

Ю. И. КУЛАКОВ

ОБ ОДНОМ ПРИНЦИПЕ, ЛЕЖАЩЕМ В ОСНОВАНИИ КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 12 II 1968)

Общая черта всех физических законов состоит в том, что различные физические объекты, принадлежащие к определенным классам, равноправны по отношению к рассматриваемому закону. Ниже излагается математический аппарат, позволяющий естественным образом сформулировать это понятие равноправия. Общий принцип, лежащий в основе формулировки физических законов, записывается в виде системы функциональных уравнений весьма специального вида. В дальнейших работах мы намерены показать, каким образом этот принцип может быть применен к вопросам обоснования известных физических теорий. Этот подход нам представляется полезным в том отношении, что с его помощью можно делать заключение о структурных особенностях еще не построенных, но принципиально возможных теорий.

Рассмотрим два множества произвольной природы: множество $\mathfrak{M}$ с элементами $i, k, \dots, l, \dots$ и множество $\mathfrak{N}$ с элементами $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Допустим, что каждой паре $(i, \alpha) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется вещественное число $a_{i\alpha} \in R$, так что на множестве $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ определена функция $A: (i, \alpha) \rightarrow a_{i\alpha}$. (Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — множества физических объектов, то $a_{i\alpha}$ — результат экспериментальной операции, характеризующий отношения, в которых находятся объекты i и α .) Пусть m и n — натуральные числа, а $\mathfrak{M}_m = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ и $\mathfrak{N}_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ — конечные подмножества множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, состоящие соответственно из m и n элементов. Подмножества $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$ определяют некоторую матрицу из m строк и n столбцов

$$\|a_{i_k \alpha_\gamma}\|_{\substack{k=1, 2, \dots, m \\ \gamma=1, 2, \dots, n}} \quad (1)$$

Каждую такую матрицу мы будем рассматривать как точку mn -мерно-го арифметического пространства R^{mn} . Порядок, в котором берутся элементы подмножеств $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$, считаем несущественным, в силу чего будем считать, что все $m!n!$ матриц, получаемых перестановками строк и столбцов матрицы (1), описывают одну и ту же физическую ситуацию. В дальнейшем преобразования пространства R^{mn} , соответствующие перестановкам строк и столбцов матрицы (1), будем называть каноническими перестановками R^{mn} .

Мы будем говорить, что на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задана физическая структура ранга (m, n) , если выполнены следующие условия:

А. Существует аналитическая функция mn переменных $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ с естественной областью определения, инвариантная относительно канонических перестановок пространства R^{mn} такая, что множество $M = \{x_1, x_2, \dots, x_{mn}\} \subset R^{mn}$, определяемое уравнением

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{mn}) = 0, \quad (2)$$

не пусто и градиент Φ отличен от нуля по крайней мере в одной точке множества M .

В. Совокупность всех точек $(a_{i_1 \alpha_1}, a_{i_1 \alpha_2}, \dots, a_{i_m \alpha_n})$ пространства R^{mn} , где $\{i_1, i_2, \dots, i_m\} = \mathfrak{M}_m \subset \mathfrak{M}$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \mathfrak{N}_n \subset \mathfrak{N}$ образует подмно-

жество M , открытое относительно M . В частности, при любых $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$

$$\Phi(a_{i_1 a_1}, a_{i_1 a_2}, \dots, a_{i_m a_n}) = 0. \quad (3)$$

С. Если уравнение (3) может быть однозначно разрешено относительно $a_{i_k a_\lambda}$, то, рассматривая $a_{i_k a_\nu}$, где $\nu \neq \lambda$, и $a_{i_s a_\lambda}$, где $s \neq k$, как две группы параметров, мы требуем, чтобы они входили в f существенным образом.

Д. Для всякой системы n чисел u_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющей уравнению

$$\Phi(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}; \dots; a_{m-1,1}, a_{m-1,2}, \dots, a_{m-1,n}; u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,$$

где $a_{p\lambda} = a_{i_p a_\lambda}$ ($p = 1, 2, \dots, m-1$; $\lambda = 1, 2, \dots, n$), $i_p \in \mathfrak{M}_{m-1}$, $a_\lambda \in \mathfrak{N}_n$, найдется такой элемент $i \in \mathfrak{M}$, что $u_\lambda = a_{i a_\lambda}$; аналогично, для всякой системы m чисел v_μ ($\mu = 1, 2, \dots, m$), удовлетворяющей уравнению

$$\Phi(a_{11}, \dots, a_{1, n-1}, v_1; a_{21}, \dots, a_{2, n-1}, v_2; \dots; a_{m1}, \dots, a_{m, n-1}, v_m) = 0,$$

где $a_{p\lambda} = a_{i_p a_\lambda}$ ($p = 1, 2, \dots, m$; $\lambda = 1, 2, \dots, n-1$), $i_p \in \mathfrak{M}_m$, $a_\lambda \in \mathfrak{N}_{n-1}$, найдется такой элемент $\alpha \in \mathfrak{N}$, что $v_p = a_{i_p \alpha}$.

Мы будем говорить также, что функциональная зависимость (3) задает первичный физический закон ранга (m, n) , инвариантный относительно выбора конечных подмножеств $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$ и реализуемый на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Требование существования соотношения (3) при любом выборе m элементов из множества $\mathfrak{M}$ и n элементов из множества $\mathfrak{N}$ мы называем принципом феноменологической симметрии. Этот принцип наиболее естественным образом выражает факт равноправия всех элементов множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ по отношению к первичному физическому закону ранга (m, n) .

В следующих работах мы покажем, что функция $A: (i, \alpha) \rightarrow a_{i\alpha}$ и функция $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_{mn})$, являющиеся решением бесконечной системы функциональных уравнений (3) при заданных m и n , с точностью до некоторого преобразования, зависящего от выбора конкретной измерительной операции и несущественного для построения общей теории, определяются однозначно. Другими словами, требование одного только факта существования первичного физического закона ранга (m, n) , характеризующего равенством (3), позволяет определить как допустимый набор опытных данных $a_{i\alpha}$, так и конкретное выражение для самого физического закона.

В этой статье мы ограничимся рассмотрением физических структур наименьшего возможного ранга (2,2). На этом простейшем примере мы увидим, какие методы могут быть применены при решении поставленной задачи. Кроме того, полученный здесь результат дает нам возможность проанализировать логический смысл, скрытый за традиционной формулировкой второго закона Ньютона, что и будет сделано в следующей статье.

Итак, пусть множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и функция Φ удовлетворяют условиям А, В, С и D при $m = n = 2$. Вместо $i_1, i_2; \alpha_1, \alpha_2$ далее будем писать, соответственно $i, k; \alpha, \beta$. Прежде всего найдем множества $\mathfrak{M}_2 = \{0, 1\}$ и $\mathfrak{N}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ такие, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_{i\alpha}}(a_{i\bar{1}}, a_{i\bar{0}}, a_{0\bar{1}}, a_{0\bar{0}}) \neq 0. \quad (4)$$

Такую точку $A_0 = (a_{i\bar{1}}, a_{i\bar{0}}, a_{0\bar{1}}, a_{0\bar{0}})$ можно найти, например, так. Выбираем сначала произвольную точку $A_1 = (a_{i_1 \alpha_1}, a_{i_1 \beta_1}, a_{k_1 \alpha_1}, a_{k_1 \beta_1})$, в которой градиент Φ отличен от нуля. Положим $v_{i\alpha} = \partial \Phi / \partial a_{i\alpha}$. Тогда при канонических перестановках в R^4 вектор $v = (v_{i\alpha}, v_{i\beta}, v_{k\alpha}, v_{k\beta})$, как очевидно, также подвергается каноническим перестановкам. Если $v \neq 0$, то среди его канонических перестановок есть хотя бы одна, у которой первая

координата отлична от нуля. Отсюда ясно, что среди точек, получаемых из $(a_{i_1\alpha_1}, a_{i_1\beta_1}, a_{k_1\alpha_1}, a_{k_1\beta_1})$ каноническими перестановками, есть хотя бы одна, для которой частная производная $\partial\Phi / \partial a_{i\alpha}$ отлична от нуля. Эту точку и примем за A_0 . В силу (4) найдутся $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что уравнение $\Phi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ однозначно разрешимо относительно u_1 в области

$$|u_1 - a_{11}| < \varepsilon, \quad |u_2 - a_{10}| < \delta, \quad |u_3 - a_{01}| < \delta, \quad |u_4 - a_{00}| < \delta, \\ u_1 = f(u_2, u_3, u_4).$$

В силу В для любых таких u_1, u_2, u_3, u_4 найдутся $i, k \in \mathfrak{M}$ и $\alpha, \beta \in \mathfrak{N}$, для которых $u_1 = a_{i\alpha}, u_2 = a_{i\beta}, u_3 = a_{k\alpha}, u_4 = a_{k\beta}$. Пусть x и ξ таковы, что

$$|x - a_{10}| < \delta, \quad |\xi - a_{01}| < \delta, \quad (5)$$

и положим

$$u = f(x, \xi, a_{00}) = \varphi(x, \xi).$$

Применяя условие D, можно показать, что найдутся i и α такие, что $u = a_{i\alpha}, x = a_{i0}, \xi = a_{0\alpha}$. Зададим произвольно x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 , для которых выполняются неравенства (5).

Условие D позволяет заключить, что найдутся i, k, α, β такие, что

$$\varphi(x_1, \xi_1) = a_{i\alpha}, \quad \varphi(x_1, \xi_2) = a_{i\beta}, \quad \varphi(x_2, \xi_1) = a_{k\alpha}, \quad \varphi(x_2, \xi_2) = a_{k\beta},$$

Отсюда получаем основное функциональное уравнение

$$\Phi[\varphi(x, \xi), \varphi(x, \eta), \varphi(y, \xi), \varphi(y, \eta)] = 0, \quad (6)$$

где $x = x_1, y = x_2, \xi = \xi_1, \eta = \xi_2$.

Дифференцируя (6) по x, y, ξ, η , получим систему из 4 однородных линейных уравнений относительно неизвестных $\partial\Phi / \partial u_1, \partial\Phi / \partial u_2, \partial\Phi / \partial u_3, \partial\Phi / \partial u_4$. В силу условия (4) хотя бы одна из величин $\partial\Phi / \partial u_i$ отлична от нуля, и, значит, определитель системы равен нулю:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, \eta) \frac{\partial\Phi}{\partial x}(y, \xi) \frac{\partial\Phi}{\partial \xi}(x, \xi) \frac{\partial\Phi}{\partial \xi}(y, \eta) - \\ - \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, \xi) \frac{\partial\Phi}{\partial x}(y, \eta) \frac{\partial\Phi}{\partial \xi}(y, \xi) \frac{\partial\Phi}{\partial \xi}(x, \eta) = 0.$$

Фиксировав y и η , данное уравнение можно переписать в виде

$$A(x)B(\xi) \frac{\partial\Phi}{\partial \xi}(x, \xi) - C(x)D(\xi) \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, \xi) = 0. \quad (7)$$

Из постулированных выше условий вытекает, что найдется точка (x_0, ξ_0) такая, что

$$A(x_0)C(x_0) \neq 0, \quad B(\xi_0)D(\xi_0) \neq 0.$$

В окрестности такой точки (x_0, ξ_0) уравнение (7) может быть записано в виде

$$P(x) \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, \xi) - Q(\xi) \frac{\partial\Phi}{\partial \xi}(x, \xi) = 0.$$

Отсюда нетрудно заключить, что Φ представимо в виде

$$\varphi(x, \xi) = \chi[R(x)S(\xi)],$$

где $\chi(x)$, $R(x)$ и $S(x)$ — произвольные монотонные функции одной переменной.

Имеем

$$a_{i\alpha} = \varphi(x_i, \xi_\alpha) = \chi[R(x_i)S(\xi_\alpha)],$$

откуда

$$\chi^{-1}(a_{i\alpha}) = R(x_i)S(\xi_\alpha).$$

Выписывая аналогичные соотношения для $a_{i\beta}$, $a_{h\alpha}$, $a_{h\beta}$, получим, что эти величины связаны соотношением

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{h\alpha}, a_{h\beta}) = \chi^{-1}(a_{i\alpha})\chi^{-1}(a_{h\beta}) - \chi^{-1}(a_{i\beta})\chi^{-1}(a_{h\alpha}) = 0. \quad (8)$$

Мы видим, что в окрестности некоторой точки многообразия M выполнено соотношение (8). Отсюда, ввиду аналитичности M , следует, что (8) выполняется всюду на M .

Итак, множество M в данном случае ($m = n = 2$) определено с точностью до произвольной функции $\chi(x)$ и заменой переменных $b_{i\alpha} = \chi^{-1}(a_{i\alpha})$ сводится к многообразию

$$\Phi(b_{i\alpha}, b_{i\beta}, b_{h\alpha}, b_{h\beta}) = b_{i\alpha}b_{h\beta} - b_{i\beta}b_{h\alpha} = 0.$$

В заключение благодарю Б. Я. Штивельмана за полезные дискуссии и А. И. Фета за постоянный интерес к работе. Особенно многим я обязан Ю. Г. Решетняку, живое участие которого помогло устранить многие неясности и шероховатости.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
9 II 1968