два принципиальных шага вперед. И вот тут-то значительную роль сыграл Банах. Впрочем, параллельно работали Рисс, Хан, Хелли, фон Нейман и другие, хотя наиболее глубокие результаты все-таки были получены Банахом.

Во-первых, предстояло при рассмотрении пространства общего вида вообще отказаться от понятия размерности. Оно не вводится априори, а проявляется как свойство (точнее класс свойств), которое при переходе к конкретному пространству может быть реализовано в той или иной форме. В результате роль точек в пространствах более общей природы стали играть функции, операторы и, вообще, объекты произвольной природы, лишь бы только они в своей совокупности удовлетворяли соответствующей аксиоматике. Тем самым геометрические концепции внедрились в функциональный анализ, а через него – в другие разделы математики.

Во-вторых, Гильберт отталкивался от евклидовых пространств и непременно вводил понятие скалярного произведения. Его сохранили и для абстрактных (в частности, функциональных) гильбертовых пространств. В результате такие пространства приобрели великолепные геометрические свойства, вследствие чего они нашли практическое применение повсюду, включая прикладные разделы математики, да и физику тоже (та же квантовая механика). Однако вскоре стало ясно, что требование наличия скалярного произведения чрезвычайно ограничительно. К примеру, в нелинейных уравнениях в частных производных, как правило, возникают объекты, которые уже не удастся погрузить в какие-либо гильбертовы пространства. А вот их обобщения – банаховы пространства приобретают здесь (и не только здесь) особый смысл.

Что такое банахово пространство? Это полное линейное нормированное пространство. Что такое линейность? Множество считается линейным пространством, если для его элементов определены операции сложения и умножения на число (аналоги сложения векторов и умножения вектора на скаляр). Кстати, не случайно линейные пространства называют также векторными пространствами, а их элементы – векторами, хотя в качестве таковых зачастую выступают последовательности, функции, операторы и др. К примеру, суммой непрерывных функций f и g является непрерывная функция (объект того же класса), значение которой в каждой точке x равно сумме $f(x)+g(x)$, а произведением функции f на число a является функция, принимающая в произвольной точке x значение $af(x)$. Тем самым пространство непрерывных функций оказывается линейным пространством.

Линейное пространство называется нормированным, если каждому ее элементу сопоставляется некоторое неотрицательное число, называемое нормой и являющееся естественным обобщением понятия нормы вектора. Например, в пространстве непрерывных функций наиболее естественной нормой $\|f\|$ функции f служит максимум модуля $|f(x)|$ по всем точкам x из области определения функции. Если линейность – это чисто алгебраическое свойство объекта, то норма наделяет объект топологическими свойствами. В частности, последовательность $\{f_k\}$ точек нормированного пространства сходится к точке f , если норма разности $\|f_k - f\|$ стремится к нулю.

Наконец, заключительное свойство полноты линейных нормированных пространств предполагает выполнение на этом пространстве критерия сходимости Коши. Суть его состоит в том, что классическое определение предела (даже для чисел) не является конструктивным. Чтобы узнать, сходится ли последовательность или нет, надо заранее знать элемент, который мы подозреваем в качестве предела: последовательность сходится, если с ростом номера элемент последовательности неограниченно приближается к

пределу. Однако на практике мы обычно имеем последовательность, но не только не знаем ее предела, но даже не уверены в том, что последовательность вообще куда-то сходится. Чтобы обойти эту ситуацию Коши (и независимо от него – Больцано) предложил более конструктивное свойство фундаментальности. Последовательность фундаментальна, если ее элементы неограниченно сближаются с ростом номеров элементов. Проверить фундаментальность можно, работая только с элементами самой последовательности. Так вот, критерий Коши звучит так: фундаментальная последовательность действительных чисел сходится. Доказательство сходимости последовательности в конкретной ситуации при этом сводится к обоснованию свойства фундаментальности и применению критерия Коши. Итак, пространство называется полным, если в нем работает критерий Коши.

Итог, банаховы пространства – объект смешанной (алгебраической и топологической структуры), обладающий чрезвычайно богатыми свойствами. В настоящее время банаховы пространства наряду с гильбертовыми являются важнейшим классом пространств, используемых в современном анализе и его приложениях – дифференциальных уравнениях, вычислительной математике, теории оптимального управления, теорией вероятностей и др. При этом гильбертовы пространства обладают лучшими свойствами, но составляют более узкий класс, а банаховы – наоборот. Существуют и различного рода обобщения – например, линейные топологические пространства с меньшим запасом алгебраических и топологических свойств.

Семен

Дорогой Семён!

Всё понял - банахово пространство это обобщение гильбертова пространства; сохраняется сложение и умножение на число, но вместо сильно ограничительного скалярного произведения принимается более свободная норма. В результате сохраняются алгебраические и возникают топологические свойства и расширяется область применения. Не ясно, ослабляется или усиливается понятие сходимости по Коши? А кроме того, в гильбертовом пространстве уже присутствует топология или ещё нет?

Вопрос о банаховом пространстве у меня возник в связи желанием объяснить физикам и самому понять, что такое физическое пространство само по себе.

Начиная с какого момента множество абстрактных объектов можно называть "пространством"?

Юрий Иванович

Дорогой Юрий Иванович!

Вы совершенно верно характеризуете банахово пространство. В гильбертовом пространстве топология естественно есть, хотя бы потому, что любое гильбертово пространство является банаховым. Собственно, «родных» топологий там две. Одна из них, называемая сильной, определяется через норму, которая характеризуется квадратным корнем из скалярного квадрата. Другая называется слабой и определяется через скалярное произведение. Понятие полноты и сходимости по Коши определяется одинаково в гильбертовых и банаховых пространствах. Просто в гильбертовых норма связана со скалярным произведением, а в банаховых общего вида такой связи нет, поскольку нет и скалярного произведения.

Что же касается предела использования понятия «пространства», то это, в известной степени, дело вкуса. Как я уже говорил, едва ли не главным понятием линейной алгебры является линейное пространство – чисто алгебраический объект, в котором имеется две процедуры – сложение объектов и умножение объекта на число. К примеру, оператор дифференцирования является элементом линейного пространства всевозможных операторов, действующих из множества непрерывно дифференцируемых функций в множество непрерывных функций. К числу топологических пространств относится, к

примеру, даже пустое множество, наделенное тривиальной топологией (включающей пустое множество). Более того, на любом множестве вообще можно естественным образом задать топологию, превратив его в топологическое пространство, причем таких топологий – великое множество. К примеру, на множестве, состоящим из двух произвольных элементов, можно определить четыре топологических пространства, три из которых существенно различаются по своим свойствам (об этом подробно говорится у меня в архитектуре в разделе «топология»).

Таким образом, термин «пространство» невообразимо широк и используется в математике в весьма разных значениях. Поэтому говорить о пределе использования данного понятия практически невозможно. Если пространство толковать расширенно, считая таковым, к примеру, любое топологическое пространство, то такого предела попросту нет.

Семен

25.11.9

Дорогой Семён, с большим интересом прочитал твою новую статью о геометризации математики. Наиболее сильным показалось мне утверждение, что геометрия постепенно превращается в раздел топологии и функционального анализа. В одном из своих писем ты объяснил мне, что такое пространство Банаха, Это произвело на меня сильное впечатление. Так что я был подготовлен к пониманию последней части твоей статьи. Эта статья стимулировала у меня новые мысли об основании математики.

Начнём с интуитивного понятия **множества**. Следующим интуитивным понятием является понятие **элемента множества**. Считается, что это понятие является «неделимым». Подобно тому, как до поры до времени считался неделимым атом. Настал момент разделения, расщепления элемента множества a на две части – на **первоэлемент** мужского рода («левого», «верхнего») $|a\rangle$ и **первоэлемент** женского рода («правого», «нижнего») $\langle a|$. Это выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{cc} |a\rangle & \langle a| \\ a & b \end{array}$$

Использование для обозначения первоэлементов $|a\rangle$ и $\langle a|$ дираковских «кет» и «бра» имеет провиденциально глубокий смысл – выражение $|a\rangle \langle a|$ в квантовой механике имеет смысл проекционного оператора, $a\langle a|$ имеет смысл вектора состояния или «волновой функции». Именно с этих понятий начинается изложение квантовой механики в современных учебниках.

Но вернёмся к формулировке исходных оснований теории физических структур. Для этого зададим два натуральных числа – ранг физической структуры (s,r) и осуществим расщепление s элементов $a_1, a_2, \dots, a_s$ и r элементов $b_1, b_2, \dots, b_r$:

$$\begin{array}{cc} |a_1\rangle \langle a_1| & |b_1\rangle \langle b_1| \\ |a_2\rangle \langle a_2| & |b_2\rangle \langle b_2| \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ |a_s\rangle \langle a_s| & |b_r\rangle \langle b_r| \end{array}$$

$$|a_1 a_2 \dots a_s\rangle \langle a_1 a_2 \dots a_s| \quad |b_1 b_2 \dots b_r\rangle \langle b_1 b_2 \dots b_r|$$

Итак, мы получили четыре **корта**: два женских и два мужских

$$\begin{array}{cc} \langle a_1 a_2 \dots a_s| & |b_1 b_2 \dots b_r\rangle \\ \langle b_1 b_2 \dots b_r| & |a_1 a_2 \dots a_s\rangle \end{array}$$

Из них построим два **бикорта** ранга (s,r) и ранга $(r,s)^\wedge$

$$\begin{array}{c} \langle a_1 a_2 \dots a_s | b_1 b_2 \dots b_r \rangle \\ \langle b_1 b_2 \dots b_r | a_1 a_2 \dots a_s \rangle \end{array}$$

Переобозначим первоэлементы женского рода греческими буквами, а первоэлементы мужского рода – латинскими:

$$\langle \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s | i_1 i_2 \dots i_r \rangle$$

Бикорт ранга (s,r) представляет собой $s \times r$ -матрицу

$$\langle \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s \mid i_1 i_2 \dots i_r \rangle = \frac{\langle \alpha_1 \mid i_1 \rangle \dots \langle \alpha_1 \mid i_r \rangle}{\langle \alpha_s \mid i_1 \rangle \dots \langle \alpha_s \mid i_r \rangle}.$$

Основная идея, лежащая в теории физических структур, состоит в том, чтобы найти тождество **относительно двух групп** нечисловых переменных $a_1 a_2 \dots a_s$ и $i_1 i_2 \dots i_r$, то есть найти такую вещественнозначную функцию sg вещественных переменных

Φ ($\phi_{11}, \phi_{12}, \dots, \phi_{sr}$), которая обращалась бы в тождественный нуль **при любом выборе двух групп** нечисловых переменных $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s$ и $i_1 i_2 \dots i_r$, от которых зависят вещественнозначные функции $\phi(\alpha, i) = \langle \alpha | i \rangle$. Другими словами, задача сводится к решению следующего функционального уравнения относительно двух неизвестных функций Φ и ϕ :

[illegible]

Дорогой Семён! В дополнение к предыдущему письму замечу:

К векторам бра и кет в полной мере применимо замечание Е.Вигнера, что о глубине идеи, заложенной в формулировку нового математического понятия, можно судить лишь впоследствии по тому, насколько искусно удаётся использовать это понятие. Использование символов $\langle |$ и $| \rangle$ для обозначения первоэлементов женского и мужского рода ещё раз подтверждает эту мысль Вигнера. Твой Ю. И.

26.11.9

Дорогой Юрий Иванович!

Вообще-то, было бы не совсем верно утверждать, что геометрия превратилась в раздел топологии и функционального анализа. Если чем геометрия поглощалась, и так это алгеброй посредством той же теории групп. А вот топология, зародившись, однозначно в недрах геометрии, фактически оторвалась от нее. Впрочем, здесь нет единого мнения. Многие считают, что топология – всё-таки раздел геометрии. Другие (и я в том числе) воспринимают ее как самостоятельный раздел математики, поскольку основополагающие принципы здесь связаны с понятием непрерывности, имеющим скорее аналитический, чем геометрический смысл. Ну а функциональный анализ – это раздел анализа, но только отбросивший требование конечномерности. А, как следствие, практически вся проблематика функционального анализа базируется на топологических конструкциях, в наилучшей степени выражающих аналитические понятия (непрерывность, сходимости, последовательность и т.д.) в бесконечномере. А вот побочный эффект (а возможно, напротив, самый главный) от выхода из классического (т.е. конечномерного) математического анализа в анализ функциональный связан со становлением понятия абстрактного математического пространства, над которым не довлеет размерность. А уже это позволило перенести геометрические идеи, конструкции, иллюстрации на математические объекты произвольной природы, что и является тем, что я назвал геометризацией математики.

Что же касается оснований математики, то я придерживаюсь той позиции, что первоосновой является триада "множество-элемент-свойство", если, конечно, не считать логику, которая лежит в основе языка математики, на котором излагаются, помимо всего прочего, и сами основания. Все составляющие триады равноправны, причем любые две ее составные части позволяют определить третью. Так, множество характеризуется элементами, обладающими каким-либо общим свойством. Элементы – это то, что, будучи наделенным свойством, образует множество. Наконец свойство – это то, посредством чего

элементы могут группироваться в множество. При этом все, что встречается в математике, сводится к множествам, элементам и свойствам, причем в зависимости от контекста один и тот же объект может проявляться как множество, элемент или свойство. К примеру, объект "1" может быть интерпретирован как **элемент** по отношению к совокупности всех натуральных чисел (1 есть натуральное число). С другой стороны, согласно теоретико-множественному определению 1 – это **множество** всех множеств, которые можно взаимно однозначно отобразить на совокупность всех подмножеств пустого множества $\emptyset$ (а таковых имеется только одно – а именно, само множество $\emptyset$). С третьей стороны, 1 – это количественная характеристика множества, т.е. **свойство**, характеризующее конкретное число его элементов (в данном случае один элемент).

Не знаю, имеет ли это какое-то отношение к тому, что Вы предлагаете, но, возможно, что и имеет.

Семен

27.11.9

Дорогой Семён! Я понял, как комфортно чувствуют себя все математики в триаде: «множество, элемент, свойство». Наверное так же комфортно чувствовали себя математики в мире вещественных чисел триста лет тому назад. И как трудно было им допустить, что существует **расщепление** вещественного числа на действительную и мнимую компоненту.

Не связано ли непонимание сущности квантовой механики с нежеланием физиков и математиков усомниться в незыблемости оснований самой математики. Не означает ли введение Дираком двух новых понятий «кет» и «бра» (волновой функции и её сопряжённой) **расщеплением на две компоненты** – первоэлемента мужского и первоэлемента женского рода хорошо известного понятия «элемента» в триаде: множество, элемент, свойство? Не является ли хорошо известный в квантовой механике **оператор проектирования** $|i\rangle\langle i|$ расщеплением элемента i некоторого множества состояний?

Замечу, что вся теория физических структур строится на понятии корта – конечной последовательности первоэлементов мужского и женского рода.

Далее, вся генетика, в виде матричной генетики Петухова строится на понятии первоэлементов мужского и женского рода «белых» и «чёрных» символов, лежащих в основании натурального ряда.

Я убеждён, что введение в математику двух новых понятий – первоэлементов мужского и женского рода способно обогатить ее так же, как обогатило её открытие комплексных чисел.

Твой Юрий Иванович

28.11.9

Дорогой Юрий Иванович!

Едва ли математики особо чувствуют себя комфортно в упомянутой триаде, поскольку, вообще-то речь идет совсем не об общепринятом понятии. Собственно, в такой форме триаду сформулировал я сам во втором издании "Архитектуры", отталкиваясь, впрочем, от одной мысли, высказанной в "Теории множеств" Бурбаки. Идея там была несколько иной, но мне показалось, что так будет красивее и удобнее с методической точки зрения. Однако сомневаюсь, что кто-то от этого почувствовал себя комфортнее.

Что касается расщепления действительных чисел, то, как я понимаю, Вы имели в виду все-таки комплексные числа с действительной и мнимой частью. Но в их расщеплении как раз ничего удивительного и не было. Их почти сразу так и понимали. По крайней мере, уже Валлис в середине 17 века высказывал нечто подобное.

А вот где Ваша мысль действительно срабатывает, так это в понятии идеальных чисел, введенных Куммером. Дело было так. Есть такая основная теорема арифметики – любое

натуральное число однозначно разлагается в произведение простых сомножителей. В процессе попытки доказательства теоремы Ферма и некоторых других утверждений было введено понятие целого алгебраического числа – некоторое обобщение натурального числа. Так вот, оказывается, что целое алгебраическое число может разлагаться на простые сомножители не однозначно, т.е. возможно равенство $a=b \cdot c=d \cdot e$, где a – целое алгебраическое число, а b, c, d, e – целые простые числа (не важно, что под этим подразумевать). И Куммер отметил, что и обычные целые числа могут допускать неоднозначное разложения, например, $60=4 \cdot 15=6 \cdot 10$. А хитрость здесь в том, что участвующие в этом разложении сомножители в действительности не являются простыми, в частности, $4=2 \cdot 2$, $15=3 \cdot 5$, $6=2 \cdot 3$, $10=2 \cdot 5$. Если мы подставим эти разложения в предшествующие равенства, то однозначность разложения числа 60 будет налицо: $60=2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. И Куммер выдвинул удивительную идею. Он предположил, что b, c, d, e в действительности не являются в полном смысле простыми числами, что их можно разложить дальше на еще более простые так называемые "идеальные числа" α, β, γ , в частности, $b = \alpha \cdot \alpha$, $c = \beta \cdot \gamma$, $d = \alpha \cdot \beta$, $e = \alpha \cdot \gamma$. И тогда мы действительно восстанавливаем однозначность разложения: $a = \alpha \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$. Вот это, думаю, в точности Ваша ситуация. До Куммера математики считали, что простые алгебраические числа действительно простые, а Куммер сумел их расщепить на еще более простые составляющие. И за счет этой идеи он существенно продвинул вперед и алгебру, и теорию чисел, и собственно, теорему Ферма.

Ну а то, что Вы пишете, соответствует понятию двойственности, используемое в различных разделах математики и присутствующее, видимо, в наиболее общем виде в теории категории. К примеру, выражение $\langle x | y \rangle$ может интерпретироваться как соотношение двойственности между элементом x некоторого пространства и элементом y соответствующего сопряженного пространства, простейшим примером чего может быть скалярное произведение вектора-строки на вектор-столбец. Так что в математике такого типа объекты встречаются не редко, и переходят в различного рода приложения.

Но всё это прекрасно излагается в рамках традиционной математики, а значит, лежит не на уровне оснований. Вот если бы расщепление элементов множества на две компоненты приводило бы к качественно новым результатам, не укладывающимся в традиционные рамки (как идеальные числа Куммера), то эта идея была бы действительно неоспорима.

Ваш Семен

1.12.9

Дорогой Семён! Расщепление элемента любого множества на два **первоэлемента** позволяет ввести два новых математических объекта – два **корта** $\langle \alpha_1 \dots \alpha_s |$ и $| i_1 \dots i_r \rangle$, произведение которых – **бикорт** $\langle \alpha_1 \dots \alpha_s | i_1 \dots i_r \rangle$ представляет собой $s \times r$ – матрицу, элементы которой $\langle \alpha | i \rangle$ связаны между собой функциональным уравнением, имеющим единственное решение, лежащее в основании всех известных физических законов.

Кроме того, возникновение двух новых символов $\circ$ и $\bullet$ при построении понятия натурального числа приводит к необходимости введение двух новых ювенильных кортов, построенных из символов $\circ$ и $\bullet$, для описания генетического кода.

Ты по-прежнему считаешь, что предлагаемая мной «теория кортов» не имеет никакого отношения к основаниям математики?

Твой Юрий Иванович

Дорогой Юрий Иванович!

То, что касается теории физических структур – с этим все понятно. В том смысле, что не об этом речь. Результаты Ваши здесь я безоговорочно признаю, включая оригинальность полученных уравнений, как математического объекта. А вот что такое «теория кортов», я не знаю. Как я уже говорил, то, что Вы называете кортом, в математике

уже существует. И я не понимаю, зачем нужно расщеплять элементы множеств. Всё то, с чем Вы работаете, а в равной степени, и описание генетического кода, как мне кажется, адекватно описывается в рамках уже известного математического аппарата. Вот, к примеру, без введения комплексных чисел, по крайней мере, нельзя дать полное описание алгебраических уравнений. Стало быть, их введение в качестве самостоятельного объекта оправданно. Думаю, значимость Ваших результатов нисколько не снизится и в том случае, если их не относить к основаниям математики. Всё-таки направленность у них – физическая, хотя и применяемый при этом математический аппарат, безусловно, интересен. Но мне представляется, что это все-таки не основания математики.

Ваш Семен

7.12.9

Дорогой Семён!

Как ты думаешь, чем отличается физика от математики?

Например, отличается ли математика, лежащая в основании квантовой механики от «чистой» математики? Другими словами, отличается ли амплитуда вероятности $\langle \lambda | a \rangle$ от скалярного произведения двух комплексных векторов λ и a в линейной алгебре? или ускорение a_{ai} тела i под действием пружинки a – числовой функции двух нечисловых переменных, от второй производной от координаты по времени? Короче говоря, отличается ли физика от математики не только интерпретацией, но и самой «математикой»; одна математика для оснований физики например бра $\langle |$ и кет $| \rangle$ для квантовой механики и $\langle \alpha_1 \dots \alpha_s |$ и $| i_1 \dots i_r \rangle$ для теории кротов и символы $\circ$ и $\bullet$ для натурального ряда и генетики и другая математика для «чистой» линейной алгебры и теории множеств? Так может быть понятия «крот», «спинор», «точка», «вектор» имеют совершенно другой смысл даже в самой математике нежели понятие «кротей»!

Я считаю, что введение двух новых символов $\circ$ и $\bullet$ в принципе нечто другое, нежели использование двух чисел 0 и 1.

Короче говоря, я считаю, что теория физических структур (или теория кротов) есть область «чистой» математики со своими понятиями и законами, отличными от тех, которые только похожи (как «крот» и «кошка») на понятия и исходные принципы традиционной математики. И чем раньше мы осознаем это отличие кота от кошки, тем легче мы поймём глубинный смысл генетического кода и физических законов вообще и квантовой механики и теории относительности в частности.

Твой Юрий Иванович

Дорогой Юрий Иванович!

Ни в Вашей книге, ни в известных мне работах Михайличенко и Симонова я не видел ничего такого, что не было бы изложено средствами «традиционной математики». Новые интересные чрезвычайно важные великолепные результаты – да, безусловно. Но математическая форма, язык... Да, эти объекты можно назвать так, а не иначе. Да, можно вести изложение материала в этой форме. Но, будучи изложенной в обычной форме векторов, матриц, кротей, функций, уравнений и т.п., теория, по-видимому, останется в точности той же самой. По крайней мере, мне так кажется.

Если речь идет о качественно новом математическом понятии, не о новом результате, а о принципиально новом математическом объекте, то надо временно забыть о его физическом или каком-либо другом прототипе, и дать его строгое чисто математическое определение. Таковы правила игры в математике. А там и станет видно, укладывается ли это понятие в известные конструкции. Давайте, к примеру, возьмем определение крота. Но не как тот объект, что входит в состав уравнений ТФС, а как самостоятельное понятие безотносительно того, где он используется. Тогда и выяснится, есть ли у нас предмет спора.

Мне кажется, что здесь ситуация аналогичная следующей. Гармонической функцией называется гладкое решение уравнение Лапласа – опять же объект, входящий в специфическое уравнение. Существует ли самостоятельное понятие «гармоническая функция»? Безусловно, причем она обладает массой замечательных свойств, присущих именно ей и имеет большое значение как для самой математики (например, в теории функции комплексного переменного), так и для приложений. Но является ли это качественно новым математическим понятием по сравнению с обычным математическим понятием функции? Нет, не является. Это – какая-то конкретная функция, точнее функциональный класс, поскольку здесь завязана еще и область ее определения.

Так вот, как мне кажется, и у Вас та же ситуация. Если Вы говорите: корт по определению это конкретно тот математический объект, который входит в Ваши уравнения, то никаких возражений здесь нет и быть не может. Вы это дело ввели и имеете полное право называть это так, как считаете нужным. Тогда Ваш корт – это частный случай, конкретная реализация общематематического понятия «кортеж» (он же «слово», он же «вектор» в расширенном толковании, он же «энка» при наличии n объектов), подобно тому, как гармоническая функция – это частный случай функции. Да в таком виде он вполне содержателен, как содержательна гармоническая функция. Но их место – не в основаниях математики, поскольку они получаются путем чистой конкретизации более фундаментальных понятий. Точно также число "пи" более чем замечательно. Но это есть замечательный конкретный объект множества действительных чисел (более фундаментальных понятий), и при всем богатстве его свойств и приложений место ему – не в основаниях математики.

Другими словами, я безоговорочно признаю теорию физических структур: здесь и впрямь в полной степени есть и математическая теория, и более чем серьезные приложения. А вот теории кортов я просто не вижу. Возможно, я что-то недопонимаю.

Ваш Семен

30 декабря 2009

Аксиомы, лежащие в основании Закона Ньютона:

1. Имеем два множества различной природы:
 $M = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ и $N = \{i_1, i_2, \dots\}$ (α назовём физическим объектом – **акселератором**; i назовём другим физическим объектом - **телом**)
2. Введём числовую функцию двух нечисловых переменных – **репрезентатор**
 $\langle \alpha | i \rangle = \varphi(\alpha, i)$.
3. Рассмотрим две конечные последовательности $\langle \alpha, \beta |$ и $| i, k \rangle$ (два **корта** ранга (2,2)).
4. Рассмотрим скалярное произведение двух кортов $\langle \alpha, \beta | i, k \rangle$ ранга (2,2), представляющее собой 2x2-матрицу, элементами которой являются четыре репрезентатора
 $\langle \alpha | i \rangle \langle \alpha | k \rangle$
 $\langle \beta | i \rangle \langle \beta | k \rangle$

или

$$\begin{matrix} \varphi(\alpha, i) & \varphi(\alpha, k) \\ \varphi(\beta, i) & \varphi(\beta, k) \end{matrix}$$

Основная трудность состоит в том, чтобы избавиться от неопределённого понятия «**физического смысла**».

Итак, что это? Это возможность описать физические законы средствами чистой математики.

Дело в том, что физический смысл возникает в недрах самой математики при наличии в ней **математических предшественников** этого смысла. Такими предшественниками являются

1. Два множества различной природы **M** и **N**.

- Итак, 21 проблема Гильберта является чисто математической проблемой и может быть решена средствами самой математики, а двадцать вторая (Шестая!) проблема относится к принципиально иной, не менее богатой, реальности и не сводится к существующим аксиомам.