

УДК 517.948 : 519.55

Ю. И. КУЛАКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Характерная черта для всех физических законов состоит в том, что различные физические объекты, принадлежащие к определенным классам, равноправны по отношению к рассматриваемому закону. Факт существования особого вида отношений — «отношений равноправия» — кажется нам имеющим существенное значение в качестве исходной физической идеи.

Прежде всего, придадим интуитивной идее «равноправия» строгую математическую формулировку. В этой статье мы дадим лишь частную формулировку принципа феноменологической симметрии, не претендуя на слишком большую общность (это будет сделано в следующих работах).

Рассмотрим два произвольных множества: множество $\mathfrak{M}$, элементы которого будем обозначать через $i_1, i_2, \dots$, и множество $\mathfrak{N}$ с элементами, обозначаемыми через $\alpha_1, \alpha_2, \dots$.

Допустим, что каждой паре $(i, \alpha) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется вещественное число $u_{i\alpha}$, т. е. на множестве $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ определена некоторая функция $u: (i, \alpha) \rightarrow u_{i\alpha}$. Пусть m и n — натуральные числа и $\mathfrak{M}_m = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$, $\mathfrak{N}_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Подмножества $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$ определяют некоторую матрицу из m строк и n столбцов:

$$u(i_1, i_2, \dots, i_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \|u_{i_k \alpha_l}\|_{\substack{k=1, 2, \dots, m \\ l=1, 2, \dots, n}} \quad (1)$$

Каждую такую матрицу будем рассматривать как точку mn -мерного арифметического пространства R^{mn} .

Изменение нумерации точек множеств $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$ ведет к преобразованию матрицы (1), сводящимся к перестановкам ее строк и столбцов. $m!n!$ преобразований пространства R^{mn} , соответствующих перестановкам строк и столбцов матрицы (1), будем называть каноническими перестановками R^{mn} .

Будем говорить, что на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задана *физическая структура ранга (m, n)* , если выполнены следующие условия.

А) Существует аналитическая функция mn переменных $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{mn})$, инвариантная относительно канонических перестановок пространства R^{mn} и такая, что множество $M \subset R^{mn}$, определяемое уравнением $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_{mn}) = 0$, есть непустое связанное множество, и градиент Φ отличен от нуля в каждой точке M .

Б) Совокупность всех точек $u(i_1, i_2, \dots, i_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ пространства R^{mn} , где $\{i_1, i_2, \dots, i_m\} = \mathfrak{M}_m \subset \mathfrak{M}$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = \mathfrak{N}_n \subset \mathfrak{N}$ образует открытое относительно M подмножество M . В частности,

$$\Phi(u_{i_1\alpha_1}, u_{i_1\alpha_2}, \dots, u_{i_m\alpha_n}) = 0 \quad (2)$$

при любых $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$.

В) Если уравнение (2) может быть однозначно разрешено относительно $u_{i_k\alpha_\lambda}$, то $u_{i_k\alpha_\nu}$, где $\nu \neq \lambda$ и $u_{i_s\alpha_\lambda}$, где $s \neq k$ как две группы параметров входят в Φ существенным образом (¹).

Г) Для всякой системы из n чисел u_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющей уравнению

$$\Phi(u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}, \dots, u_{m-1,1}, u_{m-1,2}, \dots, u_{m-1,n}, u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,$$

где

$$u_{p\lambda} = u_{i_p\alpha_\lambda} \quad (p = 1, 2, \dots, m-1; \lambda = 1, 2, \dots, n), \quad i_p \in \mathfrak{M}_{m-1}, \quad \alpha_\lambda \in \mathfrak{N}_n$$

найдется такой элемент i , что $u_1 = u_{i,\alpha_1}$, $u_2 = u_{i,\alpha_2}$, ..., $u_n = u_{i,\alpha_n}$. Аналогично для всякой системы из m чисел v_μ ($\mu = 1, 2, \dots, m$), удовлетворяющей уравнению

$$\Phi(u_{11}, \dots, u_{1,n-1}, v_1, u_{21}, \dots, u_{2,n-1}, v_2, \dots, u_{m1}, \dots, u_{m,n-1}, v_m) = 0,$$

найдется такое $\alpha \in \mathfrak{N}$, что $v_p = u_{i_p,\alpha}$.

Обсуждение физического и геометрического содержания введенного здесь понятия дается в (^{2,3}).

Рассмотрим случай физической структуры наименьшего возможного ранга (2, 2).

Теорема. Пусть тройка $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, u: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \rightarrow R)$ образует физическую структуру ранга (2, 2). Тогда многообразие M может быть представлено уравнением

$$\theta[\chi(u_{i\alpha})\chi(u_{k\beta}) - \chi(u_{i\beta})\chi(u_{k\alpha})] = 0,$$

где χ и θ — строго монотонные функции.

Доказательство. Положим $v_{i\alpha} = \partial\Phi / \partial u_{i\alpha}$. При канонических перестановках в R^4 вектор $v = (v_{i\alpha}, v_{i\beta}, v_{k\alpha}, v_{k\beta})$, очевидно, также подвергается каноническим перестановкам. Если $v \neq 0$, то среди канонических перестановок v есть хоть одна, для которой отлична от нуля первая координата. Это означает, что для любых двух подмножеств $\{i, k\} = \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}$ и $\{\alpha, \beta\} = \mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}$ обозначения для элементов и $\mathfrak{N}_2$ можно брать таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, u_{k\alpha}, u_{k\beta}) \neq 0.$$

Фиксируем произвольно подмножества $\{i_0, k_0\} = \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}$ и $\{\alpha_0, \beta_0\} = \mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{N}$ так, чтобы в точке

$$u_0 = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (u_{i_0\alpha_0}, u_{i_0\beta_0}, u_{k_0\alpha_0}, u_{k_0\beta_0})$$

была отлична от нуля частная производная $(\partial\Phi / \partial u_1)(u_0)$. В силу сказанного это возможно. Ввиду того, что $(\partial\Phi / \partial u_1)(u_0) \neq 0$, найдутся

числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что уравнение $\Phi(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$ однозначно разрешимо в области

$$|u_1 - u_1^0| < \varepsilon, |u_i - u_i^0| < \delta \quad (i = 2, 3, 4). \quad (3)$$

Решая (1) относительно u_1 , получим $u_1 = f(u_2, u_3, u_4)$.

Рассмотрим частные производные $(\partial f / \partial u_2)(u_2, u_3, u_4)$, $(\partial f / \partial u_3)(u_2, u_3, u_4)$. Если $(\partial f / \partial u_2)(u_2, u_3, u_4)$ обращается в нуль на множестве положительной меры в области $|u_i - u_i^0| < \delta$ ($i = 2, 3, 4$), то ввиду аналитичности $(\partial f / \partial u_2)(u_2, u_3, u_4) = 0$ для всех (u_2, u_3, u_4) , откуда следует, что $u_1 = F(u_3, u_4)$. Это, однако, противоречит условию существенности параметров u_2 и u_3 . Аналогично получаем, что частная производная $(\partial f / \partial u_3)(u_2, u_3, u_4)$ не может обращаться в нуль на множестве положительной меры.

В силу сказанного можно выбрать точки $i_0, k_0, \alpha_0, \beta_0$ таким образом, чтобы производные $\partial f / \partial u_2, \partial f / \partial u_3$ были отличны от нуля для всех u_2, u_3, u_4 , удовлетворяющих неравенствам (3). Для упрощения записи вместо k_0 и β_0 будем писать просто 0 и $\bar{0}$ соответственно.

Пусть x и ξ таковы, что

$$|x - u_2^0| < \delta, |\xi - u_3^0| < \delta. \quad (4)$$

Положим $u = f(x, \xi, u_{00}) = \varphi(x, \xi)$.

Применяя условие Г), можно показать, что найдутся i и α такие, что $u = u_{i\alpha}$, $x = u_{i0}$, $\xi = u_{0\alpha}$. Зададим произвольно x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 с выполнением (4). Условие Г) позволяет заключить, что найдутся i, k, α, β такие, что

$$\varphi(x_1, \xi_1) = u_{i\alpha}, \varphi(x_1, \xi_2) = u_{i\beta}, \varphi(x_2, \xi_1) = u_{k\alpha}, \varphi(x_2, \xi_2) = u_{k\beta}.$$

Отсюда получаем функциональное уравнение

$$\Phi[\varphi(x, \xi), \varphi(x, \eta), \varphi(y, \xi), \varphi(y, \eta)] = 0,$$

где $x = x_1, y = x_2, \xi = \xi_1, \eta = \xi_2$.

Дифференцируя уравнение по x, y, ξ, η , получим систему из четырех однородных линейных уравнений относительно неизвестных $\partial\Phi / \partial u_1, \partial\Phi / \partial u_2, \partial\Phi / \partial u_3, \partial\Phi / \partial u_4$. В силу условия А) хотя бы одна из величин $\partial\Phi / \partial u_i$ отлична от нуля и, значит, определитель системы равен нулю. Матрица коэффициентов рассматриваемой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} (\partial\Phi / \partial x)(x, \xi), & (\partial\Phi / \partial x)(x, \eta), & 0, & 0 \\ (\partial\Phi / \partial \xi)(x, \xi), & 0, & (\partial\Phi / \partial \xi)(y, \xi), & 0 \\ 0, & 0, & (\partial\Phi / \partial x)(y, \xi), & (\partial\Phi / \partial x)(y, \eta) \\ 0, & (\partial\Phi / \partial \xi)(x, \eta), & 0, & (\partial\Phi / \partial \xi)(y, \eta) \end{pmatrix}.$$

Приравняв нулю определитель этой матрицы, получим

$$\begin{aligned} & (\partial\Phi / \partial x)(x, \eta) (\partial\Phi / \partial x)(y, \xi) (\partial\Phi / \partial \xi)(x, \xi) (\partial\Phi / \partial \xi)(y, \eta) - \\ & - (\partial\Phi / \partial x)(x, \xi) (\partial\Phi / \partial x)(y, \eta) (\partial\Phi / \partial \xi)(y, \xi) (\partial\Phi / \partial \xi)(x, \eta) = 0. \end{aligned}$$

Фиксируя y и η , данное равенство можно переписать в виде

$$A(x)B(\xi)(\partial\varphi/\partial\xi)(x, \xi) - C(x)D(\xi)(\partial\varphi/\partial x)(x, \xi) = 0. \quad (5)$$

Если x, y, ξ, η таковы, что

$$|x - u_1^0| < \delta, |y - u_2^0| < \delta, |\xi - u_3^0| < \delta, |\eta - u_4^0| < \delta,$$

то ни один из коэффициентов в (5) не обращается в нуль, оно может быть переписано в виде

$$P(\xi) \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}(x, \xi) - Q(x) \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, \xi) = 0. \quad (6)$$

Отсюда нетрудно заключить, что φ представимо в виде $\varphi(x, \xi) = \chi[R(x)S(\xi)]$, где χ, R и S — произвольные монотонные функции данной переменной.

Имеем $u_{i\alpha} = \varphi(x_i, \xi_\alpha) = \chi(R(x_i)S(\xi_\alpha))$, откуда $R(x_i)S(\xi_\alpha) = \chi^{-1}(u_{i\alpha})$. Выписывая аналогичные соотношения для $u_{i\beta}, u_{k\alpha}, u_{k\beta}$, получим, что эти величины связаны соотношением

$$\Psi(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, u_{k\alpha}, u_{k\beta}) = \chi^{-1}(u_{i\alpha})\chi^{-1}(u_{k\beta}) - \chi^{-1}(u_{i\beta})\chi^{-1}(u_{k\alpha}) = 0.$$

В силу аналитичности и связности M равенство (6) выполняется всюду на M . Теорема доказана.

Поступила в редакцию

7 декабря 1968 г.

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Эйзенхарт Л. П., Непрерывные группы преобразований, Изд. иностр. лит., М., (1947), 16—19.
- ² Кулаков Ю. И., Об одном принципе, лежащем в основании классической физики, Докл. АН СССР, 193, № 1 (1970), 72—75.
- ³ Кулаков Ю. И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур, Докл. АН СССР, 193, № 5 (1970), 985—987.