

Ю. И. КУЛАКОВ

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

(Представлено академиком А. Д. Александровым 9 VII 1969)

Как известно, существует несколько вариантов аксиоматического построения евклидовой геометрии. В настоящей статье предлагается некоторый новый способ аксиоматического построения локально евклидовой, локально симплектической и локально неевклидовой геометрии постоянной кривизны. Этот способ может рассматриваться как частный случай общего принципа феноменологической симметрии, предложенного в работе ⁽¹⁾ для единообразного описания различных физических теорий феноменологического типа, таких как, например, механика, термодинамика, специальная теория относительности и т. п.

В данном частном случае принцип феноменологической симметрии формулируется следующим образом.

Пусть $\mathcal{M} = \{i, k, \dots, l, \dots\}$ — множество объектов произвольной природы, называемых точками, и пусть каждой упорядоченной паре (i, k) , $i \neq k$, сопоставлено вещественное число a_{ik} . При этом предполагается * выполнимым одно из следующих двух условий:

I_s. Для всех пар (i, k) , $i \neq k$, $a_{ik} = a_{ki}$.

I_a. Для всех пар (i, k) , $i \neq k$, $a_{ik} = -a_{ki}$.

Пусть $\mathcal{M}_n = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ — произвольное n -элементное подмножество множества $\mathcal{M}$. Ему отвечает система $\mathcal{A}_n$ из $1/2n(n-1)$ чисел:

$$\mathcal{A}_n = \{a_{i_r i_s}\},$$

где r и s пробегает всевозможные значения такие, что $1 \leq r < s \leq n$.

Систему $\mathcal{A}_n$ будем рассматривать как точку в $1/2n(n-1)$ -мерном арифметическом пространстве $R^{n(n-1)/2}$. Множество всех точек пространства $R^{n(n-1)/2}$, сопоставляемых указанным образом всевозможным n -элементным подмножествам $\mathcal{M}_n$, обозначим через $\mathcal{S}_n$.

Введем следующее основное условие:

II. Множество $\mathcal{S}_n$ представляет собой $1/2n(n-1) - 1$ -мерное дифференцируемое многообразие класса C_∞ .

Условие II и составляет основное содержание принципа феноменологической симметрии применительно к рассматриваемому случаю. Если для множества $\mathcal{M}$ задана функция пар a_{ik} ($i \neq k$), так что выполнены условия I и II, то мы будем говорить, что на множестве $\mathcal{M}$ задана физическая структура ранга n .

Введем понятие эквивалентности физических структур. Две физические структуры одинакового ранга n , заданные функциями a_{ik} и b_{ik} , мы будем называть эквивалентными, если существует строго монотонная функция одной переменной $\chi(x)$ такая, что для любых i и k $b_{ik} = \chi(a_{ik})$. (Заметим, что при описании экспериментальной действительности произвол выбора функции $\chi(x)$ может быть интерпретирован как произвол выбора шкалы измерительного прибора.)

* Можно показать, что условие «либо $a_{ik} = a_{ki}$, либо $a_{ik} = -a_{ki}$ » является слишком жестким; достаточно потребовать, чтобы $a_{ik} = f(a_{ki})$, где $f(x)$ — априори неизвестная функция.

Задача состоит в том, чтобы для каждого $n \geq 2$ найти функцию a_{ik} , удовлетворяющую сформулированным выше требованиям.

Как показывает предварительный анализ ⁽²⁾, требование феноменологической симметрии является чрезвычайно жестким в том смысле, что число возможных физических структур определенного ранга n весьма невелико.

Можно показать ⁽³⁾, что для известных локально эвклидовой геометрии, локально неэвклидовой геометрии постоянной кривизны и локально симплектической геометрии принцип феноменологической симметрии имеет место (n -мерные геометрии реализуют соответствующие физические структуры ранга $n + 2$, если под a_{ik} понимать соответствующие функции расстояния между элементами i и k), а само многообразие $\mathbb{E}_n$ задается с точностью до эквивалентности следующими уравнениями:

$$1) \quad I_s. \quad a_{ik} = a_{ki}$$

$$\begin{vmatrix} a & a_{ik} & a_{il} & \dots & a_{im} \\ a_{ik} & a & a_{kl} & \dots & a_{km} \\ a_{il} & a_{kl} & a & \dots & a_{lm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{lm} & a_{km} & a_{lm} & \dots & a \end{vmatrix} = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$

или в параметрическом виде

$$a_{ik} = g_{\sigma\rho}^0 x^\sigma(i) x^\rho(k), \quad \sigma, \rho = 1, 2, \dots, n-1,$$

где $x^\sigma(i)$ ($\sigma = 1, 2, \dots, n-1$) — $(n-1)$ вещественных параметров, относящихся к точке i и связанных между собой одним соотношением

$$g_{\rho\sigma}^0 x^\rho(i) x^\sigma(i) = a,$$

a — произвольная постоянная;

2)

$$g_{\rho\sigma}^0 = \begin{cases} 0, & \rho \neq \sigma, \\ \pm 1, & \rho = \sigma. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_{ik} & a_{il} & \dots & a_{im} \\ 1 & a_{ik} & 0 & a_{kl} & \dots & a_{km} \\ 1 & a_{il} & a_{kl} & 0 & \dots & a_{lm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{im} & a_{km} & a_{lm} & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$

или в параметрическом виде

$$a_{ik} = g_{\mu\nu}^0 (x^\mu(i) - x^\mu(k))(x^\nu(i) - x^\nu(k)), \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, n-2,$$

где $x^\mu(i)$ ($\mu = 1, 2, \dots, n-2$) — $(n-2)$ произвольных вещественных параметров, относящихся к точке i .

$$1a. \quad a_{ik} = -a_{ki}.$$

$$1) \quad n = 2p - 1,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & a_{ik} & & a_{il} & \dots & a_{im} \\ -1 & -a_{ik} & 0 & & a_{kl} & \dots & a_{km} \\ -1 & -a_{il} & -a_{kl} & & 0 & \dots & a_{lm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -a_{im} & -a_{km} & -a_{lm} & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$

или в параметрическом виде:

$$a_{ik} = x^0(i) - x^0(k) + x^v(i)y_v(k) + x^v(k)y_v(i) \quad v = 1, 2, \dots, p-2,$$

где $x^0(i)$, $x^v(i)$, $y_v(i)$ ($v = 1, 2, \dots, p-2$) — $(n-2)$ произвольных вещественных параметров, относящихся к точке i .

2) $n = 2p$

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{ik} & a_{il} & \dots & a_{im} \\ -a_{ik} & 0 & a_{kl} & \dots & a_{km} \\ -a_{il} & -a_{kl} & 0 & \dots & a_{lm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{im} & -a_{km} & -a_{lm} & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n$

или в параметрическом виде:

$$a_{ik} = x^\lambda(i)y_\lambda(k) - x^\lambda(k)y_\lambda(i), \quad \lambda = 1, 2, \dots, p-1,$$

где $x^\lambda(i)$, $y_\lambda(i)$ ($\lambda = 1, 2, \dots, p-1$) — $(n-2)$ произвольных вещественных параметров, относящихся к точке i .

Легко видеть, что многообразие $\mathbb{S}_n$ в виде $I_s(1)$ соответствует $(n-2)$ -мерному пространству постоянной (положительной или отрицательной) кривизны (кривизна $1/a$), многообразие $\mathbb{S}_n$ в виде $I_s(2)$ — $(n-2)$ -мерному эвклидову (или псевдоэвклидову) пространству, а $\mathbb{S}_n$ в виде $I_a(1)$ и $I_a(2)$ — $(n-2)$ -мерному симплектическому пространству.

Итак, все перечисленные выше многообразия $\mathbb{S}_n$ являются частными случаями многообразий, реализующих физическую структуру ранга n . (Эти многообразия мы будем называть феноменологическими пространствами размерности $n-2$.)

Возникает вопрос: являются ли симплектические пространства и пространства положительной, нулевой и отрицательной кривизны единственными типами феноменологических пространств.

Для случая $n=3$ исчерпывающее решение вопроса получено Г. Г. Михайличенко, показавшим, что все феноменологические пространства размерности 1 эквивалентны эвклидовой прямой.

Что же касается случаев $n \geq 4$, то вопрос о существовании каких-либо новых типов феноменологических пространств, отличных от эвклидова, симплектического и пространств постоянной кривизны остается открытым.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. Г. Решетняку за внимание и постоянный интерес к работе.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
3 VII 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. И. Кулаков, К теории физических структур, Новосибирск. унив., 1968.
² Г. Г. Михайличенко, Дополнение к лекциям Ю. И. Кулакова Элементы теории физических структур, Новосибирск. унив., 1969 (Рогопринт). ³ Ю. И. Кулаков, Элементы теории физических структур, Новосибирск. унив., 1969.