530
К900

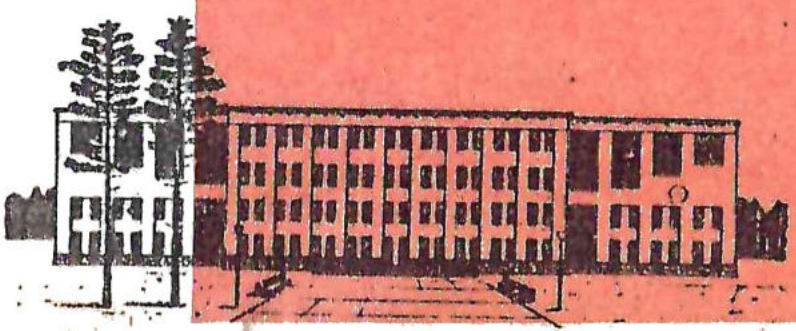
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю. И. КУЛАКОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

дополнение
Г. Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

Новосибирск



НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ.

Ю. И. КУЛАКОВ.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

(Лекции для студентов НГУ)

Дополнение
Г.Г.МИХАЙЛИЧЕНКО

Новосибирск
1968 г.

С самого начала проявлялось стремление найти для унификации всех отраслей науки теоретическую основу, образованную минимальным числом понятий и фундаментальных соотношений, из которых логическим путём можно было бы вывести все понятия и соотношения отдельных дисциплин. Вот что мы понимаем под поиском фундамента для физики в целом. Глубокое убеждение в достижимости этой цели является главным источником страстной преданности, которая всегда воодушевляет исследователя.

Альберт Эйнштейн.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие 7

I. Основные положения теории физических структур 10

2. Примеры, иллюстрирующие концепцию физических структур 16

§ I. Динамика точки 18

А. Нерелятивистский случай 18

Б. Релятивистский случай 21

§ 2. Закон преломления 22

§ 3. Движение в электромагнитном поле 25

§ 4. Время 31

§ 5. Расстояние 36

§ 6. Теория относительности 46

§ 7. Равномерное движение 48

§ 8. Термодинамика 49

§ 9. Закон сохранения импульса 54

§IO. Закон Ома. 56

3. Математическая формулировка теории физических структур 60

4. О наиболее общей формулировке принципа обобщенной инвариантности 71

5. О физических законах, лежащих в основании механики 77

6. Релятивистское уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета IO2

7. Инвариантная формулировка классической теории измерений I24

8. О новом виде симметрии, лежащей в основании физических теорий феноменологического типа I36

9. Методологические вопросы теории физических структур I39

§ I. Отношения как исходное понятие научной картины мира I39

§ 2. Возможно ли строгое определение исходных понятий? I42

§ 3. Особая роль математики в построении научной картины мира I45
§ 4. Что такое математика? I47
§5. Исчерпали ли себя классические разделы теоретической физики? I58
§ 6. Золотой век физики и "архитектурные излишества". I60
§ 7. Необходимость новых физических идей и унификации физических теорий I63
§ 8. Три типа отношений между физическими объектами I66
§ 9. Физический эксперимент как источник информации об отношениях между физическими объектами I7I
§IO. Краткое резюме I72

Дополнение (Г.Г. Михайличенко)

Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур

§ I. Структура ранга (2,2) I75
§ 2. Структура ранга (3,2) I82
§ 3. Структура ранга (4,2) I9I
§ 4. Структура ранга (3,3) I96
§ 5. Бинарная структура ранга <3> 200
§ 6.Тернарная структура ранга <4> 205
§ 7. Тернарная структура ранга (3,2) 2I0
§ 8. Десять задач по теории физических структур 2I8

П Р Е Д И С Л О В И Е

Лекции по теории физических структур, приведенные в настоящем сборнике и оформленные в виде отдельных статей, объединенных общим содержанием , представляют собой небольшую часть годового спецкурса, читаемого мной в течение нескольких лет на физическом факультете Новосибирского государственного университета. В приведенных здесь лекциях главное внимание обращается на , по возможности, строгую математическую формулировку принципа феноменологической симметрии, лежащего в основе общей теории физических структур. В связи с этим я хотел бы обратить внимание читателя на дополнение, написанное Г.Г.Михайличенко и помещенное в конце сборника. В этом дополнении приводится доказательство единственности физической структуры ранга (3,2) и обсуждается аналогичная проблема для физических структур более высокого ранга. Приведенные там доказательства весьма полезны, так как дают представление о конкретных методах, применяемых в излагаемой теории, и могут служить основой для изучения физических структур различного типа.

Что же касается физических приложений этой теории, составляющих бо́льшую часть спецкурса, то я ограничился здесь лишь кратким изложением механики (получение второго закона Ньютона, введение понятий массы и силы, вывод релятивистского уравнения движения в неинерциальной системе отчета).
Из приведенных в настоящем сборнике физических примеров в прин-

ципе видно , как могут быть сформулированы на языке физических структур исходные аксиомы физической теории пространства и времени, теории относительности, термодинамики , электростатики и электродинамики. Однако, последовательная и единая формулировка упомянутых исходных принципов , существенным образом основанная на применении идеи феноменологической симметрии, составляет вторую часть спецкурса и будет изложена отдельно.

Я отдаю себе отчет в том, что некоторые утверждения,касающиеся значения , рассматриваемой в этих лекциях, феноменологической симметрии, могут показаться излишне декларативными. В свое оправдание я могу лишь сказать, что сделал все возможное, чтобы скрыть за предельным педантизмом свое восторженное изумление, охватившее меня при виде мудрого порядка, красоты и совершенства, открывшихся в традиционной физике после переформулировки ее принципов в терминах теории физических структур.

С сожалением я должен признать, что эти лекции предназначены ,главным образом, для тех, что сохранил в себе способность удивляться простым вещам, - вещам , которые только кажутся такими простыми и знакомыми. От читателя ожидаются готовность переключиться на новую точку зрения, отличную от традиционной, и добрая воля к сотрудничеству.

Я отдаю себе также отчет в том, что приводимое здесь изложение основ теории физических структур носит фрагментарный и, возможно, недостаточно ясный характер. В связи с этим я хочу уверить читателя, что всякие критические (и даже иронические) за-

мечания будут приняты мной с благодарностью.

В заключение мне хочется поблагодарить акад. М.А. Леонтовича за постоянный интерес к этой работе, за его готовность и умение переключиться на необычную точку зрения и неоднократные полезные дискуссии. Я многим обязан чл. - корр. АН СССР А.А. Ляпунову, обсуждение с которым основ этой теории всегда доставляло мне большое удовольствие и являлось могучим стимулом.

В особенности, многим я обязан профессору Ю.Г.Решетняку, приложившему немало труда, чтобы устранить многие неясности и шероховатости из многих моих статей.

г. Новосибирск, 1968 г.



Ю.И. Кулаков.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР.

В настоящее время понятие симметрии прочно вошло в современные физические теории, без него теперь , по существу, не мыслим ни один крупный шаг в теоретической физике. Так, например, аспект теории представленный групп состоит в учете и использовании физический соображений симметрии, связанных с различными физическими процессами. Однако, все известные виды симметрии не исчерпывают всего богатства форм и содержания, которое заложено в понятии однород - ности-равноправия-симметрии.

Излагаемая в настоящем сборнике теория физических структур представляет собой особый раздел математической физики, в котором изучается специальный вид симметрии, имеющий самое непосредственное отношение к наиболее фундаментальным физическим законам и понятиям. Желая подчеркнуть связь этого вида симметрии с различными физическими явлениями, мы будем называть его феноменологической симметрией (от гр. φαινομενον - являющееся).

Основным объектом изучения теории физических структур являются отношения феноменологической симметрии или, другими словами, отношения однородности или равноправия , сформулированные в наиболее общем и абстрактном виде . Благодаря этому данная теория позволяет, при соответствующей интерпретации, рассматривать с единой точки зрения самые разнообразные физические теории феноменологического типа (к ним относятся геометрия, рассматриваемая как физическая теория протяженности реальных объектов, хроно-

метрия, изучающая наиболее общие свойства времени, специальная теория относительности, теория тяготения, релятивистская и нерелятивистская механика , электродинамика). С другой стороны факт существования феноменологической симметрии является настолько сильным требованием, что позволяет получать явные выражения для всех известных первичных физических законов независимо от их конкретной интерпретации.

Исходные физические предположения, лежащие в основе теории физических структур, сводятся к следующему:

I. Физический закон, лежащий в основании того или иного раздела физики, справедлив для всех физических объектов , принадлежащих к достаточно широкому классу (идея однородности или равноправия);

2. Физический закон в его наиболее первичном виде есть связь между экспериментально измеряемыми величинами (только опытный факт может претендовать на звание физического закона; *Hypotheses non fingo*);

3. Экспериментально измеряемые величины, входящие в выражение физического закона, зависят, по крайней мере, от двух, а вообще говоря, и от большего числа физических объектов (идея бинарных, тернарных и т.д. отношений);

4. На множестве физических объектов можно ввести понятие близости (непрерывности, окрестности) (идея аналитичности физических законов).

Чтобы понять, как эти идеи формулируются математически, рассмотрим частный случай феноменологической симметрии ранга (m, n) и порядка I.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ – два множества физических объектов различной природы. Мы будем говорить, что элементы этих двух множеств находятся в отношении феноменологической симметрии ранга (m, n) и порядка I, если имеет место следующая ситуация:

I. Каждой паре объектов ($i \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{N}$) с помощью некоторой экспериментальной процедуры сопоставляется одно число $u_{i\alpha}$;

2. Если из множества $\mathfrak{M}$ выбрать произвольным образом подмножество $\mathfrak{M}_m$, состоящее из m элементов, а из множества $\mathfrak{N}$ – подмножество $\mathfrak{N}_n$, состоящее из n элементов, то между $m \cdot n$ экспериментальными значениями $u_{i\alpha}$, относящимися к любой паре (i, α) имеет место зависимость[I]:

$$\forall i, \kappa, \ldots, l \in \mathfrak{M} \quad \forall \alpha, \beta, \ldots, \gamma \in \mathfrak{N} \quad \Phi(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, \ldots, u_{e\gamma}) = 0. \qquad (I)$$

При этом предполагается, что вещественная функция Φ достаточное число раз дифференцируема и разрешима относительно любого своего аргумента. уравнение (I)

Наличие в (I) кванторов общности $\forall$ носит принципиальный характер, так как с точки зрения физики превращает равенство $\Phi(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, \ldots, u_{e\gamma}) = 0$ в физический закон, справедливый для всех $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$; с математической же точки зрения это равенство превращается в бесконечную систему функциональных уравнений относительно двух неизвестных функций: вещественной функции от $m \cdot n$ переменных $\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_{mn})$ и вещественной функции от двух нечисловых переменных $u_{i\alpha}$, где $i \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{N}$.

Мы будем говорить, что зависимость (I) с навешенными кванторами общности представляет собой феноменологически инвариант –

I) $\forall$ – квантор общности; выражение $\forall i \in \mathfrak{M}\ \mathcal{U}(i)$ означает: "для любого i, взятого из множества $\mathfrak{M}$ высказывание $\mathcal{U}(i)$ истинно"

т.е. соотношение
ное соотношение, инвариантное относительно выбора конечных подмножеств $\mathfrak{M}_m \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_n \subset \mathfrak{N}$.

Итак, встает чисто математическая задача: при фиксированных числах m и n найти такую функцию от $m \cdot n$ переменных $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_{mn})$ $(grad\,\varphi \neq 0)$ и такую матрицу $U = \|u_{i\alpha}\|$ $\neq const$, чтобы имело место феноменологически инвариантное соотношение (I).

соотношения (I)
Можно показать, что требование существования , инвариантного относительно выбора соответствующих подмножеств, является достаточным не только для нахождения функции φ, представляющей собой первичный физический закон в его наиболее естественном виде, но и для получения допустимого набора U.

Так в случае феноменологической симметрии ранга (n, n) допустимый набор $u_{i\alpha}$ определен с точностью до одной произвольной функции одной переменной $\chi(x)$ и имеет вид:

$$u_{i\alpha} = \chi(x_i^1 \xi_{1\alpha} + x_i^2 \xi_{2\alpha} + \ldots + x_i^{n-1} \xi_{n-1\alpha}) \quad , \qquad (2)$$

где $x_i^\sigma, \xi_{\sigma\alpha}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, n-1)$ - произвольные параметры, сопоставляемые элементам $i \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{N}$.

Что же касается самого первичного физического закона, реализующего данную физическую структуру, то он может быть записан следующим образом:

$$\varphi(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, \ldots, u_{i\delta}) = \begin{vmatrix} f(u_{i\alpha}) & f(u_{i\beta}) & \ldots & f(u_{i\delta}) \\ f(u_{k\alpha}) & f(u_{k\beta}) & \ldots & f(u_{k\delta}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f(u_{c\alpha}) & f(u_{c\beta}) & \ldots & f(u_{c\delta}) \end{vmatrix} = 0,$$

где $f(x) = \chi^{-1}(x)$ - функция, обратная χ.

Заметим, что физический закон, удовлетворяющий требованию феноменологической инвариантности имеет конечную (а не дифференциальную) форму. Это значит, что данный закон справедлив для всех, а не только близких, элементов множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, что придает ему подлинно фундаментальный характер.

Можно легко показать, что ранг феноменологической симметрии (m, n) тесно связан с "размерностью" множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, т.е. с числом существенных параметров, сопоставляемых каждому из элементов множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Так в случае феноменологической симметрии ранга (m, n) максимальная размерность множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ равна, соответственно, $n-1$ и $m-1$.

Таким образом, теория физических структур представляет собой особую геометрию, построенную на нескольких множествах различной природы. В частности, когда множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ совпадают, из теории физических структур вытекают, как частные следствия, геометрия пространств постоянной положительной и отрицательной кривизны, евклидова геометрия и геометрия симплектических пространств.

Мы уже упоминали, что наличие феноменологической симметрии конечного ранга говорит о существовании конечного числа параметров, характеризующих каждый из элементов множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Оказывается, что эти параметры, для конкретных множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ допускают очень простую интерпретацию; они являются ни чем иным как известными физическими величинами: координатой, массой, силой, температурой, энтропией, электродвижущей силой, сопротивлением и т.д.

Таким образом, теория физических структур позволяет рассматривать все фундаментальные физические законы и понятия с единой , общей точки зрения, не зависящей от их конкретной интерпретации . Образно говоря, теория физических структур представляет собой своеобразную алгебру отношений симметрии, приводящую к специальной , феноменологически инвариантной геометрии, наиболее адекватно отражающей структуру фундаментальных физических законов и понятий.

ПРИМЕРЫ, ИЛЛЮСТРИРУЮЩИЕ КОНЦЕПЦИЮ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР.

В человеческих делах главное внимание должно быть обращено на мотивы.

Иоганн Вольфганг Гёте.

Эйнштейн, рассматривая вопрос о связи геометрии с объектами природы, писал:

"Физика занимает вопрос, справедливы ли теоремы геометрии. То что эвклидова геометрия с этой точки зрения содержит нечто большее, чем простые дедукции, полученные из определений логическим путём, видно из следующего простого рассуждения. Между m точками пространства существует $\frac{1}{2}m(m-1)$ расстояний l_{ik}; между l_{ik} и $3m$ координатами имеют место соотношения:

$$l_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2 \qquad (2.I)$$

Из этих $\frac{1}{2}m(m-1)$ уравнений можно исключить $3m$ координат, и тогда для l_{ik} останется по крайней мере, $\frac{1}{2}m(m-1) - 3m$ соотношений[1]. Поскольку l_{ik} - измеримые величины и, по определению, не зависят друг от друга, эти соотношения между величинами l_{ik} не являются необходимыми *apriori* ".

---

[1] Фактически, из-за специального вида уравнений (2.I) из приведенной системы можно исключить не $3m$ координат, а только $3m-6$ и тогда для l_{ik} останется не $\frac{1}{2}m(m-1) - 3m$ соотношений, а $\frac{1}{2}m(m-1) - 3m + 6$. Однако, ясно, что подобное уточнение не меняет существа дела. - Ю.Ж.

Мысль, заключенная в этих строках о том, что факт существования соотношения между измеряемыми на опыте расстояниями, имеет нетривиальное происхождение и отражает наиболее глубокие физические свойства системы материальных точек, является на наш взгляд, чрезвычайно плодотворной.

Развивая эту идею, можно утверждать, что существование подобных соотношений является свойством не только совокупности материальных точек, но и многих других физических систем. Более того, именно этот факт следует признать наиболее фундаментальным физическим законом, лежащим в основании последовательной физической теории, ибо он является как раз тем самым первым звеном, которое связывает свойства реального мира с эффективными математическими методами исследования.

Ниже мы рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих факт существования некоторых фундаментальных соотношений между результатами измерений, относящихся к различным физическим системам. При этом мы поступим следующим образом. Используя известные уравнения, мы получим некоторые соотношения типа тождеств, левая часть которых имеет вид определителя того или иного порядка.

Заметим, что эти соотношения содержат лишь измеряемые на опыте величины, имеют один и тот же вид (с точностью до порядка определителя и некоторых других несущественных отличительных признаков) для разных физических явлений и, что самое существенное, инвариантны относительно выбора подмножеств, соответствующих физических объектов. Таким образом, сама собой напрашивается мысль о том, что именно эти соотношения должны быть взяты в качестве исходных, допускающих опытную проверку первичных законов, лежащих в основании того или иного раздела физики.

§ I ДИНАМИКА ТОЧКИ.

> Прости меня, Ньютон; ты нашел единственный путь, возможный в твоё время для человека величайшей научной творческой способности и силы мысли. Понятия, созданные тобой, и сейчас остаются ведущими в нашем физическом мышлении, хотя мы теперь и знаем, что если мы будем стремиться к более глубокому пониманию взаимосвязей, то мы должны будем заменить эти понятия другими, стоящими дальше от сферы непосредственного опыта.
>
> Альберт Эйнштейн.

А. Нерелятивистский случай.

Воспользовавшись известным уравнением движения материальной точки

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (I)$$

получим некоторые соотношения типа тождеств между компонентами измеряемых на опыте ускорений.

Для этого рассмотрим два множества:

$\mathfrak{M}$ – множество тел $i, \kappa, \ldots, l, \ldots$ и $\mathfrak{A}$ – множество акцелераторов[1] $\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \ldots$ и измерительную операцию μ, сопоставляющую каждому телу i и каждому акцелератору α S-компоненту ускорения

$$a^S_{i\alpha} = \left(\frac{dv^S}{dt}\right)_{i\alpha}. \qquad (S = 1, 2, 3)$$

Измеряя ускорения $a^S_{i\alpha}$ различных тел, находящихся под воздействием различных акцелераторов, мы получим, вообще говоря, бес-

---

[1] Под акцелераторами (от лат. *acceleratio* – ускорение) мы будем понимать всевозможные механизмы и поля, сообщающие телам различные ускорения.

конечную матрицу

$$\begin{array}{cccc} a^s_{i\alpha} & a^s_{i\beta} & a^s_{i\gamma} & \dots \; a^s_{i\delta} \; \dots \\ a^s_{\kappa\alpha} & a^s_{\kappa\beta} & a^s_{\kappa\gamma} & \dots \; a^s_{\kappa\delta} \; \dots \\ a^s_{\varepsilon\alpha} & a^s_{\varepsilon\beta} & a^s_{\varepsilon\gamma} & \dots \; a^s_{\varepsilon\delta} \; \dots \\ \dots\dots\dots\dots & & & \dots\dots \\ a^s_{m\alpha} & a^s_{m\beta} & a^s_{m\gamma} & \dots \; a^s_{m\delta} \; \dots \\ \dots\dots\dots\dots & & & \end{array}$$

Легко показать, что ранг этой матрицы равен единице. Действительно, так как согласно (I)

$$m_i a^s_{i\alpha} = \mathcal{F}^s_\alpha \qquad (s=1,2,3)$$

то для любых $i,\kappa \in \mathfrak{M}$ и $\alpha,\beta \in \mathfrak{N}$

$$\frac{a^s_{i\alpha}}{a^s_{i\beta}} = \frac{a^s_{\kappa\alpha}}{a^s_{\kappa\beta}},$$

или

$$\forall i,\kappa \in \mathfrak{M},\ \forall \alpha,\beta \in \mathfrak{N} \qquad \begin{vmatrix} a^s_{i\alpha} & a^s_{i\beta} \\ a^s_{\kappa\alpha} & a^s_{\kappa\beta} \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

($\forall$ – квантор общности: высказывание $\forall i \in \mathfrak{M}\ \mathcal{U}(i)$ означает: "для любого i взятого из множества $\mathfrak{M}$, высказывание $\mathcal{U}(i)$ истинно").

При выводе соотношения (2) молчаливо предполагалось, что движение тела i рассматривается либо в инерциальной системе при отсутствии поля тяготения, либо в "системе падающего лифта". Матрица $\|a^s_{i\alpha}\|$ ускорений, измеренных в любой другой системе отсчёта, уже не будет иметь ранг равный единице. Однако, если ввести некоторую константу

$$a_{\mathfrak{G}} = \frac{a_{i_0\alpha_0}\, a_{\kappa_0\beta_0} - a_{i_0\beta_0}\, a_{\kappa_0\alpha_0}}{a_{i_0\alpha_0} + a_{\kappa_0\beta_0} - a_{i_0\beta_0} - a_{\kappa_0\alpha_0}}\,, \tag{3}$$

зависящую только от выбора неинерциальной системы отсчёта $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ и рассмотреть новую матрицу $\| a_{i\alpha} + a_{\mathfrak{G}} \|$, то её ранг снова будет равен единице. В самом деле, нерелятивистское уравнение движения тела i в неинерциальной системе отсчёта $\mathfrak{G}$ имеет вид[1]:

$$m_i a_{i\alpha} = F_\alpha - m_i a_{\mathfrak{G}}\,, \tag{4}$$

где $a_{\mathfrak{G}}$ – ускорение поступательного движения системы $\mathfrak{G}$ (или ускорение силы тяжести, взятое с обратным знаком). Из (4) имеем:

$$(a_{i\alpha} + a_{\mathfrak{G}})(a_{\kappa\beta} + a_{\mathfrak{G}}) - (a_{i\beta} + a_{\mathfrak{G}})(a_{\kappa\alpha} + a_{\mathfrak{G}}) = 0 \tag{5}$$

Полагая в (5) $i = i_0$, $\kappa = \kappa_0$, $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, где i_0, κ_0 – два фиксированных тела, а α_0, β_0 – два фиксированных акцелератора, получим (3) и

$$\forall i, \kappa \in \mathfrak{M}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{A}, \ \forall \mathfrak{G} \in \mathfrak{S} \qquad \begin{vmatrix} a^s_{i\alpha} + a^s_{\mathfrak{G}} & a^s_{i\beta} + a^s_{\mathfrak{G}} \\ a^s_{\kappa\alpha} + a^s_{\mathfrak{G}} & a^s_{\kappa\beta} + a^s_{\mathfrak{G}} \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Подчеркнем, что соотношения (2) и (6) между s – компонентами ускорений $a^s_{i\alpha}$ остаются справедливыми при любом выборе тел i, κ и акцелераторов α, β или, другими словами, инвариантны относительно выбора двухэлементных подмножеств

$$\mathfrak{M}_2 = \{i, \kappa\} \subset \mathfrak{M} \qquad \text{и} \qquad \mathfrak{A}_2 = \{\alpha, \beta\} \subset \mathfrak{A}.$$

---

[1] Предполагается, что неинерциальная система отсчёта $\mathfrak{G} \in \mathfrak{S}$ участвует лишь в поступательном движении относительно инерциальной системы $\bar{\mathfrak{G}}$.

Этот результат мы будем трактовать как наличие особого рода отношений между множествами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{B}$, которые в дальнейшем мы будем называть физической структурой ранга (2.2), кратности (I.I) и порядка I.

В.I Релятивистский случай.

Релятивистский случай в принципе ничем не отличается от нерелятивистского случая; всё различие состоит лишь в применении релятивистской кинематики. Это значит, что в релятивистском случае для характеристики отношений существующих между множеством тел $\mathfrak{M}$ и множеством акцелераторов $\mathfrak{B}$ удобно взять не непосредственно измеряемое трехмерное ускорение $a^s = \frac{dv^s}{dt}$, а выражаемое через него абсолютное ускорение [2]

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^i = \frac{du^i}{dt} + \Gamma^i_{\kappa\varepsilon} u^\kappa u^\varepsilon .$$

Использование абсолютного ускорения $w^i = \left(\frac{du}{dt}\right)^i$ позволяет записать наиболее общее (в рамках общей теории относительности) уравнение движения релятивистской частицы в его классически простом виде:

$$m\left(\frac{du}{dt}\right)^i = F^i \qquad (7)$$

Из (7) легко получаем феноменологически инвариантное соотношение, идентичное (2) и справедливое для любой системы отсчёта

$$\forall i,\kappa \in \mathfrak{M},\ \forall \alpha,\beta \in \mathfrak{B} \qquad \begin{vmatrix} w^n_{i\alpha} & w^n_{i\beta} \\ w^n_{\kappa\alpha} & w^n_{\kappa\beta} \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$
$$n = 0,1,2,3$$

---

[2] О понятии абсолютного ускорения более подробно см. [I] – [2].

Заметим, что в последовательной теории физических структур [I] будет показано, что факт существования инвариантного соотношения (8) является следствием существования особой феноменологической симметрии ранга (2,2). Что же касается самого соотношения (8), то оно является наиболее фундаментальным физическим законом, из которого как следствие может быть получен закон Ньютона в виде (7), (4) или (I).

Литература.

I . Ю.И. Кулаков, "О физических законах, лежащих в основании механики" (см. стр. 75 настоящего сборника).

2 . Ю.И. Кулаков, "Релятивистское уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе отсчёта" (см. стр. 100 настоящего сборника).

§ 2 ЗАКОН ПРЕЛОМЛЕНИЯ.

> Уверенность в том, что явления природы с необходимостью следуют закону причинности, в конечном счёте основывается лишь на скромных успехах, достигнутых в результате попыток человеческого разума установить взаимосвязь между явлениями природы.
>
> Альберт Эйнштейн.

Рассмотрим некоторые общие свойства траекторий релятивистских частиц, движущихся в плоском потенциальном поле $U(x,y,z) = U(x)$, которое изменяется вдоль оси x по произвольному закону и не зависит от y и z .

Обозначим через $\mathcal{M} = \{i, \kappa, \ldots, l, \ldots\}$ множество эквипотенци-

альных плоскостей поля $U(x,y,z)=U(x)$, а через

$\mathfrak{M}=\{\alpha,\beta,\ldots,\gamma,\ldots\}$ – множество изоэнергетических траекторий, то есть траекторий частиц, имеющих одну и ту же энергию $E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ на эквипотенциальной плоскости i :

$$E_{i\alpha}=E_{i\beta}=\ldots=E_i$$

В качестве характеристики траектории α в точке, лежащей на эквипотенциальной плоскости i, возьмём угол $\theta_{i\alpha}$ между направлением оси x и вектором, касательным к траектории α. Легко видеть, что

$$\sin\theta_{i\alpha}=\sqrt{\frac{dy^2+dz^2}{dx^2+dy^2+dz^2}}=\frac{1}{v_{i\alpha}}\sqrt{v_{y,i\alpha}^2+v_{a,i\alpha}^2}. \qquad (I)$$

Воспользовавшись законами сохранения энергии

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_{i\alpha}^2}{c^2}}}+U_i=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_{k\alpha}^2}{c^2}}}+U_k$$

и p_y и p_a – импульсов

$$\frac{mv_{y,i\alpha}}{\sqrt{1-\frac{v_{i\alpha}^2}{c^2}}}=\frac{mv_{y,k\alpha}}{\sqrt{1-\frac{v_{k\alpha}^2}{c^2}}},\qquad \frac{mv_{a,i\alpha}}{\sqrt{1-\frac{v_{i\alpha}^2}{c^2}}}=\frac{mv_{a,k\alpha}}{\sqrt{1-\frac{v_{k\alpha}^2}{c^2}}},$$

сможем написать

$$v_{y,i\alpha}^2+v_{a,i\alpha}^2=(v_{y,k\alpha}^2+v_{a,k\alpha}^2)\,\frac{1-\frac{v_{i\alpha}^2}{c^2}}{1-\frac{v_{k\alpha}^2}{c^2}} \qquad (2)$$

$$\frac{v_{i\alpha}}{c}=\sqrt{1-\frac{m^2c^4}{(E_{k\alpha}+U_k-U_i)^2}},$$

$$\frac{v_{i\alpha}}{c} = \sqrt{1 - \frac{m^2c^4}{(E_{k\alpha} + U_k - U_i)^2}}, \qquad (3)$$

где

$$E_{k\alpha} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{k\alpha}^2}{c^2}}}$$

Подставляя (2) и (3) в равенство (I), получим закон преломления для траекторий релятивистских частиц в плоском потенциальном поле $U(x,y,z) = U(x)$:

$$\sin\theta_{i\alpha} = \sin\theta_{k\alpha} \sqrt{\frac{(E_{i\alpha} + U_i - U_k)^2 - m^2c^4}{(E_{k\alpha} + U_k - U_i)^2 - m^2c^4}} \qquad (4)$$

Но так как при любых $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ $E_{i\alpha} = E_{i\beta} = E_i$, то из (4) следует, что

$$\frac{\sin\theta_{i\alpha}}{\sin\theta_{k\alpha}} = \frac{\sin\theta_{i\beta}}{\sin\theta_{k\beta}}$$

или

$$\forall i,k \in \mathcal{M}, \ \forall \alpha,\beta \in \mathcal{N} \quad \begin{vmatrix} \sin\theta_{i\alpha} & \sin\theta_{i\beta} \\ \sin\theta_{k\alpha} & \sin\theta_{k\beta} \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Итак, характерная особенность изоэнергетических траекторий в плоском потенциальном поле состоит в том, что ранг матрицы

$$\begin{matrix} \sin\theta_{i\alpha} & \sin\theta_{i\beta} & \dots & \sin\theta_{i\gamma} & \dots \\ \sin\theta_{k\alpha} & \sin\theta_{k\beta} & \dots & \sin\theta_{k\gamma} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin\theta_{e\alpha} & \sin\theta_{e\beta} & \dots & \sin\theta_{e\gamma} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

равен единице.

Факт существования инвариантного соотношения (5), тесно связанного с законами сохранения энергии и импульса, мы будем трактовать как наличие особого рода отношений между плоским потенциальным полем и множеством изоэнергетических релятивистских частиц. Эти специфические отношения мы будем в дальнейшем называть физической структурой ранга (2.2) кратности (I.I) и порядка I.

§ 3 ДВИЖЕНИЕ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ.

> Ампер считал необходимым особо подчеркнуть, что математическая теория электродинамических явлений выведена им исключительно из опыта.
>
> **Вильгельм Вебер.**

Прежде всего уточним терминологию, относящуюся к релятивистской кинематике частиц.

Если $\vec{\xi}$ - трехмерный радиус - вектор частицы, то

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\xi}}{dt} \qquad (I)$$

мы будем называть её эмпирической скоростью.

Наряду с $\vec{v}$ удобно рассмотреть четырехмерную скорость частицы

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right), \qquad (2)$$

где $x^i = (ct, \vec{\xi})$ - четырехмерный радиус-вектор частицы $(i = 0,1,2,3)$

$d\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt$ - инвариантный промежуток времени.

Заметим, что непосредственно на опыте измеряется эмпирическая скорость $\vec{v}$, а четыре компоненты u^i рассматриваются как определенные функции от $\vec{v}$.

Точно так же на опыте измеряется эмпирическое (естественное) ускорение

$$\dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \tag{3}$$

зная которое вместе с $\vec{v}$ можно вычислить трехмерное релятивистское

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\dot{\vec{v}} + \frac{\vec{v}(\vec{v}\dot{\vec{v}})}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\right] \tag{4}$$

и четырехмерное

$$w^i = \frac{du^i}{dt} = \left(\frac{\vec{a}\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{5}$$

ускорения.

Итак, непосредственно на опыте измеряются $\vec{v}$ и $\dot{\vec{v}}$, зная которые по формуле (2) можно найти четыре компоненты четырехмерной скорости u^i, а по формулам (4) и (5) – компоненты четырехмерного ускорения w^i.

Приступая к установлению основного экспериментального факта, приводящего к понятию тензора электромагнитного поля, возьмём некоторую частицу с фиксированными массой m и зарядом e и рассмотрим два множества – множество источников электромагнитного поля $\mathfrak{M}$ (конденсаторы, заряженные тела, катушки и т.п.) и множество начальных скоростей, сообщаемых частице, $\mathfrak{N}$.

Помещая частицу в различные электромагнитные поля, создавае-

мые различными источниками $\alpha, \beta, \ldots$ и сообщает ей различные начальные скорости $\vec{v}(a), \vec{v}(b), \ldots$, мы будем измерять соответствующие эмпирические ускорения $\vec{v}_{\alpha a}$.

Таким образом, после соответствующего пересчёта, мы можем записать результат эксперимента в виде матрицы четырехмерных ускорений $\|w^i_{\alpha a}\|$, приобретаемых фиксированной частицей в различных электромагнитных полях $\alpha, \beta, \ldots$ при различных начальных скоростях $a, b, \ldots$

Задача состоит в том, чтобы используя уравнение движения релятивистской частицы в электромагнитном поле показать, что между шестнадцатью i - компонентами четырехмерных ускорений $w^i_{\alpha a}$, $w^i_{\alpha b}, \ldots, w^i_{\delta d}$, относящимися к четырем различным полям $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и четырём начальным скоростям a, b, c, d существует функциональная связь

$$\varphi(w^i_{\alpha a}, w^i_{\alpha b}, \ldots, w^i_{\delta d}) = 0, \qquad (6)$$

инвариантная относительно выбора $\mathfrak{M}_4 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ и $\mathfrak{N}_4 = \{a, b, c, d\}$; при этом левая часть этого равенства является определителем четвертого порядка.

2. Основное инвариантное соотношение.

Для получения феноменологически инвариантного соотношения (6) воспользуемся уравнением движения релятивистской частицы в электромагнитном поле

$$m\frac{du^i}{dt} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k, \qquad (7)$$

где $$u_k = g_{km} u$$

$$g_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Обозначая $\varphi^{ik} = \frac{e}{mc} \mathcal{F}^{ik}$, перепишем (7) в виде:

$$W^i(\alpha, a) = \varphi^{ik}(\alpha) u_k(a). \qquad (8)$$

Так как тензор $\mathcal{F}^{ik}$ антисимметричен, то правая часть равенства (8) при любом фиксированном значении i представляет собой сумму трех слагаемых. Например:

$$W^1(\alpha, a) = \varphi^{10}(\alpha) u_0(a) + \varphi^{12}(\alpha) u_2(a) + \varphi^{13}(\alpha) u_3(a). \qquad (9)$$

Чтобы понять, как связаны между собой $W^1(\alpha, a)$, относящиеся к различным α и a, воспользуемся следующей математической теоремой:

Пусть дан набор $2n(n-1)$ независимых переменных

$$x_a^\sigma, \quad \xi_\alpha^\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n-1; \quad a, \alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

Если все n^2 функций $f_{a\alpha}$ $(a, \alpha = 1, 2, \ldots, n)$ от $2(n-1)$ переменных x_a^σ, ξ_α^σ имеют один и тот же вид

$$f_{a\alpha} = x_a^1 \xi_{1\alpha} + x_a^2 \xi_{2\alpha} + \ldots + x_a^{n-1} \xi_{n-1\,\alpha} \equiv x_a^\sigma \xi_{\sigma\alpha},$$

то они связаны между собой функциональным соотношением

$$\phi(f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{nn}) = 0,$$

левая часть которого является определителем порядка n, то есть

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.10)$$

Доказательство этой теоремы чрезвычайно просто. Действительно, легко видеть, что определитель, стоящий в левой части равенства (7.10), можно предоставить в виде следующего произведения:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n-1} & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n-1} & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-11} & f_{n-12} & \cdots & f_{n-1n-1} & f_{n-1n} \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn-1} & f_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & 0 \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1}^1 & x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^{n-1} & 0 \\ x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n-1} & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n-1} & \xi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n-11} & \xi_{n-12} & \cdots & \xi_{n-1n-1} & \xi_{n-1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Но поскольку каждый из сомножителей равен нулю при любых $x_\alpha^1, x_\alpha^2, \ldots, x_\alpha^{n-1}; \xi_{1\alpha}, \xi_{2\alpha}, \ldots \xi_{n-1\alpha}$, то равенство (7.10) становится очевидным.

В нашем случае $n = 4$ и

$$x_\alpha^1 = u_0(\alpha), \quad x_\alpha^2 = u_2(\alpha), \quad x_\alpha^3 = u_3(\alpha);$$

$$\xi_{1\alpha} = \phi^{10}(\alpha), \quad \xi_{2\alpha} = \phi^{12}(\alpha), \quad \xi_{3\alpha} = \phi^{13}(\alpha).$$

Таким образом, между шестнадцатью ускорениями $w^i(\alpha,a)$, относящимися к четырем произвольным полям $\mathfrak{M}_4=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ и четырём начальным скоростям $\mathfrak{N}_4=\{a,b,c,d\}$ существует феноменологически инвариантное соотношение

$$\forall \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathfrak{M},\quad \forall a,b,c,d\in\mathfrak{N},\quad i=0,1,2,3;\qquad \begin{vmatrix} w^i(\alpha,a) & w^i(\alpha,b) & w^i(\alpha,c) & w^i(\alpha,d)\\ w^i(\beta,a) & w^i(\beta,b) & w^i(\beta,c) & w^i(\beta,d)\\ w^i(\gamma,a) & w^i(\gamma,b) & w^i(\gamma,c) & w^i(\gamma,d)\\ w^i(\delta,a) & w^i(\delta,b) & w^i(\delta,c) & w^i(\delta,d) \end{vmatrix}=0 \qquad (11)$$

Отметим, что если бы тензор $\mathcal{F}^{ik}$ не был бы антисимметричным, то связь между ускорениями выражалась бы через определитель не четвертого, а пятого порядка.

Итак, введение понятия электромагнитного поля тесно связано с рассмотрением двух множеств: множества $\mathfrak{M}$ источников поля $\alpha,\beta,\ldots,\gamma,\ldots$ и множества $\mathfrak{N}$ начальных скоростей $a,b,\ldots$ некоторой фиксированной частицы. Первичной экспериментальной величиной, сопоставляемой каждому источнику поля α и каждой начальной скорости a, является трехмерное ускорение частицы $\vec{w}(\alpha,a)$. Четырехмерное ускорение $w^i(\alpha,a)$ является определенной функцией от $\vec{w}(\alpha,a)$ и $\vec{v}(a)$. Заметим, что феноменологически инвариантное соотношение (11) является тем самым первичным физическим законом, → которого следует существование тензора электромагнитного поля.

§ 4 ВРЕМЯ.

> Во всей истории науки нет более поразительного примера иронии, чем утверждение Эйнштейна, что он не знал что такое абсолютное время – того, что знал каждый.
>
> Дж. Синг.

Рассмотрим множество событий $\mathfrak{M} = \{i, \kappa, \ldots l, \ldots\}$ происходящих в одной и той же точке пространства. При установлении соотношений вида

$$\varphi(\tau_{i\kappa}, \ldots, \tau_{qr}) = 0,$$

связывающих $\frac{1}{2} m(m-1)$ промежутков времени $\tau_{i\kappa}$ между m событиями, возможны два различных подхода.

Первый вариант.

Выберем в качестве единственной измеряемой на опыте величины, характеризующей пару событий, промежуток времени $\tau_{i\kappa}$, измеренный, например, с помощью часов. При этом мы не будем принимать в расчёт последовательность событий i и κ и считать

$$\tau_{i\kappa} = \tau_{\kappa i} > 0.$$

Таким образом, весь набор опытных данных, характеризующих всё множество событий $\mathfrak{M} = \{i, \kappa, \ldots, l, \ldots\}$ может быть представлен в виде симметрической матрицы с положительными элементами

$$\begin{matrix} 0 & \tau_{i\kappa} & \tau_{ie} & \tau_{im} & \ldots \\ \tau_{\kappa i} & 0 & \tau_{\kappa e} & \tau_{\kappa m} & \ldots \\ \tau_{ei} & \tau_{e\kappa} & 0 & \tau_{em} & \ldots \\ \tau_{mi} & \tau_{m\kappa} & \tau_{me} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{matrix} \qquad (I)$$

Мы будем исходить из закона аддитивности времени, принимая его на данном этапе изложения как фундаментальный опытный факт.

Смысл его состоит в том, что промежутки времени $\tau_{ik}, \tau_{ie}, \tau_{ke}$ между тремя событиями i, k, e в зависимости от последовательности этих событий, связаны между собой одним из следующих трех соотношений

$$\begin{aligned}
&\tau_{ik} + \tau_{ke} - \tau_{ie} = 0, && \text{при } i<k<e \text{ или } e<k<i,\\
&\tau_{ik} - \tau_{ke} + \tau_{ie} = 0, && \text{при } k<i<e \text{ или } e<i<k, \qquad (2)\\
&-\tau_{ik} + \tau_{ke} + \tau_{ie} = 0, && \text{при } i<e<k \text{ или } k<e<i,
\end{aligned}$$

где "неравенство" $i<k$ означает, что событие i предшествует событию k.

Чтобы придать соотношениям (2) единый вид, справедливый при любой последовательности событий i, k и e, перепишем, например, первое из равенств (2) в виде

$$\tau_{ik} + \tau_{ke} = \tau_{ie}$$

и возведем обе части равенства в квадрат:

$$\tau_{ik}^2 + \tau_{ke}^2 + 2\tau_{ik}\tau_{ke} = \tau_{ie}^2.$$

Отделяя $2\tau_{ik}\tau_{ke}$ и снова возводя обе части полученного равенства в квадрат, получим:

$$\tau_{ik}^4 + \tau_{ke}^4 + \tau_{ie}^4 - 2\left(\tau_{ik}^2\tau_{ke}^2 + \tau_{ke}^2\tau_{ie}^2 + \tau_{ie}^2\tau_{ik}^2\right) = 0.$$

Легко убедиться в том, что выражение, стоящее в левой части полученного равенства, есть не что иное как определитель Кейли-Менгера четвертого порядка

$$\varphi(\tau_{ik}, \tau_{ie}, \tau_{ke}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \tau_{ik}^2 & \tau_{ie}^2 \\ 1 & \tau_{ik}^2 & 0 & \tau_{ke}^2 \\ 1 & \tau_{ie}^2 & \tau_{ke}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Заметим попутно, что выражение (3), полученное из первого равенства (2), включает в себя все три соотношения (2), так как

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \tau_{ik}^2 & \tau_{ie}^2 \\ 1 & \tau_{ik}^2 & 0 & \tau_{ke}^2 \\ 1 & \tau_{ie}^2 & \tau_{ke}^2 & 0 \end{vmatrix} = \tau_{ik}^4 + \tau_{ie}^4 + \tau_{ke}^4 - 2(\tau_{ik}^2\tau_{ie}^2 + \tau_{ie}^2\tau_{ke}^2 + \tau_{ke}^2\tau_{ik}^2) =$$

$$= -(\tau_{ik} + \tau_{ie} + \tau_{ke})(\tau_{ik} + \tau_{ie} - \tau_{ke})(\tau_{ik} - \tau_{ie} + \tau_{ke})(-\tau_{ik} + \tau_{ie} + \tau_{ke}) = 0.$$

Второй вариант.

Поскольку существуют объективные способы, позволяющие установить, какое из двух событий i и k произошло раньше, а какое позже, то кроме промежутков времени τ_{ik}, симметричных относительно индексов i и k, каждой паре событий, после соответствующего эксперимента, можно сопоставить знаковую функцию γ_{ik}, равную + I, если событие i предшествует событию k и - I, если событие i следует за k. Ясно, что имеет место равенство

$$\eta_{ik} = -\eta_{ki}.$$

Итак, для полной характеристики множества событий необходимо помимо матрицы τ_{ik} задать антисимметрическую матрицу

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & \eta_{ik} & \eta_{ie} & \eta_{im} \cdots \\ \eta_{ki} & 0 & \eta_{ke} & \eta_{km} \cdots \\ \eta_{ei} & \eta_{ek} & 0 & \eta_{em} \cdots \\ \eta_{mi} & \eta_{mk} & \eta_{me} & 0 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right\| \qquad (4)$$

Введение знаковой функции η_{ik} позволяет записать три равенства (2), выражающие принцип аддитивности времени, в виде одного, инвариантного относительно выбора последовательности событий i, k, l :

$$\varphi(\tau_{ik}, \eta_{ik}, \tau_{ie}, \eta_{ie}, \tau_{ke}, \eta_{ke}) =$$

$$= \tau_{ik}\eta_{ik} + \tau_{ke}\eta_{ke} + \tau_{ei}\eta_{ei} = 0. \qquad (5)$$

Повторяя описанную выше процедуру перехода от (2) к (3) и замечая, что $\eta_{ik}^2 = 1$ легко убедиться в том, что из (5) следует (3).

Итак, своеобразие второго варианта состоит в том, что рассматривается соотношение (5), связывающее между собой два совершенно различных набора опытных данных τ_{ik} и η_{ik}, относящиеся к трём произвольным событиям i, k, l.

Заметим, что τ_{ik} и η_{ik} входят в (5) в определенной комбинации

$$t_{ik} = \tau_{ik}\eta_{ik},$$

которую назовем аддитивным промежутком времени. В связи с этим удобно рассматривать вместо двух матриц τ_{ik} и η_{ik} одну антисимметрическую матрицу t_{ik}, каждый элемент которой равен произведению соответствующих элементов матриц τ_{ik} и η_{ik}. Соотношение (5), справедливое при любой последовательности событий i, k, l, в новых обозначениях запишется в виде

$$\varphi(t_{ik}, t_{ie}, t_{ke}) = t_{ik} + t_{ei} + t_{ke} = 0 \qquad (6)$$

или

$$\varphi(t_{ik}, t_{ie}, t_{ke}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & t_{ik} & t_{ie} \\ -1 & -t_{ik} & 0 & t_{ke} \\ -1 & -t_{ie} & -t_{ke} & 0 \end{vmatrix} = (t_{ik} + t_{ke} + t_{ei})^2 = 0. \qquad (7)$$

Заметим, что соотношения (7) и (3), из которых как следствие получается закон аддитивности времени, могут быть получены априори из одного только факта существования феноменологической симметрии ранга 3.

Итак, основное содержание понятия времени состоит в утверждении, что множество произвольных событий $\mathfrak{M}$ обладает феноменологической симметрией ранга 3.

§ 5 РАССТОЯНИЕ.

Мах был единственным, кто серьёзно думал об исключении понятия пространства, которое он пытался заменить представлением о всей сумме расстояний между всеми материальными точками.

Альберт Эйнштейн.

Рассмотрим множество произвольных материальных точек $i, \kappa, \ldots m, \ldots$. В качестве единственной, измеряемой на опыте, величины, характеризующей пару точек (i, κ), примем расстояние $l_{i\kappa}$ измеренное, например, с помощью масштабной линейки.

В отличие от множества событий, где можно экспериментально установить отношение порядка (понятия раньше - позже), для множества материальных точек не существует способа, позволяющего установить подобные отношения (справа - слева, выше - ниже) для пары точек. В связи с этим, расстояние $l_{i\kappa}$ между двумя точками i и κ является их единственной характеристикой и имеет симметричный относительно точек i и κ вид:

$$l_{i\kappa} = l_{\kappa i}. \qquad (I)$$

Итак, сопоставляя каждой паре точек (i, κ) расстояние $l_{i\kappa}$ мы получим набор опытных данных, характеризующий данную совокупность точек, который может быть представлен в виде симметричной матрицы:

$$\begin{matrix} 0 & l_{i\kappa} & l_{im} & l_{in} & \ldots \\ l_{\kappa i} & 0 & l_{\kappa m} & l_{\kappa n} & \ldots \\ l_{mi} & l_{m\kappa} & 0 & l_{mn} & \ldots \\ l_{ni} & l_{n\kappa} & l_{nm} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \qquad (2)$$

Задача состоит в том, чтобы опираясь на законы эвклидовой геометрии показать, что между отдельными расстояниями l_{ik}, выбранными из матрицы (2) по определенному правилу, существует некоторая функциональная связь, вид которой не зависит от конкретного выбора материальных точек $i, k, \ldots, m, \ldots$.

Ясно, что взаимные расстояния l_{ik}, l_{im} и l_{km} между тремя точками i, k, m не могут быть связаны между собой функциональной зависимостью, так как при фиксированных l_{ik} и l_{im} третье расстояние l_{km} может принимать различные значения. Точно так же обстоит дело, если взять четыре точки i, k, m, n и рассмотреть зависимость между шестью взаимными расстояниями; при фиксированных пяти расстояниях l_{ik}, l_{im}, l_{km}, l_{mn} и l_{kn} шестое расстояние l_{in} может принимать различные значения.

Но если рассмотреть пять точек i, k, m, n, p, то одно из десяти взаимных расстояний является двузначной функцией остальных девяти.

Итак, рассмотрим пять произвольно расположенных точек i, k, m, n, p, которые будем обозначать цифрами I, 2, 3, 4, 0. Из точки $p = 0$ как из центра построим четыре вектора $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ и $\vec{r}_4$, концы которых лежат, соответственно, в точках $1 = i$, $2 = k$, $3 = m$ и $4 = n$.

Согласно одной из аксиом эвклидовой геометрии, между четырьмя произвольными векторами в трехмерном эвклидовом пространстве существует линейная зависимость:

$$c_1 \vec{r}_1 + c_2 \vec{r}_2 + c_3 \vec{r}_3 + c_4 \vec{r}_4 = 0, \qquad (3)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – некоторые константы, не равные нулю одновременно.

Умножая равенство (3) скалярно на $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ и $\vec{r}_4$ получим систему четырех однородных уравнений относительно четырех неизвестных c_1, c_2, c_3 и c_4. Эта система имеет ненулевое решение, если её определитель, называемый определителем Грама, равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} r_1^2 & \vec{r}_1\vec{r}_2 & \vec{r}_1\vec{r}_3 & \vec{r}_1\vec{r}_4 \\ \vec{r}_2\vec{r}_1 & r_2^2 & \vec{r}_2\vec{r}_3 & \vec{r}_2\vec{r}_4 \\ \vec{r}_3\vec{r}_1 & \vec{r}_3\vec{r}_2 & r_3^2 & \vec{r}_3\vec{r}_4 \\ \vec{r}_4\vec{r}_1 & \vec{r}_4\vec{r}_2 & \vec{r}_4\vec{r}_3 & r_4^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Выражая скалярные произведения $\vec{r}_s\vec{r}_t$ через длины $l_s^2 = \vec{r}_s^2$, $l_t^2 = \vec{r}_t^2$ и $l_{st}^2 = (\vec{r}_s - \vec{r}_t)^2$:

$$\vec{r}_s\vec{r}_t = \frac{1}{2}\left(l_s^2 + l_t^2 - l_{st}^2\right),$$

перепишем (4) в виде:

$$\begin{vmatrix} 2l_1^2 & l_1^2+l_2^2-l_{12}^2 & l_1^2+l_3^2-l_{13}^2 & l_1^2+l_4^2-l_{14}^2 \\ l_2^2+l_1^2-l_{12}^2 & 2l_2^2 & l_2^2+l_3^2-l_{23}^2 & l_2^2+l_4^2-l_{24}^2 \\ l_3^2+l_1^2-l_{13}^2 & l_3^2+l_2^2-l_{23}^2 & 2l_3^2 & l_3^2+l_4^2-l_{34}^2 \\ l_4^2+l_1^2-l_{14}^2 & l_4^2+l_2^2-l_{24}^2 & l_4^2+l_3^2-l_{34}^2 & 2l_4^2 \end{vmatrix} = 0$$

После окаймления получим:

$$\begin{vmatrix} 2l_1^2 & l_1^2+l_2^2-l_{12}^2 & l_1^2+l_3^2-l_{13}^2 & l_1^2+l_4^2-l_{14}^2 & l_1^2 \\ l_2^2+l_1^2-l_{12}^2 & 2l_2^2 & l_2^2+l_3^2-l_{23}^2 & l_2^2+l_4^2-l_{24}^2 & l_2^2 \\ l_3^2+l_1^2-l_{13}^2 & l_3^2+l_2^2-l_{23}^2 & 2l_3^2 & l_3^2+l_4^2-l_{34}^2 & l_3^2 \\ l_4^2+l_1^2-l_{14}^2 & l_4+l_2^2-l_{24}^2 & l_4^2+l_3^2-l_{34}^2 & 2l_4^2 & l_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычитая из первых четырех столбцов пятый, будем иметь:

$$\begin{vmatrix} l_1^2 & l_2^2-l_{12}^2 & l_3^2-l_{13}^2 & l_4^2-l_{14}^2 & l_1^2 \\ l_1^2-l_{12}^2 & l_2^2 & l_3^2-l_{23}^2 & l_4^2-l_{24}^2 & l_2^2 \\ l_1^2-l_{13}^2 & l_2^2-l_{23}^2 & l_3^2 & l_4^2-l_{34}^2 & l_3^2 \\ l_1^2-l_{14}^2 & l_2^2-l_{24}^2 & l_3^2-l_{34}^2 & l_4^2 & l_4^2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

После нового окаймления, получаем:

$$\begin{vmatrix} l_1^2 & l_2^2-l_{12}^2 & l_3^2-l_{13}^2 & l_4^2-l_{14}^2 & l_1^2 & 0 \\ l_1^2-l_{12}^2 & l_2^2 & l_3^2-l_{23}^2 & l_4^2-l_{24}^2 & l_2^2 & 0 \\ l_1^2-l_{13}^2 & l_2^2-l_{23}^2 & l_3^2 & l_4^2-l_{34}^2 & l_3^2 & 0 \\ l_1^2-l_{14}^2 & l_2^2-l_{24}^2 & l_3^2-l_{34}^2 & l_4^2 & l_4^2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 & l_4^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Вычитая из первых четырех строк шестую, меняя местами пятую и шестую строку и возвращаясь к первоначальным обозначениям

($l_1 = l_{10} = l_{ip}$, $l_2 = l_{20} = l_{kp}$, ... , $l_{34} = l_{mn}$) , получаем окончательное соотношение, связывающее десять расстояний между пятью произвольными точками, известное под названием определителя Кейли – – Менгера шестого порядка: $\forall i,k,m,n,p \in \mathfrak{M}_5$

$$\varphi(l_{ik}, l_{im}, l_{in}, l_{ip}, l_{km}, l_{kn}, l_{kp}, l_{mn}, l_{mp}, l_{np}) =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{im}^2 & l_{in}^2 & l_{ip}^2 \\ 1 & l_{ik}^2 & 0 & l_{km}^2 & l_{kn}^2 & l_{kp}^2 \\ 1 & l_{im}^2 & l_{km}^2 & 0 & l_{mn}^2 & l_{mp}^2 \\ 1 & l_{in}^2 & l_{kn}^2 & l_{mn}^2 & 0 & l_{np}^2 \\ 1 & l_{ip}^2 & l_{kp}^2 & l_{mp}^2 & l_{np}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

До сих пор мы рассматривали множество точек произвольно расположенных в пространстве. Если же ограничиться точками, лежащими в одной и той же плоскости, то уже не десять расстояний между пятью точками, а только шесть расстояний между четырьмя точками оказываются связанными между собой определителем Кейли–Менгера пятого порядка:

$$\forall i,k,m,n \in \mathfrak{M}_4$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & l_{ik}^2 & l_{im}^2 & l_{in}^2 \\ 1 & l_{ik}^2 & 0 & l_{km}^2 & l_{kn}^2 \\ 1 & l_{im}^2 & l_{km}^2 & 0 & l_{mn}^2 \\ 1 & l_{in}^2 & l_{kn}^2 & l_{mn}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Точно так же три расстояния между тремя произвольными точками, лежащими на прямой, должны обращать в нуль определитель Кейли – – Менгера четвертого порядка: $\forall\, i, k, m \in \mathfrak{M}_3$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ell_{ik}^2 & \ell_{im}^2 \\ 1 & \ell_{ik}^2 & 0 & \ell_{km}^2 \\ 1 & \ell_{im}^2 & \ell_{km}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Эти результаты легко понять, если учесть, что определитель Кейли–Менгера $K+2$ порядка равен, с точностью до коэффициента $(-1)^{K+1} 2^K (K!)^2$ квадрату объёма K –мерного симплекса, построенного на $K+1$ точках, то есть при $K=2$ равен квадрату площади треугольника, при $K=3$ – квадрату объёма тетраэдра и т.д.

Отметим, что соотношение (5), во–первых, имеет универсальный характер, так как не зависит от конкретного выбора точек i, k, m, n, p, или, другими словами, инвариантно относительно выбора подмножества $\mathfrak{M}_5 = \{i, k, m, n, p\}$, и, во–вторых, содержит лишь измеряемые на опыте величины и потому допускает экспериментальную проверку.

Таким образом, равенство (5) выражает наиболее глубокие свойства протяженности произвольной системы реальных тел и может быть принято в качестве наиболее фундаментального закона при построении физической теории пространственных отношений. Соотношение (5) было получено здесь на основании аксиом эвклидовой геометрии. Однако в последовательной теории физических структур это соотношение, а следовательно и вытекающие из него аксиомы Эвклида, может быть получено из одного только требования феноменологической симметрии ранга 5.

Соотношение (5), играющее чрезвычайно важную роль при построении последовательной физической теории пространства, на самом деле

является частным случаем более общего равенства, связывающего расстояния $l_{ik}(R)$ между точками в трехмерном пространстве постоянной кривизны. Это трехмерное пространство мы будем рассматривать как трехмерную сферу, вложенную в четырехмерное эвклидово пространство.

Так как любые пять векторов в четырехмерном эвклидовом пространстве линейно зависимы, то определитель Грама пятого порядка должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \vec{z}_i^{\,2} & \vec{z}_i\vec{z}_k & \vec{z}_i\vec{z}_m & \vec{z}_i\vec{z}_n & \vec{z}_i\vec{z}_p \\ \vec{z}_k\vec{z}_i & \vec{z}_k^{\,2} & \vec{z}_k\vec{z}_m & \vec{z}_k\vec{z}_n & \vec{z}_k\vec{z}_p \\ \vec{z}_m\vec{z}_i & \vec{z}_m\vec{z}_k & \vec{z}_m^{\,2} & \vec{z}_m\vec{z}_n & \vec{z}_m\vec{z}_p \\ \vec{z}_n\vec{z}_i & \vec{z}_n\vec{z}_k & \vec{z}_n\vec{z}_m & \vec{z}_n^{\,2} & \vec{z}_n\vec{z}_p \\ \vec{z}_p\vec{z}_i & \vec{z}_p\vec{z}_k & \vec{z}_p\vec{z}_m & \vec{z}_p\vec{z}_n & \vec{z}_p^{\,2} \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Поскольку, согласно неравенству Коши–Буняковского,

$$(\vec{z}_i\vec{z}_k)^2 \leq z_i^2 \cdot z_k^2$$

то, обозначая

$$\frac{\vec{z}_i\vec{z}_k}{\sqrt{z_i^2}\sqrt{z_k^2}} = \cos\varphi_{ik}$$

перепишем (8) в виде:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\varphi_{ik} & \cos\varphi_{im} & \cos\varphi_{in} & \cos\varphi_{ip} \\ \cos\varphi_{ki} & 1 & \cos\varphi_{km} & \cos\varphi_{kn} & \cos\varphi_{kp} \\ \cos\varphi_{mi} & \cos\varphi_{mk} & 1 & \cos\varphi_{mn} & \cos\varphi_{mp} \\ \cos\varphi_{ni} & \cos\varphi_{nk} & \cos\varphi_{nm} & 1 & \cos\varphi_{np} \\ \cos\varphi_{pi} & \cos\varphi_{pk} & \cos\varphi_{pm} & \cos\varphi_{pn} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

Определим расстояние $l_{ik}(R)$ между двумя точками i и k трехмерного пространства постоянной (положительной) кривизны, как

$$l_{ik}(R) = R\varphi_{ik}$$

где R – некоторая постоянная, называемая радиусом кривизны.

Таким образом, если при любом выборе пяти точек i, k, m, n, p делять расстояний $l_{ik}, l_{im}, \ldots, l_{np}$ удовлетворяют, при определённом значении R, равенству

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{l_{ik}}{R} & \cos\frac{l_{im}}{R} & \cos\frac{l_{in}}{R} & \cos\frac{l_{ip}}{R} \\ \cos\frac{l_{ik}}{R} & 1 & \cos\frac{l_{km}}{R} & \cos\frac{l_{kn}}{R} & \cos\frac{l_{kp}}{R} \\ \cos\frac{l_{im}}{R} & \cos\frac{l_{km}}{R} & 1 & \cos\frac{l_{mn}}{R} & \cos\frac{l_{mp}}{R} \\ \cos\frac{l_{in}}{R} & \cos\frac{l_{kn}}{R} & \cos\frac{l_{mn}}{R} & 1 & \cos\frac{l_{np}}{R} \\ \cos\frac{l_{ip}}{R} & \cos\frac{l_{kp}}{R} & \cos\frac{l_{mp}}{R} & \cos\frac{l_{np}}{R} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

то будем говорить, что точки i, k, m, n, p являются точками трехмерного пространства постоянной положительной кривизны $\kappa = \frac{1}{R^2}$, а числа $l_{ik}(R)$ – расстояниями между этими точками.

Легко показать, что определитель (6) связан с определителем (10) соотношением:

$$\Phi_\infty(l_{ik}, \dots, l_{np}) = -16 \lim_{R\to\infty} R^8 \Phi_R(l_{ik}(R), \dots, l_{np}(R)). \quad (11)$$

Возвратимся теперь к исходной матрице (2) составленной из экспериментальных данных l_{ik}. Чтобы выразить закономерности вида (5) – (7) в терминах ранга, рассмотрим новую матрицу

$$\begin{matrix} 1 & U_{ik} & U_{im} & U_{in} & U_{ip} & \dots \\ U_{ki} & 1 & U_{km} & U_{kn} & U_{kp} & \dots \\ U_{mi} & U_{mk} & 1 & U_{mn} & U_{mp} & \dots \\ U_{ni} & U_{nk} & U_{nm} & 1 & U_{np} & \dots \\ U_{pi} & U_{pk} & U_{pm} & U_{pn} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \quad (12)$$

составленную из так называемых приведенных расстояний U_{ik}, связанных с $l_{ik}(R)$ соотношением

$$U_{ik} = \cos\frac{l_{ik}(R)}{R}. \quad (13)$$

Воспользуемся теоремой о ранге симметрической и антисимметрической матриц, согласно которой ранг таких матриц равен наивысшему порядку отличных от нуля главных миноров, и сформулируем ряд предложений, относящихся к рангу матрицы (12):

а) Если тела i, k, m, n, p являются точками пространства постоянн

ной положительной кривизны $\frac{1}{R^2}$, то ранг матрицы $U_{ik}(R)$ равен четырем.

b) Если тела $i, k, m, \ldots$ лежат на двумерной сфере радиуса R, а расстояние $l_{ik}(R)$ измеряется вдоль дуги большого круга, то ранг матрицы $U_{ik}(R)$ равен трем.

c) Если точки $i, k, m, \ldots$ лежат на произвольной[1] кривой, а расстояние $l_{ik}(R)$ измеряется вдоль дуги, то ранг матрицы $U_{ik}(R)$ равен двум при любых значениях R.

d) Если тела $i, k, m, \ldots$ являются точками трехмерного эвклидова пространства, то ранг матрицы $U_{ik}(\infty)$[2] равен четырем.

e) Если точки $i, k, m, \ldots$ лежат на плоскости, то ранг матрицы $U_{ik}(\infty)$ равен трём.

---

[1] Можно показать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{l_{ik}}{R} & \cos\frac{l_{im}}{R} \\ \cos\frac{l_{ik}}{R} & 1 & \cos\frac{l_{km}}{R} \\ \cos\frac{l_{im}}{R} & \cos\frac{l_{km}}{R} & 1 \end{vmatrix} = 4 \sin\frac{1}{2R}(l_{ik}+l_{im}+l_{km}) \times$$

$$\times \sin\frac{1}{2R}(l_{ik}+l_{im}-l_{km}) \sin\frac{1}{2R}(l_{ik}-l_{im}+l_{km}) \sin\frac{1}{2R}(-l_{ik}+l_{im}+l_{km}).$$

Таким образом, если расстояния l_{ik}, l_{im} и l_{km} удовлетворяют одному из трех равенств: $l_{ik}+l_{im}=l_{km}$, $l_{im}+l_{km}=l_{ik}$ или $l_{km}+l_{ik}=l_{im}$, то $\Phi_R(l_{ik}, l_{im}, l_{km})$ обращается в нуль при любых значениях R.

[2] Строго говоря, при $R\to\infty$ имеет смысл рассматривать матрицу

$$U_{ik}^{0} = \lim_{R\to\infty} R^{2\frac{n+1}{n+2}} U_{ik}(R)$$

имеющую конечные выражения для миноров $n+1$ -го порядка.

Краткое резюме:

1. Существуют совокупности материальных точек, различающиеся по своим общим свойствам. Эти свойства определяются двумя параметрами - радиусом кривизны R и рангом матрицы $u_{ik}(R)$.

2. Оба эти числа могут быть найдены экспериментально путём измерения взаимных расстояний ℓ_{ik} между точками данной совокупности.

3. Как показывает опыт, в пределах, доступной к настоящему времени, точности измерений, для произвольного общего набора материальных точек радиус кривизны равен бесконечности, а ранг матрицы u°_{ik} равен четырем. В этом случае, допуская вольность речи, говорят, что все тела находятся в трехмерном эвклидовом пространстве.

4. Из общего набора точек можно выбрать различные подмножества с конечным или бесконечным радиусом кривизны и матрицей $u_{ik}(R)$ ранга три или два (сфера, плоскость, прямая и т.п.).

§ 6 ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.

Ничто так не волнует человеческий разум, как свойства пространства и времени.

Мако фон Лауэ.

Рассмотрим два произвольных, фиксированных события i, k $i, k \in \mathfrak{M}$ и множество $\mathfrak{A} = \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \ldots\}$ различных систем отсчёта, равномерно движущихся друг относительно друга. Если $\ell_{ik,\alpha}$ и $t_{ik,\alpha}$, соответственно, расстояние и промежуток времени между двумя событиями i и k в системе отсчёта α, то из инвари-

антности интервала S_{ik} следует следующее соотношение, справедливое при любом выборе событий i,k и систем отсчёта α,β:

$$s_{ik}^2 = c^2 t_{ik,\alpha}^2 - l_{ik,\alpha}^2 = c^2 t_{ik,\beta}^2 - l_{ik,\beta}^2. \qquad (I)$$

Из (I) имеем:

$$\frac{l_{ik,\alpha}^2 - l_{ik,\beta}^2}{t_{ik,\alpha}^2 - t_{ik,\beta}^2} = c^2$$

или

$$\frac{l_{ik,\alpha}^2 - l_{ik,\beta}^2}{t_{ik,\alpha}^2 - t_{ik,\beta}^2} = \frac{l_{ik,\alpha}^2 - l_{ik,\gamma}^2}{t_{ik,\alpha}^2 - l_{ik,\gamma}^2}. \qquad (2)$$

Соотношение (2) содержит только измеряемые на опыте величины и может быть переписано в каноническом виде:

$$\forall i,k \in \mathfrak{M}, \ \forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathfrak{N} \qquad \begin{vmatrix} l_{ik,\alpha}^2 & l_{ik,\beta}^2 & l_{ik,\gamma}^2 \\ t_{ik,\alpha}^2 & t_{ik,\beta}^2 & t_{ik,\gamma}^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Наличие феноменологически инвариантного[1] соотношения (3) выражает основной и единственный экспериментально устанавливаемый факт, лежащий в основании теории относительности.

---

[1] Феноменологически инвариантным соотношением называется равенство типа

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, \ldots, a_{k\gamma}) = 0,$$

не зависящее от выбора конечных подмножеств $\mathfrak{M}_m = \{i,k,\ldots,l\}$ и $\mathfrak{N}_n = \{\alpha,\beta,\ldots,\gamma\}$.

Заметим, что это соотношение (3), из которого как следствие легко получить (I), может быть в свою очередь получено априори из одного только факта существования феноменологической симметрии ранга 3 и кратности 2.

Итак, основное содержание теории относительности не имеет никакого отношения к "конечной скорости взаимодействия" и состоит в утверждении: между множеством произвольных событий $\mathfrak{M}$ и множеством всех систем отсчёта $\mathfrak{N}$ существуют отношения феноменологической симметрии ранга 3 и кратности 2.

§7 РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ.

Представим себе множество $\mathfrak{M}$ различных движущихся точек $a, b, \ldots, c, \ldots$ и множество $\mathfrak{N}$ произвольных моментов $i, \kappa, \ldots, \ell, \ldots$ во время которых измеряются время t и координаты x всех движущихся точек. Если точки $a \in \mathfrak{M}$ движутся равномерно, то

$$x_{ai} = c_{0a} + c_{1a} t_{ai}$$

и, следовательно,

$$\forall a \in \mathfrak{M},\ \forall i, \kappa, \ell \in \mathfrak{N} \qquad \begin{vmatrix} x_{ai} & x_{a\kappa} & x_{a\ell} \\ t_{ai} & t_{a\kappa} & t_{a\ell} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, смысл идеи "равномерности" сводится к утверждению: между множеством точек $\mathfrak{M}$, находящихся в состоянии равномерного движения, и множеством моментов $\mathfrak{N}$ существуют отношения феноменологической симметрии ранга 3 и кратности 2.

Совершенно аналогично, если точки $a \in \mathfrak{M}$ движутся равноускоренно, то

$$x_{ai} = c_{0a} + c_{1a} t_{ai} + c_{2a} t_{ai}^2$$

и, следовательно,

$$\forall a \in \mathfrak{M}_b, \quad \forall i,k,l,m \in \mathfrak{T}_b \quad \begin{vmatrix} x_{ai} & x_{ak} & x_{al} & x_{am} \\ t_{ai}^2 & t_{ak}^2 & t_{al}^2 & t_{am}^2 \\ t_{ai} & t_{ak} & t_{al} & t_{am} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, между множеством точек $\mathfrak{M}_b$, находящихся в состоянии равноускоренного движения, и множеством моментов $\mathfrak{T}_b$ существуют отношения феноменологической симметрии ранга 4 и кратности 2.

§8 ТЕРМОДИНАМИКА.

Природа проста в своих законах, но бесконечно богата и разнообразна в их приложениях.

Лейбниц.

Мы рассмотрим простейший случай, исключив влияние электрического и магнитного поля на вещество. В этом случае основное уравнение термодинамики имеет вид

$$dU = TdS - pdV \qquad (I)$$

Обозначим через $A_{im}^{(S)} = -\int_i^m p_{(S=const)} dV$ работу, производимую над системой при адиабатическом переходе из состояния i в состояние m, а через $A_{mk}^{(T)} = -\int_m^k p_{(T=const)} dV$ работу при изотермическом переходе из состояния m в состояние k. Тогда из (I) следует:

$$U_m - U_i = A_{im}^{(S)}$$

$$U_k - U_m = T_k (S_k - S_m) + A_{mk}^{(T)},$$

откуда, полагая $A_{ik}^{(ST)} = A_{im}^{(S)} + A_{mk}^{(T)}$, имеем

$$U_k - U_i = T_k (S_k - S_i) + A_{ik}^{(ST)}. \qquad (2)$$

Аналогично, полагая $A_{ik}^{(TS)} = A_{in}^{(T)} + A_{nk}^{(S)}$, получим

$$U_k - U_i = T_i (S_k - S_i) + A_{ik}^{(TS)}. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует конечное уравнение термодинамики

$$a_{ik} = \left(T_i + T_k\right)(S_i - S_k) + 2(U_k - U_i) \qquad (4)$$

где

$$a_{ik} = A_{ik}^{(ST)} + A_{ik}^{(TS)}.$$

Положим, далее $S_{ik} = A_{ik}^{(ST)} - A_{ik}^{(TS)}$, тогда из (2) и (3) получаем:

$$S_{ik} = -(T_i - T_k)(S_i - S_k). \qquad (5)$$

Переходя к безразмерным переменным x и y

$$T = T_0 (x - y), \qquad S = S_0 (x + y)$$

перепишем (5) в виде

$$S_{ik} = T_0 S_0 \left[-(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2\right] \qquad (6)$$

Итак,

$$x_i = \frac{1}{2}\left(\frac{S_i}{S_0} + \frac{T_i}{T_0}\right)$$

и $$y_i = \frac{1}{2}\left(\frac{S_i}{S_0} - \frac{T_i}{T_0}\right)$$

можно истолковать как декартовы координаты состояния i в двумерном псевдоевклидовом пространстве, симметрическая метрика которого задается равенством (6). Это наводит на мысль придать геометрический смысл также основному уравнению (4).

Если обозначить

$$R_i = 2u_i - T_i S_i = u_i + F_i$$

где u_i и F_i – внутренняя и свободная энергия состояния i, то уравнению (4) можно придать вид

$$a_{ik} = T_k S_i - T_i S_k + R_k P_i - R_i P_k, \qquad (7)$$

где

$$P_i = P_k = 1$$

Теперь можно истолковать T_i, S_i, R_i и $P_i = 1$ как три существенные и одна "замороженная" координаты состояния i в некотором четырехмерном симплектическом пространстве, антисимметрическая метрика которого a_{ik} задается равенством (7).

Итак, мы показали, что каждой паре термодинамических состояний (i, k) экспериментальным путём можно сопоставить два "расстояния" – одно, имеющее смысл работы по специально выбранным путям, симметрическое S_{ik} и одно антисимметрическое a_{ik}.

Но как известно из двумерной геометрии нулевой кривизны квадраты попарных расстояний между точками i, k, l, m обращают в нуль опре[illegible]ли-Менгера при любом расположении i, k, l, m

Таким образом, для S_{ik} имеем:

$$\forall i,\kappa,e,m \in \mathfrak{M} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & S_{i\kappa} & S_{ie} & S_{im} \\ 1 & S_{i\kappa} & 0 & S_{\kappa e} & S_{\kappa m} \\ 1 & S_{ie} & S_{\kappa e} & 0 & S_{em} \\ 1 & S_{im} & S_{\kappa m} & S_{em} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Наличие феноменологически инвариантного соотношения (8) выражает один из двух основных, экспериментально устанавливаемых фактов, лежащих в основании термодинамики.

Другое соотношение связано с антисимметрической работой $a_{i\kappa}$

Покажем, что если

$$a_{i\kappa} = T_\kappa S_i - T_i S_\kappa + R_\kappa - R_i$$

то

$$\forall i,\kappa,e,m,n \in \mathfrak{M} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{i\kappa} & a_{ie} & a_{im} & a_{in} \\ -1 & -a_{i\kappa} & 0 & a_{\kappa e} & a_{\kappa m} & a_{\kappa n} \\ -1 & -a_{ie} & -a_{\kappa e} & 0 & a_{em} & a_{en} \\ -1 & -a_{im} & -a_{\kappa m} & -a_{em} & 0 & a_{mn} \\ -1 & -a_{in} & -a_{\kappa n} & -a_{en} & -a_{mn} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9)$$

В самом деле, рассматривая произведение двух определителей, тождественно равных нулю, имеем

$$\begin{vmatrix} T_i & S_i & R_i & 1 & 1 \\ T_\kappa & S_\kappa & R_\kappa & 1 & 1 \\ T_e & S_e & R_e & 1 & 1 \\ T_m & S_m & R_m & 1 & 1 \\ T_n & S_n & R_n & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -S_i & -S_\kappa & -S_e & -S_m & -S_n \\ T_i & T_\kappa & T_e & T_m & T_n \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ R_i & R_\kappa & R_e & R_m & R_n \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{ik}+1 & a_{ie}+1 & a_{im}+1 & a_{in}+1 \\ -a_{ik}+1 & 1 & a_{ke}+1 & a_{km}+1 & a_{kn}+1 \\ -a_{ie}+1 & -a_{ke}+1 & 1 & a_{em}+1 & a_{en}+1 \\ -a_{im}+1 & -a_{km}+1 & -a_{em}+1 & 1 & a_{mn}+1 \\ -a_{in}+1 & -a_{kn}+1 & -a_{en}+1 & -a_{mn}+1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a_{ik} & a_{ie} & a_{im} & a_{in} \\ -1 & -a_{ik} & 0 & a_{ke} & a_{km} & a_{kn} \\ -1 & -a_{ie} & -a_{ke} & 0 & a_{em} & a_{en} \\ -1 & -a_{im} & -a_{km} & -a_{em} & 0 & a_{mn} \\ -1 & -a_{in} & -a_{kn} & -a_{en} & -a_{mn} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

Но так как всякий антисимметрический определитель нечетного порядка тождественно равен нулю, то легко видеть, что из (10) следует (9).

Итак, мы показали, что если принять в качестве исходного основное уравнение термодинамики (I), то можно получить как следствие два феноменологически инвариантных соотношения (8) и (9). Заметим, что эти соотношения представляют собой конечную форму (по-видимому до сих пор незамеченную) основного уравнения термодинамики.

Оба соотношения (8) и (9) можно рассматривать как опытный факт, лежащий в основании термодинамики.

Таким образом, основное содержание термодинамики можно сформулировать следующим образом: множество термодинамических состояний $\mathcal{M}$ обладает двумя типами феноменологической симметрии – симметрией ранга 4 с симметрической метрикой и симметрией ранга 5 с антисимметрической метрикой.

§9 ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА.

> Счастливый Ньютон, счастливое детство науки! Природа для него была открытой книгой, которую он читал без усилий. Концепции, которыми он пользовался для упорядочения данных опыта, кажутся вытекающими спонтанно из самого опыта, из замечательных экспериментов, заботливо описываемых им со множеством деталей и расставленных по порядку, подобно игрушкам.
>
> Альберт Эйнштейн.

Рассмотрим множество различных материальных тел $i, \kappa, \ldots, l, \ldots$

Возьмём два тела i и κ, поместим между ними сжатую пружину и измерим скорости v_i и v_κ, которые приобретут оба тела после разлета. Чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что скорость i-го тела v_i зависит от тела κ, будем обозначать эту скорость через $v_{i,\kappa}$.

Если каждой паре тел i и κ сопоставить величину

$$\xi_{i\kappa} = \frac{v_{i,\kappa}}{v_{\kappa,i}} \tag{5.1}$$

то нетрудно показать, что для любых тел i, κ, ρ, η имеет место следующее функциональное соотношение

$$\varphi(\xi_{i\rho}, \xi_{i\eta}, \xi_{\kappa\rho}, \xi_{\kappa\eta}) = \begin{vmatrix} \xi_{i\rho} & \xi_{i\eta} \\ \xi_{\kappa\rho} & \xi_{\kappa\eta} \end{vmatrix} = 0 \tag{5.2}$$

В самом деле, из закона сохранения импульса следует

$$\frac{v_{i,\rho}}{v_{\rho,i}} = \frac{m_\rho}{m_i}. \tag{5.3}$$

Но так как

$$\frac{m_p}{m_i}\cdot\frac{m_n}{m_k}-\frac{m_p}{m_k}\cdot\frac{m_n}{m_i}=0$$

то

$$\forall\, i,k;\ p,n\in\mathfrak{M}\qquad\begin{vmatrix}\xi_{ip} & \xi_{in}\\ \xi_{kp} & \xi_{kn}\end{vmatrix}=0 \tag{5.2}$$

Если в соотношении (5.2) положить $p=i$, то будем иметь

$$\xi_{kn}=\xi_{ki}\,\xi_{in}$$

Замечая, что

$$\xi_{kn}=\frac{1}{\xi_{nk}}$$

получим новое соотношение

$$\xi_{in}\,\xi_{nk}\,\xi_{ki}-1=0 \tag{5.3}$$

или

$$\xi_{in}\,\xi_{nk}\,\xi_{ki}=1. \tag{5.4}$$

Соотношения (5.2) и (5.3) равносильны, так как нетрудно показать, как обратно из (5.3) следует (5.2).

Если вместо ξ_{ik} ввести новую величину

$$\lambda_{ik}=\ln\xi_{ik}=\ln v_{i,k}-\ln v_{k,i} \tag{5.5}$$

то равенство (5.2) перепишется в виде

$$\lambda_{in}+\lambda_{nk}+\lambda_{ki}=0 \tag{5.6}$$

Умножая обе части равенства (5.6) на

$$-(\lambda_{in}+\lambda_{nk}-\lambda_{ki})(\lambda_{in}+\lambda_{ki}-\lambda_{nk})(-\lambda_{in}+\lambda_{nk}+\lambda_{ki})$$

запишем левую часть соотношения (5.6) в виде определителя Кейли-Менгера:

$$-(\lambda_{in}+\lambda_{nk}+\lambda_{ki})(\lambda_{in}+\lambda_{nk}-\lambda_{ki})(\lambda_{in}-\lambda_{nk}+\lambda_{ki})(-\lambda_{in}+\lambda_{nk}+\lambda_{ki})=$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda_{in}^2 & \lambda_{ik}^2 \\ 1 & \lambda_{in}^2 & 0 & \lambda_{nk}^2 \\ 1 & \lambda_{ik}^2 & \lambda_{nk}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.7)$$

Итак, мы видим, что λ_{ik} обращая в нуль определитель Кейли-Менгера четвертого порядка, играет роль "расстояния" между телами i и k, которые, в свою очередь; можно трактовать как точки некоторого одномерного пространства.

§ 10 ЗАКОН ОМА.

> Так как в открытии тайн и исследовании скрытых причин вещей от точных опытов и доказанных положений получаются более прочные выводы, нежели от вероятных догадок и мнений рутинных философов, то для лучшего понимания неизвестной доселе славной субстанции, мы поставили себе задачей начать с обыкновенной каменной или железной материи, а также с тел, которые можно трогать руками и воспринимать чувствами, а затем уже идти далее через очевидные опыты и вперед проникнуть в сокровенную глубь земли.
>
> Вильям Гильберт (1600г.)

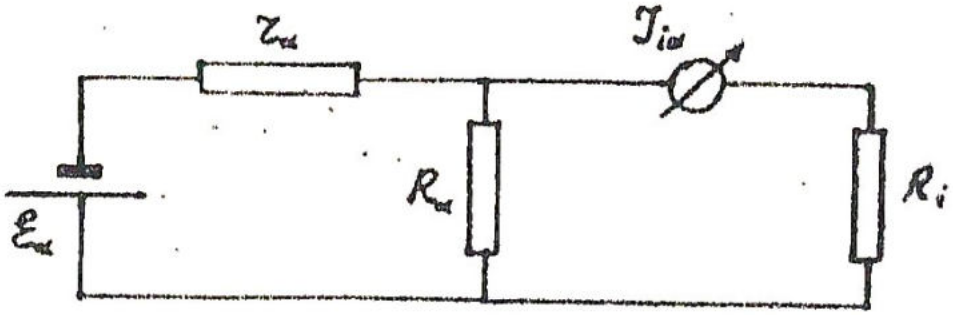
Рассмотрим два множества: $\mathfrak{N}$ – множество различных источников тока $\alpha, \beta, \ldots$ и $\mathfrak{M}$ – множество линейных проводников $i, \kappa, \ldots$. Пусть $J_{i\alpha}$ показания амперметра при подключении проводника i к источнику тока α.

Задача состоит в том, чтобы, используя законы постоянных токов показать, что между шестью показаниями $J_{i\alpha}$ относящимися к трем различным проводникам i, κ, ℓ и двум источникам тока α, β существует функциональная связь

$$\varphi(J_{i\alpha}, J_{\kappa\alpha}, J_{\ell\alpha}, J_{i\beta}, J_{\kappa\beta}, J_{\ell\beta}) = 0, \qquad (1)$$

инвариантная относительно выбора $\mathfrak{M}_3 = \{i, \kappa, \ell\}$ и $\mathfrak{N}_2 = \{\alpha, \beta\}$; при этом левая часть этого равенства имеет вид определителя третьего порядка, элементы которого $a_{i\alpha}$ обратно пропорциональны $J_{i\alpha}$.

Обозначим через $\mathcal{E}_\alpha$, r_α и R_i – эдс, внутреннее сопротивление и сопротивление нагрузки источника тока α, а через R_i – сопротивление проводника i (см.черт.I)



Черт.I

пользуя закон Ома для замкнутой цепи

$$\mathcal{E} = J(r + R) \qquad (2)$$

легко получим

$$J_{i\alpha} = \frac{\mathcal{E}_\alpha}{r_\alpha + \left(1 + \frac{r_\alpha}{R_\alpha}\right) R_i} \tag{3}$$

или

$$a_{i\alpha} = \xi_\alpha + \eta_\alpha R_i, \tag{4}$$

где

$$\xi_\alpha = \frac{r_\alpha}{\mathcal{E}_\alpha}, \quad \eta_\alpha = \frac{1 + \frac{r_\alpha}{R_\alpha}}{\mathcal{E}_\alpha}, \quad a_{i\alpha} = \frac{1}{J_{i\alpha}}$$

Переписывая равенство (4) для проводника k и того же самого источника α и вычитая его из (4) будем иметь:

$$\frac{1}{J_{i\alpha}} - \frac{1}{J_{k\alpha}} = \eta_\alpha (R_i - R_k) \tag{5}$$

и аналогично

$$\frac{1}{J_{i\beta}} - \frac{1}{J_{k\beta}} = \eta_\beta (R_i - R_k) \tag{6}$$

Разделив (5) на (6) получим

$$\frac{a_{i\alpha} - a_{k\alpha}}{a_{i\beta} - a_{k\beta}} = \frac{\eta_\alpha}{\eta_\beta} = \frac{a_{i\alpha} - a_{e\alpha}}{a_{i\beta} - a_{e\beta}}. \tag{7}$$

Легко видеть, что соотношение (7) может быть переписано в виде:

$$\forall i, k, l \in \mathfrak{N}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{N} \quad \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & 1 \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & 1 \\ a_{e\alpha} & a_{e\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

Итак, феноменологически инвариантное соотношение (8) является единственным опытным фактом, лежащим в основании электродинамики постоянных токов, из которого следует, что каждый источник тока характеризуется двумя параметрами ($\mathcal{E}_{ik}$ и r_{ik}), а каждый проводник i - одним R_i.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР.

Знание принципов легко возмещает незнание некоторых фактов.

Гельвеций.

Характерная черта всех физических законов состоит в том, что различные физические объекты, принадлежащие к определенным классам, равноправны по отношению к рассматриваемому закону. Факт существования особого вида отношений - "отношений равноправия" - кажется нам имеющим существенное значение в качестве исходной физической идеи.

Прежде всего, придадим интуитивной идее "равноправия" строгую математическую формулировку. В этой статье мы дадим лишь частную формулировку принципа феноменологической симметрии, не претендуя на слишком большую общность (это будет сделано в следующих работах).

Рассмотрим два произвольных множества: множество $\mathfrak{M}$, элементы которого будем обозначать через $i_1, i_2,$ и т.д. и множество $\mathfrak{N}$ с элементами, обозначаемыми через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Мы будем говорить, что на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задана физическая структура ранга (m, n) (m и n - фиксированные, целые числа), если задана такая вещественная функция $U: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ и такая регулярная гиперповерхность Γ с уравнением $\varphi(u) = 0$ в арифметическом пространстве $R^{m \cdot n}$, что точка

$$u(i_1, i_2, \dots, i_m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \langle u_{i_1\alpha_1}, u_{i_1\alpha_2}, \dots, u_{i_1\alpha_n},$$

$$u_{i_2\alpha_1}, u_{i_2\alpha_2}, \dots, u_{i_2\alpha_n},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_{i_m\alpha_1}, u_{i_m\alpha_2}, \dots, u_{i_m\alpha_n}\rangle \in R^{m\cdot n}$$

лежит на этой поверхности Γ при любом выборе подмножеств

$$\mathfrak{M}_m = \{i_{z_1}, i_{z_2}, \dots, i_{z_m}\} \subset \mathfrak{M}$$

$$\mathfrak{N}_n = \{\alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}, \dots, \alpha_{s_n}\} \subset \mathfrak{N}.$$

При этом предполагается, что вещественная функция $\varphi: R^{m\cdot n} \to R$ достаточное число раз дифференцируема и имеет градиент, отличный от нуля в точках, где $\varphi(u) = 0$. Кроме того предполагается, что функция φ не может быть представлена в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных в указанном ниже смысле.

Если среди элементов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ выделить два элемента i и α и зафиксировать все остальные, то равенство $\varphi(u) = 0$ запишется в виде:

$$\varphi(u_{i\alpha}; u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in-1}; u_{1\alpha}, u_{2\alpha}, \dots, u_{m-1\alpha}; u_{11}, u_{12}, \dots, u_{m-1n-1}) = 0$$

Рассматривая $u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in-1}$ и $u_{1\alpha}, u_{2\alpha}, \dots, u_{m-1\alpha}$ как две группы параметров, мы требуем, чтобы они входили в φ существенным образом. (Это значит [I], что нельзя найти $n-2$ функций $A^1(u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in-1}), \dots, A^{n-2}(u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in-1})$ и $m-2$

функций $B^1(u_{1\alpha}, u_{2\alpha}, \dots, u_{m-1\alpha}), \dots, B^{m-2}(u_{1\alpha}, u_{2\alpha}, \dots, u_{m-1\alpha})$ таких, чтобы имело место хотя бы одно из двух тождеств:

$$\varphi(u_{i\alpha}; u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in-1}; u_{1\alpha}, u_{2\alpha}, \dots, u_{m-1\alpha}; u_{11}, u_{12}, \dots, u_{m-1n-1}) \equiv$$

$$\equiv F_1(u_{i\alpha}; A^1, A^2, \dots, A^{n-2}; u_{1\alpha}, u_{2\alpha}, \dots, u_{m-1\alpha}; u_{11}, u_{12}, \dots, u_{m-1n-1}) \equiv$$

$$\equiv F_2(u_{i\alpha}; u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in-1}; B^1, B^2, \dots, B^{m-2}; u_{11}, u_{12}, \dots, u_{m-1n-1}).)$$

Требование существования для любых $\mathfrak{M}_m \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_n \subset \mathfrak{N}$ соотношения

$$\varphi[u(i_{z_1}, i_{z_2}, \dots, i_{z_m}; \alpha_{s_1}, \alpha_{s_2}, \dots, \alpha_{s_n})] = 0 \qquad (I)$$

мы называем принципом феноменологической симметрии. Этот принцип наиболее естественным образом выражает факт равноправия всех элементов множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ по отношению к физическому закону, задаваемому соотношением (I).

Мы будем говорить также, что соотношение (I) задает физический закон ранга (m, n), реализуемый на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, в феноменологически инвариантном виде, то есть в виде, инваринтном относительно выбора конечных подмножеств $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$.

Физическая интерпретация $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и u очень проста: $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ представляют собой множества физических объектов различной природы (например, множества проводников и источников тока или множества тел и полей, сообщающих телам различные ускорения), а $u_{i\alpha}$ – результат эксперимента, характеризующий отношения, в которых находятся объекты $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$ (в наших примерах $u_{i\alpha}$ – показание амперметра при подключении проводника i

к источнику тока α , или $u_{i\alpha}$ есть непосредственно измеряемое ускорение тела i , помещенного в поле α).

Мы покажем далее, что при $m=n=2$ функции $u: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ и $\varphi: R^4 \to R$ существуют и определяются с точностью до произвольной функции одной переменной. Другими словами, требование одного только факта существования физического закона ранга (2,2) позволяет определить как допустимый набор экспериментальных данных $u_{i\alpha}$ (определенный с точностью до градуировки измерительного прибора), так и математическое выражение для самого физического закона.

Итак, рассмотрим здесь наиболее простую физическую структуру ранга (2,2). Уже на этом простейшем примере можно понять, каковы общие методы, применяемые при нахождении конкретных выражений для физических законов ранга (m,n). Кроме того, полученный здесь результат даёт нам возможность в следующих статьях, посвященных различным приложениям общей теории физических структур, проанализировать логический смысл, скрытый за традиционной формулировкой "простейших" законов классической физики, таких как второй закон Ньютона, закон Ома и т.п.

В соответствии с общей постановкой задачи, мы ищем такие две вещественные функции $u: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ и $\varphi: R^4 \to R$, чтобы четыре значения функции u : $u_{i\alpha}, u_{i\beta}, u_{k\alpha}, u_{k\beta}$ были связаны между собой соотношением:

$$\varphi(u_{i\alpha}, u_{i\beta}, u_{k\alpha}, u_{k\beta}) = 0 \qquad (2)$$

при любом выборе $i,k \in \mathfrak{M}$ и $\alpha,\beta \in \mathfrak{N}$.

От функции $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ мы потребуем лишь, чтобы она была трижды непрерывно дифференцируемой, и чтобы уравнение

$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ было разрешимо (в локальном смысле) относительно любой из переменных, что вытекает из требования $\operatorname{grad}\varphi \neq 0$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся описываемым ниже методом параметризации.

Прежде всего выделим два произвольных элемента $O \in \mathfrak{M}$ и $O \in \mathfrak{N}$ которые назовём "эталонами" в соответствующих множествах. Затем, разрешив (2) относительно $u_{i\alpha}$ и подставив вместо κ и β, соответственно O и O, получим:

$$u_{i\alpha} = f(u_{i0}, u_{0\alpha}, u_{00}) = \rho(x_i, \xi_\alpha), \qquad (3)$$

где $x_i = z(u_{i0})$ и $\xi_\alpha = s(u_{0\alpha})$ – числовые параметры, соответствующие элементам множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$; $z(x)$ и $s(x)$ – произвольные монотонные функции.

Итак, задача нахождения функции $u: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ свелась к задаче нахождения функции $\rho: R^2 \to R$, такой, что

$$\varphi(\rho(x,\xi), \rho(x,\eta), \rho(y,\xi), \rho(y,\eta)) \equiv 0. \qquad (4)$$

Подчеркнем, что равенство (4) является тождеством относительно переменных x, y, ξ, η, обозначающих, соответственно, x_i, x_j, ξ_α, ξ_β.

Дифференцируя тождество (4) по x, y, ξ, η, мы получим систему четырех однородных уравнений:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \rho(x,\xi)}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \rho(x,\eta)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial \rho(y,\xi)}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial \rho(y,\eta)}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \rho(x,\xi)}{\partial \xi}+\frac{\partial \phi}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial \rho(y,\xi)}{\partial \xi}=0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \rho(x,\eta)}{\partial \eta}+\frac{\partial \phi}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial \rho(y,\eta)}{\partial \eta}=0$$

относительно четырех неизвестных $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \phi}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \phi}{\partial x_3}$, $\frac{\partial \phi}{\partial x_4}$.

Чтобы эта система имела отличные от нуля решения, необходимо, чтобы

$$\begin{vmatrix} u(x,\xi) & u(x,\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u(y,\xi) & u(y,\eta) \\ v(x,\xi) & 0 & v(y,\xi) & 0 \\ 0 & v(x,\eta) & 0 & v(y,\eta) \end{vmatrix} \equiv 0, \qquad (5)$$

где

$$u(x,\xi)=\frac{\partial \rho(x,\xi)}{\partial x}, \qquad v(x,\xi)=\frac{\partial \rho(x,\xi)}{\partial \xi},$$

или

$$\begin{vmatrix} w(x,\xi) & w(x,\eta) \\ w(y,\xi) & w(y,\eta) \end{vmatrix} \equiv 0, \qquad (6)$$

где

$$W(x,\xi) = \frac{U(x,\xi)}{V(x,\xi)}.$$

ждество (6), как мы сейчас покажем, равносильно

$$W(x,\xi) = A(x)\,B(\xi), \tag{7}$$

где $A(x)$ и $B(\xi)$ – произвольные вещественные функции одного переменного.

В самом деле, из (6) имеем:

$$W(x,\xi) = \frac{W(x,\eta)\,W(y,\xi)}{W(y,\eta)} \tag{8}$$

Полагая в (8) $y=a$, $\eta=b$, где a и b – фиксированные числа, получим:

$$W(x,\xi) = \frac{1}{W(a,b)}\,W(x,b)\,W(a,\xi) = A(x)\,B(\xi)$$

Из определения

$$W(x,\xi) = \frac{\frac{\partial\rho(x,\xi)}{\partial x}}{\frac{\partial\rho(x,\xi)}{\partial\xi}}.$$

следует, что $\rho(x,\xi)$ удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{1}{A(x)}\cdot\frac{\partial\rho(x,\xi)}{\partial x} - B(\xi)\,\frac{\partial\rho(x,\xi)}{\partial\xi} = 0. \tag{9}$$

Оставляя в стороне случай, когда $A(x)$ или $B(\xi)$ обращаются в нуль, легко видеть, что общее решение уравнения (9) име-

ет вид:

$$\rho(x,\xi) = \chi(R(x)\cdot Y(\xi)),$$

где $\chi(t)$ – произвольная функция одной переменной,

$$R(x) = \exp\int A(x)dx, \qquad Y(\xi) = \exp\int \frac{d\xi}{B(\xi)}.$$

Так как $A(x)$ и $B(\xi)$ – произвольны, то

$$u_{i\alpha} = \rho(x_i,\xi_\alpha) = \chi(R(x_i)\cdot Y(\xi_\alpha)), \qquad (10)$$

где $\chi(t)$, $R(x)$, $Y(\xi)$ – произвольные функции.

Чтобы найти теперь вид функции $\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ перепишем (10) в виде:

$$\chi^{-1}(u_{i\alpha}) = R(x_i)\cdot Y(\xi_\alpha),$$

где χ^{-1} – функция, обратная χ.

Следовательно, можно положить, например,

$$\varphi(u_{i\alpha},u_{i\beta},u_{k\alpha},u_{k\beta}) = \begin{vmatrix} \chi^{-1}(u_{i\alpha}) & \chi^{-1}(u_{i\beta}) \\ \chi^{-1}(u_{k\alpha}) & \chi^{-1}(u_{k\beta}) \end{vmatrix}.$$

Итак, мы показали, что функции $u: M\times N \to R$ и $\varphi: R^4 \to R$ реализующие физическую структуру ранга (2,2) определены с точностью до произвольной функции одной переменной $\chi(t)$ и имеют вид:

$$u_{i\alpha} = \chi(z_i\zeta_\alpha), \qquad (11)$$

где z_i и ζ_α – произвольные параметры, сопоставляемые элементам множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \chi^{-1}(x_1)\chi^{-1}(x_4) - \chi^{-1}(x_2)\chi^{-1}(x_3). \quad (12)$$

(Заметим, что общее выражение для φ получается из этого с помощью произвольного преобразования $\psi(\varphi)$, где $\psi(0) = 0$).

Обозначая

$$\chi^{-1}(u_{i\alpha}) = a_{i\alpha}$$

перепишем окончательный результат в виде:

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix}$$

$$a_{i\alpha} = z_i \zeta_\alpha$$

В общем случае $m = n > 2$ можно высказать предположение, что функция $u: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R$ также определена с точностью до одной произвольной функции $\chi: R \to R$ и имеет вид:

$$\chi^{-1}(u_{i\alpha}) = a_{i\alpha} = z^1(i)\zeta_1(\alpha) + \ldots + z^{n-1}(i)\zeta_{n-1}(\alpha) \equiv z^\mu(i)\zeta_\mu(\alpha),$$

где $z^\mu(i)$, $\zeta_\mu(\alpha)$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n-1)$ – произвольные параметры, сопоставляемые элементам множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, тогда как $\varphi: R^{n^2} \to R$ с точностью до произвольного преобразования $\psi(\varphi)$, имеет вид

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, \ldots, a_{e\gamma}) = \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \ldots & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \ldots & a_{k\gamma} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{e\alpha} & a_{e\beta} & \ldots & a_{e\gamma} \end{vmatrix} = 0.$$

Легко убедиться непосредственной подстановкой, что приведенные функции $u_{i\alpha}$ и ϕ действительно удовлетворяют принципу феноменологической симметрии, однако единственность этого решения пока не доказана.

Особый интерес представляет случай вырождения, возникающий при совпадении множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Если потребовать дополнительно, чтобы $a_{ii} = a_{kk} = \ldots = a$ и $a_{ik} = a_{ki}$, то принципу феноменологической симметрии в этом случае удовлетворяют следующие функции ϕ и a_{ik}:

$$\phi(a_{ik}, a_{ie}, \ldots, a_{mp}; a) = \begin{vmatrix} a & a_{ik} & a_{ie} & \ldots & a_{ip} \\ a_{ki} & a & a_{ke} & \ldots & a_{kp} \\ a_{ei} & a_{ek} & a & \ldots & a_{ep} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{pi} & a_{pk} & a_{pe} & \ldots & a \end{vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

$$a_{ik} = z^{\mu}(i)\, z_{\mu}(k) \qquad (14)$$

где $$z_{\mu}(k) = g_{\mu\nu} z^{\nu}(k) \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

а $g_{\mu\nu}$ – произвольная, постоянная, симметричная $(n-1) \times (n-1)$ – матрица.

Легко показать, что соотношение (13) при $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ задает геометрию постоянной кривизны.

Таким образом, описанный выше формализм содержит в себе некоторый принцип, который может быть использован для новой точки зрения на геометрию постоянной кривизны.

ЛИТЕРАТУРА.

I . Л.П.Эйзенхарт, "Непрерывные группы преобразований", ИЛ, 1947.

О НАИБОЛЕЕ ОБЩЕЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ПРИНЦИПА ОБОБЩЕННОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ.

> Основой всей научной работы служит убеждение, что мир представляет собой упорядоченную и познаваемую сущность. Это убеждение зиждется на религиозном чувстве. Моё религиозное чувство – это почтительное восхищение тем порядком, который царит в небольшой части реальности, доступной нашему слабому разуму.
>
> Альберт Эйнштейн.

В нашей предыдущей работе [I] была сделана попытка сформулировать в виде одного общего принципа те специфические отношения, в которых находится большинство физических объектов. Этот принцип, названный нами принципом обобщенной инвариантности, был сформулирован в [I] для частного случая, когда множество $\mathcal{F}$ на котором определена экспериментально измеряемая числовая функция $U: \mathcal{F} \to R$, представляло собой прямое произведение $\mathcal{F} = \mathcal{M} \times \mathcal{B}$ двух множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{B}$, связанных с физическими объектами различной природы. Рассматриваемый случай является одним из простейших вариантов логической схемы, предназначенной для математической формулировки основной идеи теории физических структур – идеи "равноправия". На нём проще всего увидеть и понять характерные особенности излагаемого математического формализма. Однако, для того, чтобы описать с единой точки зрения все возможные физические теории феноменологического типа, необходимо рассмотреть исходный принцип обобщенной инвариантности в его наиболее общем виде.

В настоящей статье даётся наиболее общая формулировка исходного принципа, частным случаем которого является принцип обобщен-

ной инвариантности, описанный в работе [I].

Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, ..., $\mathfrak{L}$ - κ различных, вообще говоря, бесконечных множеств, каждое из которых связано с определенным классом физических объектов.

Зададим $h+1$ кортежей длины κ над множеством целых положительных чисел[1]:

$$\omega \underset{df}{=} \langle p, q, \ldots, z \rangle \tag{1}$$

$$\rho_j \underset{df}{=} \langle m_j, n_j, \ldots, l_j \rangle, \quad (j = 1, 2, \ldots, h) \tag{2}$$

где

$$m_j \geqslant p, \quad n_j \geqslant q, \quad \ldots, \quad l_j \geqslant z.$$

Мы будем называть кортежи ω и ρ_j, соответственно, кратностью и рангом элементарной физической структуры $\mathfrak{S}_{\omega, \rho_j, s}$, строгое определение которой как раз и является главной задачей настоящей статьи.

Обозначим через X множество всех кортежей

$$x \underset{df}{=} \langle i_1, i_2, \ldots, i_p; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q; \ldots; v_1, v_2, \ldots, v_l \rangle, \tag{3}$$

которые можно построить выбирая p произвольных элементов $i_1, i_2, \ldots, i_p$ из $\mathfrak{M}$, q элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ из $\mathfrak{N}$, ... l элементов $v_1, v_2, \ldots, v_l$ из $\mathfrak{L}$.

Выберем из множеств $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \ldots, \mathfrak{L}$ подмножества

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_{m_j}\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_j}\}, \ldots, \{v_1, v_2, \ldots, v_{l_j}\}$$

---

1 Символ $\underset{df}{=}$ означает "равно по определению" или "обозначим через".

и обозначим кортеж, построенный на выбранной совокупности элементов через

$$a_j \overset{\text{df}}{=} \langle i_1, i_2, \ldots, i_{m_j};\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_j};\ \ldots;\ v_1, v_2, \ldots, v_{\ell_j} \rangle \in A_j \qquad (4)$$

где

$$A_j \overset{\text{df}}{=} \underbrace{\mathfrak{M} \times \ldots \times \mathfrak{M}}_{m_j} \times \underbrace{\mathfrak{B} \times \ldots \times \mathfrak{B}}_{n_j} \times \ldots \times \underbrace{\mathfrak{L} \times \ldots \times \mathfrak{L}}_{\ell_j}. \qquad (5)$$

Из элементов, входящих в a_j построим кортеж длины $p+q+\ldots+z$:

$$x(a_j) \overset{\text{df}}{=} \langle i_{s_1}, \ldots, i_{s_p};\ \alpha_{t_1}, \ldots, \alpha_{t_q};\ \ldots;\ v_{u_1}, \ldots, v_{u_z} \rangle, \qquad (6)$$

где

$$\{ i_{s_1}, \ldots, i_{s_p} \} \subset \{ i_1, i_2, \ldots, i_{m_j} \},$$

$$\{ \alpha_{t_1}, \ldots, \alpha_{t_q} \} \subset \{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_j} \},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\{ v_{u_1}, \ldots, v_{u_z} \} \subset \{ v_1, v_2, \ldots, v_{\ell_j} \}.$$

Конечное множество всех кортежей $x_1(a_j), x_2(a_j), \ldots, x_{N_j}(a_j)$, которые можно построить выбирая из подмножеств $\{ i_1, i_2, \ldots, i_{m_j} \}$, $\{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_j} \}, \ldots, \{ v_1, v_2, \ldots, v_{\ell_j} \}$ различные кортежи $\langle i_{s_1}, \ldots, i_{s_p} \rangle$, $\langle \alpha_{t_1}, \ldots, \alpha_{t_q} \rangle, \ldots, \langle v_{u_1}, \ldots, v_{u_z} \rangle$ обозначим через

$$X_{a_j} \overset{\text{df}}{=} \{ x_1(a_j), x_2(a_j), \ldots, x_{N_j}(a_j) \}. \qquad (7)$$

Легко видеть, что число кортежей (6), содержащихся в (7), равно

$$N_j = \frac{m_j!}{(m_j - p)!} \cdot \frac{n_j!}{(n_j - q)!} \cdot \ldots \cdot \frac{\ell_j!}{(\ell_j - z)!}. \qquad (8)$$

$$N_j = \frac{m_j!}{(m_j-p)!} \cdot \frac{n_j!}{(n_j-q)!} \cdot \ldots \cdot \frac{l_j!}{(l_j-z)!}. \qquad (8)$$

Допустим теперь, что существует отображение μ, позволяющее сопоставить каждому $x \in X$ кортеж длины S над множеством действительных чисел:

$$U(x,\mu) \underset{Df}{=} \langle u_1(x,\mu), u_2(x,\mu), \ldots, u_S(x,\mu) \rangle. \qquad (9)$$

(фактически таким отображением μ являются S различных физических экспериментов, сопоставляющих $p+q+\ldots+z$ физическим объектам S действительных чисел $u_1, u_2, \ldots, u_S$).

Число S мы назовём порядком физической структуры $\mathfrak{S}_{\omega,\rho_j,S}$. Обозначим множество кортежей (9), соответствующих всем $x \in X$, через $U(X,\mu)$, а множество кортежей (9), соответствующих всем $x(a_j) \in X_{a_j}$, через $U(X_{a_j},\mu)$.

Определение 1. Мы будем говорить, что на K различных множествах $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \ldots, \mathfrak{L}$ задана элементарная физическая структура $\mathfrak{S}_{\omega,\rho_j,S}$ кратности ω, ранга ρ_j и порядка S, если существует такая аналитическая функция $\varphi^j(\xi_1, \ldots, \xi_{SN_j})$ от SN_j действительных переменных, не равная тождественно нулю и не представимая в виде суперпозиции аналитических функций меньшего числа переменных[2] и такое множество кортежей $U(X,\mu)$ не равных тож-

[2] Смысл, который в данном определении вкладывается в понятие функции, не представимой в виде суперпозиции аналитических функций меньшего числа переменных, требует некоторых дополнительных разъяснений, которые будут даны при рассмотрении конкретных физических структур.

дественно постоянной, что имеет место следующее утверждение:

$$\forall a_j \in A_j \quad \varphi^j[U(X_{a_j}, \mu)] = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) мы будем называть фундаментальным уравнением элементарной физической структуры $\mathfrak{S}_{\omega, \rho_j, s}$.

Определение 2. Мы будем говорить, что на k множествах $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \ldots, \mathfrak{L}$ задана физическая структура

$$\mathfrak{S}_{\omega, \rho_1, \ldots, \rho_k; s} \underset{df}{=} \mathfrak{S}_{\omega, \rho_1, s} \wedge \mathfrak{S}_{\omega, \rho_2, s} \wedge \ldots \wedge \mathfrak{S}_{\omega, \rho_k, s}, \tag{11}$$

равная конъюктивному произведению[3] элементарных структур $\mathfrak{S}_{\omega, \rho_j, s}$, если для одного и того же множества кортежей $U(X, \mu)$ существует h таких аналитических функций φ^j $(j = 1, 2, \ldots, h)$, что имеет место следующая система утверждений:

$$\forall a_j \in A_j \quad \varphi^j[U(X_{a_j}, \mu)] = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, h). \tag{12}$$

Иными словами, система (12) задает h различных физических законов феноменологического типа, реализуемых с помощью измерительной операции μ на множествах $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \ldots, \mathfrak{L}$; при этом каждый из законов определяется своей элементарной структурой $\mathfrak{S}_{\ldots, \rho_j, s}$ и имеет вид инвариантный относительно выбора $a_j \in A_j$.

Допуская некоторую вольность речи, назовём областью определения физической структуры $\mathfrak{S}_{\omega, \rho_1, \ldots, \rho_k, s}$ множество

$$\mathfrak{F} \underset{df}{=} \underbrace{\mathfrak{M} \times \ldots \times \mathfrak{M}}_{p} \times \underbrace{\mathfrak{N} \times \ldots \times \mathfrak{N}}_{q} \times \ldots \times \underbrace{\mathfrak{L} \times \ldots \times \mathfrak{L}}_{\ell} \tag{13}$$

Вольность состоит в том, что "аргументы" $x(a_j) \in X_{a_j}$ не являются таковыми в полном смысле слова, а представляют собой функции от "истинных" аргументов $\omega, \rho_1, \ldots, \rho_k; s$.

---

[3] Знак конъюнкции $\wedge$ соответствует логическому союзу "и".

Итак, формулируя наиболее фундаментальное и общее свойство физических объектов – их равноправие относительно того или иного физического закона, на языке инвариантных отношений между абстрактными множествами, мы приходим к следующей математической задаче:

При заданных $\omega, \rho_1, \ldots, \rho_k; S$ найти такое множество кортежей $U(X,\mu)$ и h таких аналитических функций $\varphi^j(\xi_1, \ldots, \xi_{SN_j})$ от SN_j переменных, чтобы компоненты всех кортежей, входящих в $U(X_{a_j},\mu) \subset U(X,\mu)$, обращали бы все h функций $\varphi^j[U(X_{a_j},\mu)]$ $(j=1,2,\ldots,h)$ в нуль при любом выборе a_j.

Факт существования целого класса M таких экспериментальных операций $\mu \in M$, которые реализуют на соответствующих физических объектах физическую структуру конечной кратности и конечного ранга и порядка, мы называем принципом обобщенной инвариантности.

ЛИТЕРАТУРА.

I. Ю.И.Кулаков, "Математическая формулировка теории физических структур", см. стр. 59 настоящего сборника.

О ФИЗИЧЕСКИХ ЗАКОНАХ, ЛЕЖАЩИХ В ОСНОВАНИИ МЕХАНИКИ.

По моему мнению, прежде всего нужно указать на то, что как раз введение в механику очень трудно излагать вдумчивым слушателям, не ощущая при этом необходимости то тут, то там приносить этим слушателям, не без некоторого смущения, извинения и не испытывая желания побыстрей перейти от введения к примерам, которые говорят сами за себя.

Генрих Герц.

§ I. Постановка задачи.

Принято считать, что второй закон Ньютона является первичным физическим законом, единственным доказательством которого является опыт.

В настоящей статье мы получим этот закон как далеко не тривиальное следствие из некоторого весьма общего принципа феноменологической симметрии, описанного в работе [I].

В применении к рассматриваемой задаче этот принцип состоит в следующем:

Рассмотрим два множества: $\mathfrak{M}$ - множество тел $i, \kappa, \ldots, \ell, \ldots$ и $\mathfrak{N}$ - множество акцелераторов[1] $\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \ldots$ и некоторую измерительную операцию μ, сопоставляющую каждому телу $i \in \mathfrak{M}$ и каждому акцелератору $\alpha \in \mathfrak{N}$ действительное число $a_{i\alpha}^{\mu}$. Мы

[1] В этой статье под акцелераторами (от лат. *acceleratio* - ускорение) мы будем понимать всевозможные механизмы и поля, сообщающие телам различное ускорение.

будем считать, что отношения между множеством тел $\mathfrak{M}$ и множеством акцелераторов $\mathfrak{N}$ обладают феноменологической симметрией и описываются физической структурой ранга (2.2). Это значит, что четыре числа $a^{r}_{i\alpha}$, $a^{r}_{i\beta}$, $a^{r}_{k\alpha}$, $a^{r}_{k\beta}$, относящиеся к любым двум ($m=2$) телам i и k и к любым двум ($n=2$) акцелераторам α и β оказываются функционально связанными между собой, т.е.

$$\forall i,k \in \mathfrak{M},\ \forall \alpha,\beta \in \mathfrak{N},\quad \varphi(a^{r}_{i\alpha}, a^{r}_{i\beta}, a^{r}_{k\alpha}, a^{r}_{k\beta}) = 0, \qquad (I)$$

где $\varphi(x,y,u,v)$ – некоторая дифференцируемая функция от четырёх аргументов,

$\forall$ – квантор общности; высказывание $\forall i \in \mathfrak{M}\ \mathcal{U}(i)$ означает: "для любого i взятого из множества $\mathfrak{M}$ высказывание $\mathcal{U}(i)$ истинно".

Равенство (I) является, по сути дела, символической записью бесконечной системы функциональных уравнений относительно одной неизвестной функции от четырех переменных $\varphi(x,y,u,v)$ и одной неизвестной бесконечной матрицы $A = \| a^{r}_{i\alpha} \|$, представляющей собой одну числовую функцию от двух нечисловых аргументов i и α.

Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти такую бесконечную матрицу $A = \| a^{r}_{i\alpha} \|$ и такую функцию $\varphi(x,y,u,v)$, что для любой двухмерной квадратной подматрицы, построенной на пересечении двух произвольных строк i и k и двух произвольных столбцов α и β, все её элементы, подставленные в φ обращали бы $\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta})$ в нуль. От функции $\varphi(x,y,u,v)$ мы требуем лишь чтобы она была дифференцируемой, и чтобы уравнение $\varphi(x,y,u,v)=0$ было бы разрешимо относительно любой переменной.

§ 2. Получение второго закона Ньютона в феноменологически инвариантном виде.

Как показано во второй статье сборника [I] метод решения системы функциональных уравнения (I) состоит в следующем:

Прежде всего, из всех элементов множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ выделим по одному элементу $O \in \mathfrak{M}$ и $\dot{O} \in \mathfrak{N}$, которые назовём "эталонами" в соответствующих множествах. Затем, разрешая уравнение

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0$$

относительно $a_{i\alpha}$ и подставляя вместо k и β соответственно O и O, получаем:

$$a_{i\alpha} = f(a_{i0}, a_{0\alpha}, a_{00}) = \rho(x_i, \xi_\alpha), \qquad (2)$$

где $x_i = a_{i0}$ и $\xi_\alpha = a_{0\alpha}$ – числовые параметры, характеризующие, соответственно, элементы множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Таким образом, задача нахождения матрицы $A = \| a_{i\alpha} \|$ или, что одно и то же, одной числовой функции $a_{i\alpha}$ от двух нечисловых аргументов i и α и одной функции от четырех переменных $\varphi(x, y, u, v)$, свелась к нахождению $\varphi(x, y, u, v)$ и одной числовой функции $\rho(x, \xi)$ от двух числовых переменных x и ξ таких, что

$$\varphi(\rho(x, \xi), \rho(x, \eta), \rho(y, \xi), \rho(y, \eta)) \equiv 0. \qquad (3)$$

Подчеркнем, что равенство (4) является тождеством относительно переменных x, y, ξ, η, обозначающих, соответственно, $x_i, x_k, \xi_\alpha, \xi_\beta$.

Дифференцируя тождество (3) по x, y, ξ, η мы получим систему четырех однородных уравнений относительно четырех неизвестных

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi}{\partial u},\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Чтобы эта система имела отличные от нуля решения, необходимо чтобы

$$\begin{vmatrix} u(x,\xi) & u(x,\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u(y,\xi) & u(y,\eta) \\ v(x,\xi) & 0 & v(y,\xi) & 0 \\ 0 & v(x,\eta) & 0 & v(y,\eta) \end{vmatrix} \equiv 0, \qquad (4)$$

где

$$u(x,\xi) = \frac{\partial\rho}{\partial x}(x,\xi), \qquad v(x,\xi) = \frac{\partial\rho}{\partial\xi}(x,\xi),$$

или

$$\begin{vmatrix} w(x,\xi) & -w(y,\xi) & 0 & 0 \\ w(x,\eta) & -w(y,\eta) & 0 & 0 \\ 0 & w(y,\xi) & 1 & 0 \\ 0 & w(y,\eta) & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} w(x,\xi) & w(y,\xi) \\ w(x,\eta) & w(y,\eta) \end{vmatrix} \equiv 0, \qquad (5)$$

где

$$w(x,\xi) = \frac{u(x,\xi)}{v(x,\xi)}.$$

Разрешая (5) относительно $w(x,\xi)$ имеем:

$$w(x,\xi) = \frac{w(x,\eta)\,w(y,\xi)}{w(y,\eta)} \qquad (6)$$

Полагая в (6) $y = c_1$ и $\eta = c_2$, получаем

$$w(x,\xi) = \frac{w(x,c_2)\,w(c_1,\xi)}{w(c_1,c_2)} = A(x)B(\xi),$$

где $A(x)$ и $B(\xi)$ – произвольные функции от одной переменной.

Итак, задача сводится к решению следующего уравнения в частных производных:

$$\frac{1}{A(x)} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}(x,\xi) - B(\xi) \frac{\partial \rho}{\partial \xi}(x,\xi) = 0. \qquad (7)$$

Легко видеть, что общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$\rho(x,\xi) = \chi[R(x) \cdot S(\xi)],$$

где $\chi(x)$ – произвольная функция от одной переменной, а

$$R(x) = \exp \int A(x)\,dx$$

и

$$S(\xi) = \exp \int \frac{d\xi}{B(\xi)}.$$

Но так как $A(x)$ и $B(\xi)$ произвольны, то в итоге имеем:

$$a_{i\alpha} = \rho(x_i, \xi_\alpha) = \chi[R(x_i) \cdot S(\xi_\alpha)], \qquad (8)$$

где $\chi(x)$, $R(x)$ и $S(x)$ – произвольные функции.

Чтобы найти вид функции $\varphi(x,y,u,v)$, перепишем (8) в виде:

$$\chi^{-1}(a_{i\alpha}) = R(x_i) \cdot S(\xi_\alpha),$$

откуда легко получаем, что

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = \begin{vmatrix} \chi^{-1}(a_{i\alpha}) & \chi^{-1}(a_{i\beta}) \\ \chi^{-1}(a_{k\alpha}) & \chi^{-1}(a_{k\beta}) \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

Итак, мы показали, что если множество тел $\mathfrak{M}$ и множество акцелераторов $\mathfrak{N}$ находятся в отношениях, обладающих феноменологической симметрией, и описываются физической структурой ранга (2.2), то результаты эксперимента μ, реализующего эту струк-

туру, должны быть связаны между собой соотношением

$$\begin{vmatrix} \varphi_n(a^n_{i\alpha}) & \varphi_n(a^n_{i\beta}) \\ \varphi_n(a^n_{k\alpha}) & \varphi_n(a^n_{k\beta}) \end{vmatrix} = 0, \qquad (10)$$

инвариантным относительно выбора подмножеств $\mathfrak{M}_2 = \{i,k\} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_2 = \{\alpha,\beta\} \subset \mathfrak{N}$, где $\varphi_n(x)$ - функция от одной переменной, вид которой зависит от выбора измерительной операции μ. Среди различных измерительных процедур μ, реализующих на множестве $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ физическую структуру ранга (2.2) всегда найдется такая избранная процедура θ, для которой $\varphi_\theta(x) = x$ и фундаментальное соотношение (10) принимает канонический вид:

$$\forall i,k \in \mathfrak{M},\ \forall \alpha,\beta \in \mathfrak{N} \qquad \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0. \qquad (11)$$

Ясно, что никакая математическая теория не в состоянии описать эту измерительную операцию θ и именно здесь должна проявиться интуиция физика, открывающего тот или иной физический закон. Так только благодаря физической интуиции Галилея и Ньютона мы сможем теперь сформулировать основной физический закон, лежащий в основании механики:

Операцией θ, реализующей на множестве тел и множестве акцелераторов физическую структуру ранга (2.2) является операция по измерению n-й компоненты абсолютного 4-ускорения [2]

$$w^n_{i,\alpha} = \left(\frac{du}{d\tau}\right)^n_{(i,\alpha)}, \qquad (n = 0,1,2,3)$$

---

[2] Определение и подробное обсуждение понятия абсолютного 4 - ускорения будет дано ниже в § 5.

приобретаемого телом i при действии на него акцелератора α.

Итак, второй закон Ньютона в его окончательной феноменологически инвариантной формулировке записывается в виде:

$$\forall i,\kappa \in \mathfrak{M},\quad \forall \alpha,\beta \in \mathfrak{B} \qquad \begin{vmatrix} w^n_{i\alpha} & w^n_{i\beta} \\ w^n_{\kappa\alpha} & w^n_{\kappa\beta} \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$
$$n = 0,1,2,3$$

§ 3. Мультипликативная форма записи второго закона Ньютона.

Переписывая соотношение (12) в виде

$$\frac{w^n_{i\alpha}}{w^n_{i\beta}} = \frac{w^n_{\kappa\alpha}}{w^n_{\kappa\beta}} = \dots = \frac{w^n_{e\alpha}}{w^n_{e\beta}} = \dots \qquad (13)$$

замечаем, что отношение n-ых компонент абсолютных 4-ускорений, связанных с одним и тем же телом i и двумя различными акцелераторами α и β зависит лишь от α,β и n и не зависит от выбора i, т.е.

$$\frac{w^n_{i\alpha}}{w^n_{i\beta}} = \zeta^n_{\alpha,\beta} = inv\,(\alpha,\beta;n). \qquad (14)$$

С другой стороны соотношению (12) можно придать новый вид, подобный (13):

$$\frac{w^n_{i\alpha}}{w^n_{\kappa\alpha}} = \frac{w^n_{i\beta}}{w^n_{\kappa\beta}} = \dots = \frac{w^n_{i\chi}}{w^n_{\kappa\chi}} = \dots, \qquad (15)$$

из которого следует, что отношение n-ых компонент абсолютных 4-ускорений, связанных с одним и тем же акцелератором α и двумя различными телами i и κ, представляет собой новый фено-

менологический инвариант, зависящий от i, κ и, вообще говоря, от n и не зависящий от выбора α , т.е.

$$\frac{w^n_{i\beta}}{w^n_{\kappa\beta}} = \varphi^n_{i,\kappa} = inv\,(i,\kappa;n). \qquad (16)$$

Итак, из соотношения (12) следует факт существования двух феноменологических инвариантов $\zeta^n_{\alpha,\beta}$ и $\varphi^n_{i,\kappa}$, характеризующих, соответственно, акцелераторы и тела.

Подставляя в (14) и (16) вместо β эталонный акцелератор 0 и вместо κ эталонное тело 0 , получим:

$$w^n_{i\alpha} = w^n_{i0}, \quad \zeta^n_{\alpha 0} = w^n_{00}\,\varphi^n_{i0}\,\zeta^n_{\alpha 0} \qquad (17)$$

Всё сказанное здесь до сих пор указывало на определенное равноправие между множеством тел $\mathfrak{M}$ и множеством акцелераторов $\mathfrak{N}$. Однако начиная с этого момента это равноправие неизбежно должно нарушиться. Так, если мы хотим, чтобы с одной стороны каждый из феноменологических инвариантов $\varphi^n_{i0} \equiv \varphi^n_i$ и $\zeta^n_{\alpha 0} \equiv \zeta_\alpha$ при переходе к новой системе координат преобразовывался по определенным простым законам, а с другой стороны, их произведение преобразовывалось бы как 4 - вектор, то мы должны принять следующую альтернативу:

либо φ_i - скаляр, а $w^n_{00}\,\zeta^n_\alpha$ - 4 - вектор, либо, наоборот, $w^n_{00}\,\varphi^n_i$ - 4 - вектор, а ζ_α - скаляр.

Как показывает опыт, в нашем Мире реализуется первая возможность и вместо одного очевидно равенства.

$$g_{mn}\,(w^m_{00}\,\varphi^m_i\,\zeta^m_\alpha)(w^n_{00}\,\varphi^n_i\,\zeta^n_\alpha) = inv\,(i,\alpha),$$

где g_{mn} - метрический тензор, - - - - - -
имеем два:

$$\varphi_i^n = \varphi_i^m = \varphi_i = inv(i)$$

и

$$g_{mn}\,(w_{00}^m \zeta_\alpha^m)\,(w_{00}^n \zeta_\alpha^n) = inv(\alpha).$$

Обозначая

$$\psi_\alpha^n = \frac{w_{00}^n}{w_{00}}\,\zeta_\alpha^n,$$

где

$$w_{00} = (g_{mn}\, w_{00}^m\, w_{00}^n)^{1/2},$$

перепишем равенство (I7) в виде

$$w_{i\alpha}^n = w_{00}\,\varphi_i\,\psi_\alpha^n \qquad (n = 0, 1, 2, 3). \qquad (18)$$

Итак, мы видим, что n -я компонента абсолютного 4-ускорения тела i при действии на него акцелератора α равна произведению двух феноменологических инвариантов, один из которых зависит лишь от тела i , а другой - только от акцелератора α .

Поскольку способ нахождения инвариантов φ_i и ψ_α^n указан:

$$\varphi_i = \frac{w_{i\beta}^n}{w_{0\beta}^n} \qquad (19)$$

и

$$\psi_\alpha = \frac{w_{00}^n}{w_{00}} \cdot \frac{w_{k\alpha}^n}{w_{k0}^n} = \frac{w_{0\alpha}^n}{w_{00}}, \qquad (20)$$

то равенство (I8), представляющее собой мультипликативную форму записи второго закона Ньютона, имеет смысл физического закона, и так же как и (I2), может быть подвергнуто опытной проверке.

Но заметим при этом, что в качестве характеристик тела i и акцелератора α можно было бы взять любые функции $u(\varphi_i)$ и

$v^n(\varphi_\alpha^m)$ (любая функция от инварианта есть инвариант) и поэтому, основываясь на одних и тех же опытных данных. $w_{i\alpha}^n$ закону (I8) можно придавать различную форму в зависимости от того, какие величины $u_i = u(\varphi_i)$ и $v_\alpha^n = v^n(\varphi_\alpha^m)$ примем мы в качестве характеристик тела i и акцелератора α .

§ 4. Что такое масса и сила? Традиционная формулировка второго закона Ньютона.

Итак, при формулировке второго закона Ньютона в виде (I8) встаёт вопрос о том, какие величины $u_i = u(\varphi_i)$ и $v_\alpha^n = v^n(\varphi_\alpha^m)$ следует считать наиболее подходящими характеристиками тела i и акцелератора α . Вопрос этот тесно связан с нахождением u_i и v_α^n , обладающих аддитивными свойствами, и непосредственно приводит к понятиям массы и силы.

Рассмотрим некоторую экспериментальную процедуру T_u , сопоставляющую по определенному правилу каждой паре тел i и k некоторое новое тело $i\,T_u\,k$. Эту процедуру мы будем называть композицией тел i и k . Заключается она в следующем: Берем два тела i и k и по общему правилу находим φ_i и φ_k . Затем задаем произвольную функцию $u(\varphi)$ и среди элементов множества $\mathfrak{M}$ ищем такое тело $i\,T_u\,k$, для которого $u(\varphi_{i\,T_u\,k})$ аддитивно выражается через $u(\varphi_i)$ и $u(\varphi_k)$:

$$u(\varphi_{i\,T_u\,k}) = u(\varphi_i) + u(\varphi_k) \qquad (2I)$$

Мы будем говорить при этом, что тело $i\,T_u\,k$ есть результат композиции тел i и k по правилу T_u , определяемому функцией u .

Таким образом, факт существования аддитивных инвариантов $\mathcal{U}(\varphi_i)$ заложен в самом определении операции композиции T_u и, вообще говоря, не выражает собой никакого физического закона. Однако, среди множества различных операций композиции особое место занимает одна операция T_1, определяемая функцией $\mathcal{U}(x) = \frac{1}{x}$ и допускающая простую и наглядную интерпретацию[3]. Оказывается, что при таком определении операции композиции T_1, тело $i\,T_1\,\kappa$, представляющее собой результат композиции тел i и κ, может быть получено из тел i и κ путём их механического соединения, т.е. $i\,T_1\,\kappa = i + \kappa$. В связи с тем, что тело $i+\kappa$ может быть определено независимым образом, связь

$$\frac{1}{\varphi_{i+\kappa}} = \frac{1}{\varphi_i} + \frac{1}{\varphi_\kappa} \qquad (22)$$

между феноменологическими инвариантами φ_i, φ_κ и $\varphi_{i+\kappa}$, в отличие от равенства (21) представляющего собой определение тела $i\,T_u\,\kappa$, является физическим законом, допускающим экспериментальную проверку.

Итак, величина, обратная φ_i обладает свойством аддитивности относительно единственной естественной операции композиции – механического соединения тел и называется массой тела i:

---

[3] К сожалению, мы не можем получить *a priori* из каких-либо общих соображений вид функции $\mathcal{U}(x) = \frac{1}{x}$, приводящей к операции композиции T_1, допускающей естественную интерпретацию. Любопытно отметить, что рассматривая с точки зрения теории физических структур отношения, существующие между множеством проводников $\mathfrak{M}$ и множеством источников тока $\mathfrak{B}$, можно совершенно аналогичным образом ввести операцию композиции двух проводников i и κ. Однако, в отличие от композиции тел, при композиции проводников существует две операции, определяемые функциями $\mathcal{U}_1(x) = x$ и $\mathcal{U}_2(x) = \frac{1}{x}$, допускающие простую интерпретацию в виде последовательного и параллельного соединения проводников. Это связано с тем, что проводник является двухполюсником, в то время как тело, с этой точки зрения, представляет собой монополь.

$$\frac{m_i}{m_0} = \frac{1}{\varphi_i} = \frac{W_{0\alpha}^{n}}{W_{i\alpha}^{n}}. \qquad (23)$$

Что же касается композиции акцелераторов α и β, то как показывает опыт, операция композиции $\perp$ определяемая функцией $V(x)=x$ допускает естественную интерпретацию. Оказывается, что акцелератор $\alpha \perp \beta$ может быть получен путём одновременного включения акцелераторов α и β, т.е. $\alpha \perp \beta = \alpha + \beta$. В связи с этим мы должны рассматривать соотношение

$$\Psi_{\alpha+\beta}^{n} = \Psi_{\alpha}^{n} + \Psi_{\beta}^{n} \qquad (n=0,1,2,3) \qquad (24)$$

как некоторый независимый физический закон, допускающий экспериментальную проверку.

Таким образом, величина Ψ_{α}^{n} обладает свойством аддитивности относительно единственной естественной операции композиции — одновременного включения акцелераторов и называется n-ой компонентой 4-силы акцелератора α :

$$\frac{F_{\alpha}^{n}}{F_0} = \Psi_{\alpha}^{n} = \frac{W_{00}^{n}}{W_{00}} \cdot \frac{W_{k\alpha}^{n}}{W_{k0}^{n}}, \qquad (n=0,1,2,3) \qquad (25)$$

где $$F_0 = (g_{mn} F_0^{m} F_0^{n})^{1/2}.$$

Подставляя $\varphi_i = \frac{m_0}{m_i}$ и $\Psi_{\alpha}^{n} = \frac{F_{\alpha}^{n}}{F_0}$ в равенство (I8), получим

$$W_{i\alpha}^{n} = W_{00} \frac{m_0}{F_0} \cdot \frac{F_{\alpha}^{n}}{m_i}. \qquad (n=0,1,2,3). \qquad (26)$$

Если массу m_0 эталонного тела 0 положить равной единице, а в качестве эталонного акцелератора 0 $(F_0=1)$ принять акцелератор, сообщающий эталонному телу 0 абсолютное ускорение

$W_{00} = 1$, то на основании (26) получаем окончательное выражение второго закона Ньютона в традиционной формулировке

$$m_i \left(\frac{du}{d\tau}\right)^n_{(i,\alpha)} = \mathcal{F}^n_\alpha, \qquad (n = 0,1,2,3). \qquad (27)$$

Полученная система уравнений (27) описывает наиболее общий случай движения релятивистской частицы в произвольном гравитационно-инерционном[4] поле при наличии сил $\mathcal{F}^n$ негравитационной (например, электромагнитной) природы.

Резюмируя сказанное, отметим, что традиционная форма системы уравнений Ньютона (27) с одной стороны выражает фундаментальный физический закон, состоящий в существовании связи между абсолютными 4-ускорениями (I2), а с другой стороны содержит в себе два, вообще говоря, произвольных определения. Принятые определения массы и 4-силы удобны, так как в наиболее простой аддитивной форме отражают факт существования двух дополнительных соотношений (22) и (24), имеющих смысл физических законов, связанных с композицией тел и акцелераторов.

§ 5. Абсолютное 4 - ускорение.

Абсолютное 4-ускорение $\left(\frac{du}{d\tau}\right)^n$, фигурирующее в системе уравнений (27), есть абсолютная производная от контравариантной 4-скорости $u^n = \frac{dx^n}{d\tau}$ по абсолютному времени τ , дифференциал ко-

[4] Мы будем называть метрический тензор g_{ik} потенциалом гравитационно-инерционного поля, если тензор кривизны

$$R^i_{\kappa,\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^i_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^i_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^i_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\kappa\nu} - \Gamma^i_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\kappa\mu}$$

отличен от нуля. Если же при $g_{00} \neq 1$ и $g_{0\alpha} \neq 0$ $R^i_{\kappa,\mu\nu} \equiv 0$ то в этом случае тензор g_{ik} мы будем называть потенциалом инерционного поля.

торого равен (с точностью до множителя $\frac{1}{c}$) интервалу ds :

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^n = \frac{du^n}{d\tau} + \Gamma^n_{me} u^m u^e, \qquad (28)$$

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{g_{me}\,dx^m dx^e},$$

Γ^n_{me} – четырехмерный символ Кристоффеля второго рода:

$$\Gamma^n_{me} = \frac{1}{2} g^{nk}\left(\frac{\partial g_{kt}}{\partial x^e} + \frac{\partial g_{ke}}{\partial x^t} - \frac{\partial g_{te}}{\partial x^k}\right).$$

(Здесь и в дальнейшем латинские индексы пробегают значения 0,1,2,3, а греческие – лишь 1,2,3).

Чтобы убедиться в том, что система уравнений (27) действительно содержит в себе как частные случаи все известные варианты уравнений движения материальной точки, перепишем абсолютное 4-ускорение $\left(\frac{du}{d\tau}\right)^n$ в трехмерном виде. Переход к трехмерным обозначениям лишает систему (27) её классической простоты, однако мы вынуждены пойти на это, если хотим иметь дело с наглядными, непосредственно измеряемыми на опыте, величинами.

Прежде всего введем, так называемое, естественное время t.

В интервале $ds^2 = g_{ik}\,dx^i dx^k$ всегда можно отделить временную часть от пространственной, записав его в виде:

$$ds^2 = g_{00}\,dx^0 dx^0 + 2g_{0\alpha}\,dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta =$$

$$= \frac{1}{g_{00}}\left(g_{00}\,dx^0 + g_{0\alpha}\,dx^\alpha\right)^2 - \left(\frac{g_{\alpha\sigma}\,g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta}\right)dx^\alpha dx^\beta =$$

$$= c^2 dt^2 - dl^2,$$

где

$$dt = \frac{1}{c\sqrt{g_{00}}}\left(g_{00}\,dx^0 + g_{0\alpha}\,dx^\alpha\right) = \frac{dx_0}{c\sqrt{g_{00}}}$$

$$dl^2 = a_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta$$

$a_{\alpha\beta}$ – трехмерный метрический тензор

$$a_{\alpha\beta} = \frac{g_{0\alpha}\,g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, естественное время t оказывается связанным с абсолютным временем τ и с мировыми временами $t_0 = \frac{x_0}{c}$ и $t^0 = \frac{x^0}{c}$ следующими соотношениями:

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}\,dl^2,$$

$$dt = \sqrt{g_{00}}\,dt^0 + \frac{1}{c\sqrt{g_{00}}}\,g_{0\alpha}\,dx^\alpha = \frac{dt_0}{\sqrt{g_{00}}}.$$

Вообще, в дальнейшем, при формулировке уравнений движения в трехмерном виде, нам часто придётся иметь дело не с четырехмерным метрическим тензором g_{ik}, а с трехмерным скаляром $h = g_{00}$, трехмерным вектором $g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}$ и трехмерными метрическими тензорами $a_{\alpha\beta}$ и $a^{\alpha\beta}$, связанными между собой равенствами

$$a^{\alpha\nu}\,a_{\beta\nu} = \delta^\alpha_\beta.$$

Соотношения, связывающие g_{ik} и g^{ik} с h, g_α, $a_{\alpha\beta}$ и $a^{\alpha\beta}$, имеют вид:

$$g_{00} = h, \qquad g^{00} = \frac{1}{h} - a^{\mu\nu}g_\mu g_\nu,$$

$$g_{0\alpha} = -g_\alpha h, \qquad g^{0\alpha} = -g^\alpha = -a^{\alpha\mu}g_\mu,$$

$$g_{\alpha\beta} = -a_{\alpha\beta} + g_\alpha g_\beta h; \qquad g^{\alpha\beta} = -a^{\alpha\beta}.$$

Выразим теперь контра- и ковариантные скорости $u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ и $u_i = g_{ik} u^k$ через естественные скорости $v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}$, h и g_α.

Замечая, что

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} a_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta}\, dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$$

где

$$v^2 = a_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta,$$

будем иметь:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{v^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{c}{\sqrt{h}} + g_\alpha v^\alpha \right).$$

Зная u^α и u^0 легко находим u_α и u_0 :

$$u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta + g_{\alpha 0} u^0 = - \frac{v_\alpha + g_\alpha c \sqrt{h}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$u_0 = g_{0\beta} u^\beta + g_{00} u^0 = \frac{c \sqrt{h}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Заметим, что квадрат четырехмерной скорости, как это и должно следовать из $ds^2 = dx_i dx^i$ равен постоянной величине c^2 :

$$u^2 = u_i u^i = g_{ik} u^i u^k = c^2.$$

Напишем теперь подобные выражения для компонент контравариантного четырехмерного ускорения $\left(\frac{du}{d\tau}\right)^i$. Абсолютная производная

от контравариантной скорости u^i по τ имеет вид:

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^n = \frac{du^n}{d\tau} + \Gamma^n_{oo} u^o u^o + 2\Gamma^n_{o\mu} u^o u^\mu + \Gamma^n_{\mu\nu} u^\mu u^\nu,$$

где $\frac{du^n}{d\tau} = \frac{d^2x^n}{d\tau^2}$ – обыкновенная (не абсолютная) производная от u^n по τ.

Прежде всего воспользуемся равенством:

$$\frac{du^n}{d\tau} = \left(\frac{\partial u^n}{\partial v^\beta}\cdot\frac{dv^\beta}{dt} + \frac{\partial u^n}{\partial x^\beta}\cdot v^\beta + \frac{\partial u^n}{\partial x^o}\cdot\frac{dx^o}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{d\tau}$$

и запишем $\frac{du^\alpha}{d\tau}$ в виде:

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{dv^\alpha}{dt} + \frac{v^\alpha}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}\left\{v_\mu\left(\frac{dv^\mu}{dt} + \gamma^\mu_{\nu\lambda} v^\nu v^\lambda\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} v^\mu \frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial x^o} v^\nu \left(\frac{c}{\sqrt{h}} + g_\lambda v^\lambda\right)\right\},$$

где $\gamma^\mu_{\nu\lambda}$ – трехмерный символ Кристоффеля:

$$\gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{a^{\mu\tau}}{2}\left(\frac{\partial a_{\tau\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial a_{\tau\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial a_{\nu\lambda}}{\partial x^\tau}\right).$$

Так как нужные нам компоненты Γ^i_{ke} имеют вид:

$$\Gamma^\alpha_{oo} = \frac{a^{\alpha\lambda}}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x^\lambda} + g_\lambda \frac{\partial h}{\partial x^o} + 2h\frac{\partial g_\lambda}{\partial x^o}\right),$$

$$\Gamma^\alpha_{o\mu} = \frac{a^{\alpha\lambda}}{2}\left\{h\left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_\mu}{\partial x^\lambda}\right) - g_\mu\frac{\partial h}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x^o} - \frac{\partial}{\partial x^o}(g_\lambda g_\mu h)\right\}$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \gamma^\alpha_{\mu\nu} + \frac{ha^{\alpha\lambda}}{2}\left\{g_\mu\left(\frac{\partial g_\nu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_\lambda}{\partial x^\nu}\right) + g_\nu\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_\lambda}{\partial x^\mu}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} g_\mu g_\nu a^{\alpha\lambda}\frac{\partial h}{\partial x^\lambda} - \frac{g^\alpha}{2}\left\{\frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial x^o} - \frac{\partial}{\partial x^o}(g_\mu g_\nu h)\right\},$$

то после несложных, но довольно громоздких, преобразований получаем следующее выражение для пространственных компонент 4-ускорения через трехмерные естественные скорости v^α и ускорения $\frac{dv^\alpha}{dt}$

h, g_α и $a_{\alpha\beta}$:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^\alpha = \frac{1}{1-\frac{1}{c^2}a_{\rho\sigma}v^\rho v^\sigma}\left\{\frac{dv^\alpha}{dt}+\gamma^\alpha_{\mu\nu}v^\mu v^\nu+\frac{c^2}{2h}\left(a^{\alpha\mu}\frac{\partial h}{\partial x^\mu}-\right.\right.$$

$$-g^\alpha\frac{\partial h}{\partial x^0}\Big)-c\sqrt{h}\,a^{\alpha\lambda}v^\mu\left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial g_\lambda}{\partial x^\mu}\right)+c^2a^{\alpha\lambda}\frac{\partial g_\lambda}{\partial x^0}-$$

$$-c\sqrt{h}\,a^{\alpha\lambda}v^\mu\left(g_\lambda\frac{\partial g_\mu}{\partial x^0}-g_\mu\frac{\partial g_\lambda}{\partial x^0}\right)-\frac{1}{2}g^\alpha v^\lambda\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x^0}v^\mu+ \quad (29)$$

$$+a^{\alpha\lambda}\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x^0}v^\mu\left(\frac{c}{\sqrt{h}}+g_\tau v^\tau\right)+\frac{v^\alpha}{c^2\left(1-\frac{1}{c^2}a_{\rho\sigma}v^\rho v^\sigma\right)^2}\times$$

$$\times\left\{a_{\mu\tau}v^\tau\left(\frac{dv^\mu}{dt}+\gamma^\mu_{\nu\lambda}v^\nu v^\lambda\right)+\frac{1}{2}\left(v^\lambda\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x^0}v^\mu\right)\left(\frac{c}{\sqrt{h}}+g_\tau v^\tau\right)\right\}.$$

Что же касается нулевой компоненты $\left(\frac{du}{dt}\right)^0$, то она может быть получена либо непосредственно (с помощью Γ^0_{ik}), либо из ортогональности 4-ускорения и 4-скорости. В самом деле, дифференцируя $u_i u^i = c^2$ по τ будем иметь:

$$u_i\frac{du^i}{dt}+\frac{du_i}{dt}u^i = u_i\left(\frac{du}{dt}\right)^i-u_i\Gamma^i_{\kappa\varepsilon}u^\kappa u^\varepsilon+\left(\frac{du}{dt}\right)_i u^i+$$

$$+\Gamma^m_{\kappa\varepsilon}u_m u^\kappa u^i = 2u_i\left(\frac{du}{dt}\right)^i = 0$$

откуда

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^0 = -\frac{u_\alpha}{u_0}\left(\frac{du}{dt}\right)^\alpha = \left(g_\alpha+\frac{v_\alpha}{c\sqrt{h}}\right)\left(\frac{du}{dt}\right)^\alpha. \quad (3$$

§ 6. 4-сила, 4-импульс и закон сохранения энергии.

Из равенства (30), переписанного в виде

$$\mathcal{F}^0 = \left(g_\alpha + \frac{v_\alpha}{c\sqrt{h}}\right)\mathcal{F}^\alpha$$

следует, что четыре компоненты силы $\mathcal{F}^i$ не являются независимыми и могут быть выражены через один произвольный трехмерный вектор f^α, называемый трехмерной силой:

$$\mathcal{F}^\alpha = \frac{f^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \mathcal{F}_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(f_\alpha + g_\alpha \frac{\sqrt{h}}{c} f_\rho v^\rho\right)$$

$$\mathcal{F}^0 = \frac{f^\rho}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(g_\rho + \frac{v_\rho}{c\sqrt{h}}\right); \qquad \mathcal{F}_0 = \frac{f_\rho v^\rho}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{\sqrt{h}}{c};$$

где $$f_\rho = a_{\rho\nu} f^\nu$$

Так как

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^\kappa = g^{\kappa e}\left(\frac{du}{d\tau}\right)_e,$$

где

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)_e = \frac{du_e}{d\tau} - \Gamma^m_{en} u_m u^n;$$

$$u_e = g_{em} u^m;$$

то вводя контра- и ковариантные 4-импульсы

$$p^i = m u^i \qquad \text{и} \qquad p_i = m u_i$$

можно придать системе уравнений (27) следующий вид:

$$\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^i = \mathcal{F}^i \qquad \text{или} \qquad \left(\frac{dp}{d\tau}\right)_i = \mathcal{F}_i. \tag{31}$$

Обозначим

$$cp^0 = E^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{h}} + \frac{1}{c} g_r v^r\right),$$

$$cp_0 = E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sqrt{h}.$$

Уравнения (31), соответствующие индексу $i = 0$, в новых обозначениях имеют вид[5]:

$$\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^0 = \frac{f_r}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{v^r}{\sqrt{h}} + cg^r\right), \tag{32}$$

$$\left(\frac{dE}{d\tau}\right)_0 = \frac{f_r v^r}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sqrt{h}, \tag{33}$$

и могут быть истолкованы как две различные формы записи закона сохранения энергии. Уравнение (33) принимает особенно наглядный вид, если перейти от абсолютного времени τ к мировому t_0.

---

[5] Заметим, что абсолютные производные от E^0 и E_0 по τ равны

$$\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^0 = c\left(\frac{dp}{d\tau}\right)^0 = c\left(\frac{dp^0}{d\tau} + \Gamma^0_{00} p^0 u^0 + \Gamma^0_{0\mu} p^0 u^\mu + \Gamma^0_{\mu 0} p^\mu u^0 + \Gamma^0_{\mu\nu} p^\mu u^\nu\right) = \frac{dE^0}{d\tau} + \Gamma^0_{00} E^0 u^0 + 2\Gamma^0_{0\mu} E^0 u^\mu + mc^2 \Gamma^0_{\mu\nu} u^\mu u^\nu,$$

$$\left(\frac{dE}{d\tau}\right)_0 = \frac{dE_0}{d\tau} - \Gamma^0_{00} E^0 u^0 - 2\Gamma^0_{0\mu} E_0 u^\mu - mc\,\Gamma^\mu_{0\nu} u_\mu u^\nu.$$

В этом случае

$$\left(\frac{dE}{dt_0}\right)_0 = f_n v^n,$$

то есть абсолютная производная от энергии E_0 по мировому времени $t_0 = \frac{x_0}{c}$ равна мощности трехмерной силы $\vec{f}$.

§ 7. Уравнения движения материальной точки в некоторых частных случаях.

Используя выражение (28) для абсолютного ускорения, нетрудно переписать систему уравнений (27) в Лагранжевом виде. Имеем:

$$m\left(\frac{du}{d\tau}\right)^n = m\left(\frac{du^n}{d\tau} + \Gamma^n_{mk} u^m u^k\right) =$$

$$= g^{np}\left\{\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial T}{\partial u^p}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^p}\right\} = \mathcal{F}^n, \qquad (34)$$

где $$T = \frac{1}{2} g_{mk} u^m u^k.$$

Если сила $\mathcal{F}_i$ имеет вид

$$\mathcal{F}_i = \frac{e}{c} \mathcal{F}_{ik} u^k$$

где

$$\mathcal{F}_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

то

$$\mathcal{F}_i = \frac{e}{c}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}(A_k u^k) - \frac{d}{d\tau}\cdot\frac{\partial}{\partial u^i}(A_k u^k)\right\}$$

и уравнение (34) перепишется в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial u^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \tag{35}$$

где L – релятивистская функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} g_{mk} u^m u^k + \frac{e}{c} A_m u^m. \tag{36}$$

Воспользовавшись выражением (29) запишем систему уравнений (27) в виде, соответствующем различным частным случаям.

Так, например, полагая инерциально-гравитационное поле постоянным, то есть h, $\vec{g}$ и $a_{\mu\nu}$ не зависящими от $x^0 = ct^0$ получаем известное уравнение движения (см. например [2])

$$m\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^\alpha = f^\alpha - \frac{mc^2}{2h\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\mathrm{grad}\, h)^\alpha + \frac{mc\sqrt{h}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}[\vec{v}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{g}]^\alpha, \tag{37}$$

где $\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^\alpha$ – абсолютная производная по естественному времени t от трехмерного вектора $\frac{v^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$:

$$\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^\alpha = \frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)^\alpha}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{v^\alpha a_{\mu\nu} v^\mu \left(\frac{dv}{dt}\right)^\nu}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\frac{dv^\alpha}{dt} + \gamma^\alpha_{\lambda\tau} v^\lambda v^\tau}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{v^\alpha a_{\mu\nu} v^\mu \left(\frac{dv^\nu}{dt} + \gamma^\nu_{\lambda\tau} v^\lambda v^\tau\right)}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

$$[\vec{v}\,\mathrm{rot}\,\vec{g}]^\alpha = a^{\alpha\lambda} v^\mu \left(\frac{\partial g_\mu}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_\lambda}{\partial x^\mu}\right),$$

$$(grad\, h)^{\alpha} = a^{\alpha\lambda}\frac{\partial h}{\partial x^{\lambda}},$$

$$f^{\alpha} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} F^{\alpha}.$$

В отсутствие инерционно-гравитационного поля ($h = 1$, $\vec{g} = 0$) уравнение движения релятивистской частицы в криволинейных координатах принимает вид:

$$m\left\{\frac{dv^{\alpha}}{dt} + \gamma^{\alpha}_{\lambda\tau}v^{\lambda}v^{\tau} + \frac{v^{\alpha}a_{\mu\nu}v^{\mu}\left(\frac{dv^{\nu}}{dt} + \gamma^{\nu}_{\lambda\tau}v^{\lambda}v^{\tau}\right)}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right\} = f^{\alpha} \quad (38)$$

В декартовых координатах $\gamma^{\alpha}_{\lambda\tau} = 0$ и уравнение движения записывается в виде:

$$m\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}\left(\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt}\right)}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right\} = \vec{f} \quad (39)$$

В нерелятивистском приближении $\left(\frac{v^{\alpha}}{c} \ll 1\right)$ уравнения (38) и (39) переходят, соответственно, в

$$m\left(\frac{dv^{\alpha}}{dt} + \gamma^{\alpha}_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu}\right) = f^{\alpha} \quad (40)$$

и

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}. \quad (41)$$

Что же касается различных частных случаев уравнений движения материальной точки в неинерциальной системе отсчёта, то они рассмотрены нами в отдельной статье [3].

§ 8. Некоторые критические замечания по поводу "силы тяготения" и "релятивистской массы".

Итак, мы показали, что различные частные формулировки уравнений движения являются следствием исходной, наиболее общей системы уравнений (27), смысл которой классически прост – произведение массы m материальной точки на абсолютное ускорение $\left(\frac{du}{d\tau}\right)^n$ равно силе F^n.

Следует отметить, что в уравнении (27) осуществлено полное отделение динамических понятий – массы m и силы F^n от типичного понятия римановой геометрии и релятивистской кинематики – абсолютного ускорения $\left(\frac{du}{d\tau}\right)^n$, равного абсолютной производной 4-скорости u^n по абсолютному времени τ.

Что же касается "гравитационных сил" и "сил инерции", то их, строго говоря, просто не существует – этими терминами называют слагаемые вида $-m\Gamma^n_{mk}u^m u^k$, входящие в состав абсолютной производной $m\left(\frac{du}{d\tau}\right)^n$ и не имеющие самостоятельного значения [6].

Точно так же лишена глубокого физического смысла "релятивистская масса"

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

---

[6] Заметим, что слагаемые $\frac{du^n}{d\tau}$ и $\Gamma^n_{mk}u^m u^k$ взятые порознь не обладают простым законом преобразования и поэтому не могут играть самостоятельной роли в физике. Правая часть уравнения

$$m\frac{du^n}{d\tau} = F^n - m\Gamma^n_{pk}u^p u^k,$$

полученного из (27) путём механического разделения абсолютной производной $\left(\frac{du}{d\tau}\right)^n$ на две части, представляет собой сумму двух слагаемых, обладающих различными законами преобразования и потому является противоестественной.

возникающая при трактовке трехмерных компонент четырехмерного импульса

$$p^\alpha = mu^\alpha = m\frac{v^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (42)$$

как произведения "релятивистской массы" $\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ на трехмерную скорость v^α. Множитель $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ в формуле (42) органически связан с кинематикой и никакого отношения к динамике, а следовательно и к массе, не имеет.

Итак, если считать метрику четырехмерного пространства – – времени известной, то измеряя естественные скорость v^α и ускорение $\frac{dv^\alpha}{dt}$ мы всегда сможем найти (например, по формуле (29) абсолютное ускорение $\left(\frac{du}{ds}\right)^n$, которое является абсолютной характеристикой движения (при отсутствии сил абсолютное ускорение равно нулю в любой системе отсчёта). При этом важно отметить; что произведение массы на абсолютное ускорение равно силе в любой системе отсчёта, а не только в "инерциальной" как было бы, если в качестве характеристики движения взять естественное ускорение $\frac{dv^\alpha}{dt}$. Таким образом, введение абсолютного ускорения как абсолютной производной от контравариантной скорости u^i позволяет записывать систему уравнений движения (27) в виде, не зависящем от выбора системы отсчёта и делает излишним рассмотрение избранных инерциальных систем.

ЛИТЕРАТУРА.

I. Ю.И.Кулаков "К теории физических структур", НГУ, 1968.

2. Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц,"Теория поля", стр.324–325, М.,"Наука", 1967.

3. Ю.И.Кулаков "Релятивистские уравнения движения материальной точки в неинерциальной системе отсчёта", (см.стр. 100 настоящего сборника).

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЁТА.

Здесь удобно заметить, что инерциальная система является слабым местом механики Галилея-Ньютона, ибо физическому пространству приписывалось некоторое таинственное свойство, обуславливающее вид системы координат, для которой справедливы закон инерции и ньтоновский закон движения.

Альберт Эйнштейн.

Инерциальной системой отсчёта $\bar{\mathcal{C}}$ мы будем называть такую систему, в котор й метрический тензор $\bar{g}_{ik}$ имеет вид:

$$\bar{g}_{00} = 1, \qquad \bar{g}_{0\mu} = 0, \qquad \bar{g}_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$$

(Здесь и в дальнейшем латинские индексы пробегают значения 0,1,2,3, а греческие - лишь 1,2,3).

Так как

$$\bar{g}^{ik}\bar{g}_{ke} = \delta^i_e = \begin{cases} 1 & i = l \\ 0 & i \neq l, \end{cases}$$

то в инерциальной системе отсчёта $\bar{\mathcal{C}}$ все компоненты контравариантного метрического тензора $\bar{g}^{ik}$ совпадают с компонентами $\bar{g}_{ik}$, т.е.

$$\bar{g}^{00} = 1, \qquad \bar{g}^{0\mu} = 0, \qquad \bar{g}^{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Неинерциальной системой $\mathfrak{S}$, совершающей относительно исходной инерциальной системы $\bar{\mathfrak{S}}$ как поступательное, так и вращательное движение, мы будем называть такую систему отсчёта, в которой четыре координаты x^i производного события связаны с координатами $\bar{x}^i$ того же события в инерциальной системе следующим образом:

$$\bar{x}^i = A^i_{.k}\, x^k, \tag{I}$$

где $A^i_{.k} = A^i_{.k}\left(\frac{x^0}{c}\right)$ – система шестнадцати функций от мирового времени $t = \frac{x^0}{c}$, удовлетворяющих следующим десяти соотношениям [1]:

$$\bar{g}_{ik}\, A^i_{.m}\, A^k_{.n} = \bar{g}_{mn}, \tag{2}$$

(или им равносильным равенствам:

$$A^i_{.m}\, A^k_{.n}\, \bar{g}^{mn} = \bar{g}^{ik}\,),$$

которые в трехмерных обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\mu\nu}\, A^\mu_{.\rho}\, A^\nu_{.\tau} + A^0_{.\rho}\, A^0_{.\tau} &= \bar{g}_{\rho\tau}, \\ \bar{g}_{\mu\nu}\, A^\mu_{.\rho}\, A^\nu_{.0} + A^0_{.\rho}\, A^0_{.0} &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

---

[1] Если отвлечься от зависимости $A^i_{.k}$ от t, то преобразование (I), удовлетворяющее условию (2), представляет собой общее преобразование Лоренца, сохраняющего неизменным двухточечный инвариант:

$$\bar{g}_{ik}\left(\bar{x}^i(1) - \bar{x}^i(2)\right)\left(\bar{x}^k(1) - \bar{x}^k(2)\right) = \bar{g}_{mn}\left(x^m(1) - x^m(2)\right)\left(x^n(1) - x^n(2)\right).$$

$$\bar{g}_{\mu\nu} A^{\mu}_{\cdot 0} A^{\nu}_{\cdot 0} + A^{0}_{\cdot 0} A^{0}_{\cdot 0} = 1.$$

Матрица $A^{i}_{\cdot k}$, удовлетворяющая условиям (3), может быть выражена через три параметра $\frac{1}{c} a^{\alpha}(t)$, произвольным образом зависящих от t, и систему девяти функций $\alpha^{\mu}_{\cdot \nu}(t)$, образующих матрицу ортогонального преобразования и потому связанных между собой следующими шестью соотношениями:

$$\bar{g}_{\mu\nu} \alpha^{\mu}_{\cdot \rho} \alpha^{\nu}_{\cdot \sigma} = \bar{g}_{\rho\sigma} \qquad (4)$$

(или им равносильными:

$$\alpha^{\mu}_{\cdot \rho} \alpha^{\nu}_{\cdot \sigma} \bar{g}^{\rho\sigma} = \bar{g}^{\mu\nu}).$$

Наиболее общее движение неинерциальной системы отсчёта $\mathfrak{S}$ относительно инерциальной системы $\bar{\mathfrak{S}}$ может быть осуществлено двумя способами:

I. Неинерциальная система $\mathfrak{S}$ вращается относительно промежуточной системы $\mathfrak{S}'$, находящейся в поступательном движении относительно $\bar{\mathfrak{S}}$.

2. Система $\mathfrak{S}$ движется поступательно относительно промежуточной системы $\mathfrak{S}''$, вращающейся относительно $\bar{\mathfrak{S}}$.

В соответствии с этим зависимость $A^{i}_{\cdot k}$ от параметров $\frac{1}{c} a^{\alpha}$ и $\alpha^{\mu}_{\cdot \nu}$, характеризующих, соответственно, поступательное и вращательное движение неинерциальной системы отсчёта, имеет различный вид в первом и во втором случае. Как легко убедиться непосредственной подстановкой, следующие две зависимости $A^{i}_{\cdot k}$ от $\frac{1}{c} a^{\alpha}$ и $\alpha^{\mu}_{\cdot \nu}$, соответствующие первому и второму случаю, действительно удовлетворяют соотношениям (3):

$$A^{0}_{\cdot 0}(1) = \frac{1}{\gamma_1} - 1,$$

$$A^0_{\cdot\mu}(1) = -\frac{1}{c}\,\alpha^{\lambda}_{\cdot\mu}\,\bar{g}_{\lambda\tau}\,a_1^{\tau},$$

$$A^{\nu}_{\cdot 0}(1) = \frac{1}{c}\,a_1^{\nu}, \qquad (5)$$

$$A^{\nu}_{\cdot\nu}(1) = \alpha^{\nu}_{\cdot\nu} - \frac{\gamma_1}{c^2}\,a_1^{\nu}\,\bar{g}_{\lambda\tau}\,a_1^{\lambda}\,\alpha^{\tau}_{\cdot\nu},$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{c^2}\,\bar{g}_{\rho\sigma}\,a_1^{\rho}\,a_1^{\sigma}\right)^{1/2} + 1},$$

и

$$A^0_{\cdot 0}(2) = \frac{1}{\gamma_2} - 1,$$

$$A^0_{\cdot\mu}(2) = -\frac{1}{c}\,\bar{g}_{\nu\rho}\,a_2^{\rho},$$

$$A^{\nu}_{\cdot 0}(2) = \frac{1}{c}\,\alpha^{\nu}_{\cdot\rho}\,a_2^{\rho}, \qquad (6)$$

$$A^{\nu}_{\cdot\nu}(2) = \alpha^{\nu}_{\cdot\nu} - \frac{\gamma_2}{c^2}\,\alpha^{\nu}_{\cdot\rho}\,a_2^{\rho}\,a_2^{\sigma}\,\bar{g}_{\sigma\nu},$$

где

$$\gamma_2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{c^2}\,\bar{g}_{\rho\sigma}\,a_2^{\rho}\,a_2^{\sigma}\right)^{1/2} + 1}.$$

Заметим, что при $\alpha^{\nu}_{\cdot\nu} = \delta^{\nu}_{\nu}$ элементы матрицы $A^{i}_{\cdot k}$ равны:

$$A^0_{\cdot 0} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}},$$

$$A^0_{\cdot\mu} = -\frac{1}{c}\,\bar{g}_{\mu\tau}\,a^{\tau},$$

$$A^{\mu}_{\cdot 0} = \frac{1}{c} a^{\mu}$$

$$A^{\mu}_{\cdot \nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{a^2} a^{\mu} \bar{g}_{\nu\lambda} a^{\lambda} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}} - 1 \right).$$

Преобразование (I) в этом случае имеет вид:

$$\bar{x}^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{a^2} a^{\mu} (\vec{a}\vec{r}) \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}} - 1 \right) + a^{\mu} t,$$

$$\bar{t} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}}\, t + \frac{1}{c^2} (\vec{a}\vec{r}), \qquad (7)$$

где

$$\vec{a}\vec{r} = -\bar{g}_{\mu\nu} a^{\mu} x^{\nu}, \qquad a^2 = -\bar{g}_{\mu\nu} a^{\mu} a^{\nu}.$$

Вводя вместо a^{α} новые параметры

$$b^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{c^2}}}$$

и обратно

$$a^{\alpha} = \frac{b^{\alpha}}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}}}$$

получим

$$\bar{x}^{\mu} = \frac{b^{\mu} \left(\frac{1}{b^2} (\vec{b}\vec{r}) + t \right)}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}}} + x^{\mu} - \frac{1}{b^2} b^{\mu} (\vec{b}\vec{r}),$$

$$\bar{t} = \frac{t + \frac{1}{c^2} (\vec{b}\vec{r})}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{c^2}}}. \qquad (8)$$

Сравнивая преобразование (8) с общим преобразованием Лоренца без пространственных вращений (см., например, [I]), легко установить, что в случае равномерного движения системы отсчёта $\mathcal{G}$ параметры a^α и b^α имеют смысл пространственных компонент, соответственно, четырехмерной u^α и трехмерной v^α скорости начала подвижной системы отсчёта $\mathcal{G}$ относительно $\bar{\mathcal{G}}$.

В общем случае неравномерного движения системы $\mathcal{G}$ координаты $\bar{x}_o^\mu(\bar{t})$ начала $(x_o^\mu \equiv 0)$ системы отсчёта $\mathcal{G}$ относительно $\bar{\mathcal{G}}$, согласно (8), равны:

$$\bar{x}_o^\mu = b^\mu(t)\,\bar{t}, \tag{9}$$

где

$$\bar{t} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} b^2(t)}}.$$

Используя (9) и считая известными $\bar{x}_o^\mu(\bar{t})$, находим $b^\mu(t)$:

$$b^\mu(t) = \frac{\bar{x}_o^\mu(\bar{t}(t))}{\bar{t}(t)}, \tag{10}$$

где функция $\bar{t}(t)$ определяется из равенства

$$t = \bar{t}\left(1 + \frac{1}{c^2\bar{t}^2}\,\bar{g}_{\rho\sigma}\,\bar{x}_o^\rho(\bar{t})\,\bar{x}_o^\sigma(\bar{t})\right)^{1/2}.$$

Если положить в (6) $a^\mu \equiv 0$, то элементы матрицы $A^i_{\cdot k}$ будут равны:

$$A^0_{\cdot 0} = 1,$$

$$A^0_{\cdot \mu} = A^\mu_{\cdot 0} = 0,$$

$$A^{\mu}_{\cdot\nu} = \alpha^{\mu}_{\cdot\nu}$$

и преобразование (I) в этом случае примет вид обычного трехмерного вращения:

$$\bar{x}^{\mu} = \alpha^{\mu}_{\cdot\nu}\, x^{\nu}$$

$$\bar{t} = t.$$

С матрицей $\alpha^{\mu}_{\cdot\nu}$ тесно связан, так называемый, тензор угловой скорости:

$$\omega^{\mu}_{\cdot\nu} = -\tilde{\alpha}^{\mu}_{\cdot\lambda}\,\dot{\alpha}^{\lambda}_{\cdot\nu}, \qquad (II)$$

где

$$\tilde{\alpha}^{\mu}_{\cdot\lambda} = \bar{g}_{\lambda\tau}\,\alpha^{\tau}_{\cdot\sigma}\,\bar{g}^{\sigma\mu} = \alpha_{\lambda}^{\cdot\mu},$$

$$\dot{\alpha}^{\lambda}_{\cdot\nu} = \frac{d}{d\bar{t}}\,\alpha^{\lambda}_{\cdot\nu}.$$

Так как

$$\tilde{\alpha}^{\mu}_{\cdot\lambda}\,\alpha^{\lambda}_{\cdot\nu} = \alpha^{\mu}_{\cdot\lambda}\,\tilde{\alpha}^{\lambda}_{\cdot\nu} = \delta^{\mu}_{\nu},$$

то дифференцируя это равенство по t, легко показать, что тензор угловой скорости $\omega^{\mu}_{\cdot\nu}$ антисимметричен, т.е.

$$\omega^{\mu}_{\cdot\nu} = -\bar{g}_{\nu\lambda}\,\omega^{\lambda}_{\cdot\tau}\,\bar{g}^{\tau\mu} = -\omega_{\nu}^{\cdot\mu}.$$

В дальнейшем, наряду с тензором $\omega^{\mu}_{\cdot\nu}$ мы будем иметь дело еще с двумя антисимметрическими тензорами:

$$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\mu}_{\cdot\lambda}\,\bar{g}^{\lambda\nu} = -\bar{g}^{\mu\lambda}\,\omega_{\lambda}^{\cdot\nu}$$

и

$$\omega_{\mu\nu} = -\bar{g}_{\mu\lambda}\,\omega^{\lambda}_{\cdot\nu} = -\omega_{\mu}^{\cdot\lambda}\,\bar{g}_{\lambda\nu}$$

и ко- и контравариантными векторами угловой скорости:

$$\omega_\mu = \frac{1}{2} e_{\mu\nu\lambda} \omega^{\nu\lambda} = \frac{1}{2} e_{\mu\nu\lambda} \bar{g}^{\tau\sigma} \alpha_{\tau\cdot}^{\ \nu} \dot{\alpha}_{\sigma\cdot}^{\ \lambda}$$

и

$$\omega^\mu = \frac{1}{2} e^{\mu\nu\lambda} \omega_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} e^{\mu\nu\lambda} \bar{g}_{\tau\sigma} \alpha^{\tau}_{\cdot\nu} \dot{\alpha}^{\sigma}_{\cdot\lambda},$$

где $e_{\mu\nu\lambda}$ и $e^{\mu\nu\lambda}$ - антисимметрические символы Леви-Чивита.

Заметим, что $\omega^{\mu\nu}$ и ω^μ не являются тензором и вектором в полном смысле слова, так как их ко- и контравариантные компоненты связаны между собой равенствами:

$$\omega^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\lambda} \bar{g}^{\nu\tau} \omega_{\lambda\tau},$$

$$\omega^\mu = -\bar{g}^{\mu\nu} \omega_\nu,$$

в то время как для истинных тензоров и векторов должны иметь место следующие соотношения:

$$\omega^{\mu\nu} = a^{\mu\lambda} a^{\nu\tau} \omega_{\lambda\tau},$$

$$\omega^\mu = a^{\mu\lambda} \omega_\lambda,$$

где $a^{\mu\lambda}$ - трехмерный метрический тензор в рассматриваемой неинерциальной системе отсчёта $\mathfrak{G}$.

Как подчёркивается в статье [2], наиболее общее релятивистское уравнение движения материальной точки в гравитационно-инерционном поле при наличии сил $\mathcal{F}^i$ негравитационной природы имеет классически простой вид:

$$m \left(\frac{du}{d\tau}\right)^i = \mathcal{F}^i \qquad (12)$$

Чтобы переписать это уравнение применительно к рассматриваемому случаю неинерциальной системы отсчёта, воспользуемся конкре-

ным выражением[2] для пространственных компонент контравариантного четырехмерного ускорения $\left(\frac{du}{d\tau}\right)^\alpha$, приведенным в работе [2]:

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^\alpha = \frac{1}{1-\frac{1}{c^2}a_{\rho\sigma}v^\rho v^\sigma}\left\{\frac{dv^\alpha}{dt}+\gamma^\alpha_{\mu\nu}v^\mu v^\nu+\frac{c^2}{2h}a^{\alpha\mu}\frac{\partial h}{\partial x^\mu}-\right.$$

$$-c\sqrt{h}\,a^{\alpha\lambda}v^\mu\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda}-\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\mu}\right)+\frac{c^2}{2h}g^\alpha\frac{\partial h}{\partial x^0}+c^2a^{\alpha\lambda}\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^0}-$$

$$-c\sqrt{h}\,a^{\alpha\lambda}v^\mu\left(g_{\lambda\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}-g_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^0}\right)-\frac{g^\alpha}{2}v^\lambda\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x^0}v^\mu+ \qquad (13)$$

$$+a^{\alpha\lambda}\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x^0}v^\mu\left(\frac{c}{\sqrt{h}}+g_{\tau\nu}v^\tau\right)+\frac{v^\alpha}{c^2\left(1-\frac{1}{c^2}a_{\rho\sigma}v^\rho v^\sigma\right)^2}\times$$

$$\left.\times\left\{a_{\mu\tau}v^\tau\left(\frac{dv^\mu}{dt}+\gamma^\mu_{\nu\lambda}v^\nu v^\lambda\right)+\frac{1}{2}\left(v^\lambda\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial x^0}v^\mu\right)\left(\frac{c}{\sqrt{h}}+g_{\tau\nu}v^\tau\right)\right\}\right.$$

Итак, мы видим, что задача сводится к нахождению по известным формулам преобразования тензоров

$$g_{ik}=\bar{c}_i^{\,m}\,\bar{c}_k^{\,n}\,\bar{g}_{mn}, \qquad (14)$$

где

$$\bar{c}_i^{\,m}=\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^i},$$

всех компонент g_{ik}, а следовательно и h, $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$, $a_{\mu\nu}$ и $a^{\mu\nu}$ в неинерциальной системе отсчёта.

Воспользовавшись соотношениями (I), (5) и (6), получим следующие конкретные выражения для элементов матриц преобразования

---

[2] В настоящей статье мы используем те же самые обозначения, что и в работе [2].

$\overline{C}_i^{m}(1)$ и $\overline{C}_i^{m}(2)$, соответствующих двум случаям движения системы $\mathfrak{S}$ относительно $\overline{\mathfrak{S}}$:

$$\overline{C}_0^{\,0}(1) = \theta_1 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\overline{g}_{\rho\sigma}(\tilde{\alpha}a_1)^{\rho}(\tilde{\alpha}a_1)^{\sigma}},$$

$$\overline{C}_\mu^{\,0}(1) = -\frac{1}{c}\overline{g}_{\mu\lambda}(\tilde{\alpha}a_1)^{\lambda},$$

$$\overline{C}_0^{\,\mu}(1) = \frac{1}{c}\alpha^{\mu}_{\cdot\lambda}\eta_1^{\lambda}, \qquad (15)$$

$$\overline{C}_\mu^{\,\nu}(1) = \alpha^{\nu}_{\cdot\mu} - \frac{\gamma_1}{c^2}\overline{g}_{\mu\lambda}(\tilde{\alpha}a_1)^{\lambda}\alpha^{\nu}_{\cdot\tau}(\tilde{\alpha}a_1)^{\tau},$$

где

$$\theta_1 = 1 - \frac{\overline{g}_{\lambda\tau}(\tilde{\alpha}a_1)^{\lambda}(\tilde{\alpha}\dot{a}_1)^{\tau}t}{c^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\overline{g}_{\rho\sigma}(\tilde{\alpha}a_1)^{\rho}(\tilde{\alpha}a_1)^{\sigma}\right)} -$$

$$- \frac{\overline{g}_{\lambda\tau}(\tilde{\alpha}\dot{a}_1)^{\lambda}x^{\tau} - \overline{g}_{\lambda\tau}(\tilde{\alpha}a_1)^{\lambda}\omega^{\tau}_{\cdot\nu}x^{\nu}}{c^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\overline{g}_{\rho\sigma}(\tilde{\alpha}a_1)^{\rho}(\tilde{\alpha}a_1)^{\sigma}\right)^{1/2}}, \qquad (16)$$

$$\eta_1^{\mu} = (\tilde{\alpha}a_1)^{\mu} + (\tilde{\alpha}\dot{a}_1)^{\mu}t - \omega^{\mu}_{\cdot\nu}x^{\nu} + \frac{\gamma_1}{c^2}\left\{(\tilde{\alpha}a_1)^{\mu}\overline{g}_{\lambda\tau}(\tilde{\alpha}a_1)^{\lambda}\omega^{\tau}_{\cdot\nu}x^{\nu} -\right.$$

$$\left. - (\tilde{\alpha}a_1)^{\mu}\overline{g}_{\lambda\tau}(\tilde{\alpha}\dot{a}_1)^{\lambda}x^{\tau} - (\tilde{\alpha}\dot{a}_1)^{\mu}\overline{g}_{\lambda\tau}(\tilde{\alpha}a_1)^{\lambda}x^{\tau}\right\} -$$

$$- \frac{\gamma_1^2(\tilde{\alpha}a_1)^{\mu}}{c^4}\cdot\frac{\overline{g}_{\lambda\tau}(\tilde{\alpha}a_1)^{\lambda}(\tilde{\alpha}\dot{a}_1)^{\tau}\cdot\overline{g}_{\varphi\nu}(\tilde{\alpha}a_1)^{\varphi}x^{\nu}}{\left(1 - \frac{1}{c^2}\overline{g}_{\rho\sigma}(\tilde{\alpha}a_1)^{\rho}(\tilde{\alpha}a_1)^{\sigma}\right)^{1/2}}, \qquad (17)$$

$$(\tilde{\alpha}a_1)^{\mu} = \alpha^{\mu}_{\cdot\nu}a_1^{\nu};$$

$$\overline{C}_0^{\,\cdot\,0}(2) = \theta_2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\overline{g}_{\rho\sigma}\, a_2^\rho\, a_2^\sigma},$$

$$\overline{C}_\mu^{\,\cdot\,0}(2) = -\frac{1}{c}\,\overline{g}_{\mu\lambda}\, a_2^\lambda, \qquad (18)$$

$$\overline{C}_0^{\,\cdot\,\mu}(2) = \frac{1}{c}\,\alpha^{\mu\cdot}_{\cdot\,\lambda}\,\eta_2^\lambda,$$

$$\overline{C}_\mu^{\,\cdot\,\nu}(2) = \alpha^{\nu\cdot}_{\cdot\,\mu} - \frac{\gamma_2}{c^2}\,\overline{g}_{\mu\lambda}\, a_2^\lambda \cdot \alpha^{\nu\cdot}_{\cdot\,\tau}\, a_2^\tau,$$

где

$$\theta_2 = 1 - \frac{\overline{g}_{\lambda\tau}\, a_2^\lambda\, \dot{a}_2^\tau\, t}{c^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\overline{g}_{\rho\sigma}\, a_2^\rho\, a_2^\sigma\right)} - \frac{\overline{g}_{\lambda\tau}\, \dot{a}_2^\lambda\, x^\tau}{c^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\overline{g}_{\rho\sigma}\, a_2^\rho\, a_2^\sigma\right)^{1/2}}, \qquad (19)$$

$$\eta_2^\mu = a_2^\mu + (\dot{a}_2^\mu - \omega^{\mu\cdot}_{\cdot\,\nu}\, a_2^\nu)\,t - \omega^{\mu\cdot}_{\cdot\,\nu}\, x^\nu + \frac{\gamma_2}{c^2}\left(\omega^{\mu\cdot}_{\cdot\,\nu}\, a_2^\nu\, \overline{g}_{\varphi\lambda}\, a_2^\varphi\, x^\lambda - \right.$$

$$\left. - a_2^\mu \cdot \overline{g}_{\varphi\lambda}\, \dot{a}_2^\varphi\, x^\lambda - \dot{a}_2^\mu \cdot \overline{g}_{\varphi\lambda}\, a_2^\varphi\, x^\lambda\right) -$$

$$- \frac{\gamma_2^2\, a_2^\mu}{c^4} \cdot \frac{\overline{g}_{\varphi\lambda}\, a_2^\varphi\, \dot{a}_2^\lambda \cdot \overline{g}_{\tau\nu}\, a_2^\tau\, x^\nu}{\left(1 - \frac{1}{c^2}\overline{g}_{\rho\sigma}\, a_2^\rho\, a_2^\sigma\right)^{1/2}}. \qquad (20)$$

Так как метрика в неинерциальной системе отсчёта уже не является эвклидовой, мы не можем, строго говоря, рассматривать x^μ, ω^μ, a^μ и $\dot{a}^\mu$ как векторы линейного пространства. Однако, для того, чтобы сделать обозначения более компактными, сохраним век-

торную символику и положим [3] :

$$(\vec{A}\vec{B}) = -\bar{g}_{\mu\nu} A^\mu B^\nu,$$

$$[\vec{A}\vec{B}]^\mu = -\bar{g}^{\mu\nu}[\vec{A}\vec{B}]_\nu = -\bar{g}^{\mu\nu} e_{\nu\lambda\varepsilon} A^\lambda B^\varepsilon.$$

В новых обозначениях выражения (I6), (I7), (I9) и (20) принимают вид:

$$\theta_1 = 1 + \frac{(\vec{\alpha}\vec{a}_1 \cdot \dot{\vec{\alpha}}\vec{a}_1)t}{c^2\left(1 + \frac{(\vec{\alpha}\vec{a}_1)^2}{c^2\omega}\right)} + \frac{(\vec{\alpha}\dot{\vec{a}}_1 \cdot \vec{\varepsilon}) + ([\vec{\alpha}\vec{a}_1 \cdot \vec{\omega}]\vec{\varepsilon})}{c^2\left(1 + \frac{(\vec{\alpha}\vec{a}_1)^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \qquad (21)$$

$$\vec{\eta}_1 = \vec{\alpha}\vec{a}_1 + \dot{\vec{\alpha}}\dot{\vec{a}}_1 t + [\vec{\omega}\vec{\varepsilon}] + \frac{\gamma_1}{c^2}\Big\{\vec{\alpha}\vec{a}_1([\vec{\alpha}\vec{a}_1 \cdot \vec{\omega}]\vec{\varepsilon}) +$$

$$+ \vec{\alpha}\vec{a}_1(\vec{\alpha}\dot{\vec{a}}_1 \cdot \vec{\varepsilon}) + \vec{\alpha}\dot{\vec{a}}_1(\vec{\alpha}\vec{a}_1 \cdot \vec{\varepsilon})\Big\} -$$

$$- \frac{\gamma_1^2 \vec{\alpha}\vec{a}_1}{c^4} \cdot \frac{(\vec{\alpha}\vec{a}_1 \cdot \vec{\alpha}\dot{\vec{a}}_1)(\vec{\alpha}\vec{a}_1 \cdot \vec{\varepsilon})}{\left(1 + \frac{(\vec{\alpha}\vec{a}_1)^2}{c^2}\right)^{1/2}} \qquad (..)$$

$$\theta_2 = 1 + \frac{(\vec{a}_1 \cdot \dot{\vec{a}}_1)t}{c^2\left(1 + \frac{a_1^2}{c^2}\right)} + \frac{\dot{\vec{a}}_1\vec{\varepsilon}}{c^2\left(1 + \frac{a_1^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \qquad (23)$$

---

[3] Напомним, что "метричные" скалярное и векторное произведения в трёхмерном римановом пространстве с метрическим тензором $a_{\mu\nu}$ имеют вид:

$$\vec{A}\vec{B} = a_{\mu\nu} A^\mu B^\nu,$$

$$[\vec{A}\vec{B}]^\mu = a^{\mu\nu}[\vec{A}\vec{B}]_\nu = a^{\mu\nu} e_{\nu\alpha\varepsilon}\sqrt{det\,|a|}\, A^\alpha B^\varepsilon.$$

$$\vec{\eta}_2 = \vec{a}_2 + (\dot{\vec{a}}_2 + [\vec{\omega}\vec{a}_2])t + [\vec{\omega}\vec{\tau}] + \frac{\gamma_2}{c^2}\left\{[\vec{\omega}\vec{a}_2](\vec{a}_2\vec{\tau}) + \right.$$

$$\left. + \vec{a}_2(\dot{\vec{a}}_2\vec{\tau}) + \dot{\vec{a}}_2(\vec{a}_2\vec{\tau})\right\} - \frac{\gamma_2^2\vec{a}_2}{c^4}\cdot\frac{(\vec{a}_2\cdot\dot{\vec{a}}_2)(\vec{a}_2\vec{\tau})}{\left(1+\frac{a_2^2}{c^2}\right)^{1/2}}. \quad (24)$$

Зная $\overline{C}_{i:}^{\kappa}(1)$ и $\overline{C}_{i:}^{\kappa}(2)$ согласно (I4) находим:

$$g_{oo}(1) = \theta_1^2\left(1+\frac{(\alpha\vec{a}_1)^2}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2}\eta_1^2,$$

$$g_{o\mu}(1) = \frac{\overline{g}_{\mu\nu}}{c}\left\{\eta_1^\nu - (\alpha\vec{a}_1)^\nu\theta_1\left(1+\frac{(\alpha\vec{a}_1)^2}{c^2}\right)^{1/2} + \frac{\gamma_1}{c^2}(\alpha\vec{a}_1)^\nu(\alpha\vec{a}_1\vec{\eta}_1)\right.$$

$$g_{\mu\nu}(1) = \overline{g}_{\mu\nu}$$

и аналогично:

$$g_{oo}(2) = \theta_2^2\left(1+\frac{a_2^2}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2}\eta_2^2,$$

$$g_{o\mu}(2) = \frac{\overline{g}_{\mu\nu}}{c}\left\{\eta_2^\nu - a_2^\nu\theta_2\left(1+\frac{a_2^2}{c^2}\right)^{1/2} + \frac{\gamma_2}{c^2}a_2^\nu(\vec{a}_2\vec{\eta}_2)\right\}$$

$$g_{\mu\nu}(2) = \overline{g}_{\mu\nu}.$$

Если ввести новые обозначения:

$$\vec{X}_1 = \vec{\eta}_1 - (\alpha\vec{a}_1)\theta_1\left(1+\frac{(\alpha\vec{a}_1)^2}{c^2}\right)^{1/2} + \frac{\gamma_1}{c^2}(\alpha\vec{a}_1)(\alpha\vec{a}_1\cdot\vec{\eta}_1) \quad (25)$$

и

$$\vec{X}_2 = \vec{\eta}_2 - \vec{a}_2\theta_2\left(1+\frac{a_2^2}{c^2}\right)^{1/2} + \frac{\gamma_2}{c^2}\vec{a}_2(\vec{a}_2\vec{\eta}_2) \quad (26)$$

обратно

$$\vec{\eta}_1 = \vec{X}_1 + \alpha\vec{a}_1\theta_1 - \alpha\vec{a}_1\frac{\gamma_1(\alpha\vec{a}_1\cdot\vec{X}_1)}{c^2\left(1+\frac{(\alpha\vec{a}_1)^2}{c^2}\right)^{1/2}},$$

$$\vec{\eta}_2 = \vec{X}_2 + \vec{a}_2\theta_2 - \vec{a}_2\frac{\gamma_2(\vec{a}_2\vec{X}_2)}{c^2\left(1+\frac{a_2^2}{c^2}\right)^{1/2}},$$

выражения для g_{ik} принимают вид:

$$g_{00}(1) = \left(\theta_1 - \frac{\vec{\alpha}\vec{a}_1\cdot\vec{X}_1}{c^2\left(1+\frac{(\vec{\alpha}\vec{a}_1)^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right)^2 - \frac{1}{c^2}X_1^2,$$

$$g_{0\mu}(1) = \frac{1}{c}\bar{g}_{\mu\nu}X_1^\nu,$$

$$g_{\mu\nu}(1) = \bar{g}_{\mu\nu}$$

и аналогично

$$g_{00}(2) = \left(\theta_2 - \frac{\vec{a}_2\vec{X}_2}{c^2\left(1+\frac{a_2^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right)^2 - \frac{1}{c^2}X_2^2,$$

$$g_{0\mu}(2) = \frac{1}{c}\bar{g}_{\mu\lambda}X_2^\lambda,$$

$$g_{\mu\nu}(2) = \bar{g}_{\mu\nu}$$

Подставляя в (25) и (26) выражения (21) – (24) получаем $\vec{X}_1$ и $\vec{X}_2$ в их окончательном виде:

$$\vec{X}_1 = \vec{\lambda}_1 t + [\vec{\Omega}_1\vec{r}]$$

и (27)

$$\vec{X}_2 = \vec{\lambda}_2 t + [\vec{\Omega}_2\vec{r}],$$

где

$$\vec{\lambda}_1 = \vec{\alpha}\dot{\vec{a}}_1 - \vec{\alpha}\vec{a}_1\cdot\frac{\gamma_1(\vec{a}_1\dot{\vec{a}}_1)}{c^2\left(1+\frac{(\vec{\alpha}\vec{a}_1)^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \qquad (28)$$

$$\vec{\lambda}_2 = [\vec{\omega}\vec{a}_2] + \dot{\vec{a}}_2 - \vec{a}_2 \cdot \frac{\gamma_2 (\vec{a}_2 \dot{\vec{a}}_2)}{c^2 \left(1 + \frac{a_2^2}{c^2}\right)^{1/2}}, \tag{29}$$

$$\vec{\Omega}_1 = \vec{\omega} + \frac{\gamma_1}{c^2} [\tilde{\alpha}\vec{a}_1 \cdot \tilde{\alpha}\dot{\vec{a}}_1], \tag{30}$$

$$\vec{\Omega}_2 = \vec{\omega} + \frac{\gamma_2}{c^2} [\vec{a}_2 [\vec{\omega}\vec{a}_2]] + \frac{\gamma_2}{c^2} [\vec{a}_2 \dot{\vec{a}}_2]. \tag{31}$$

Таким образом, после соответствующих подстановок получаем следующие выражения для g_{00} :

$$\begin{aligned} g_{00}(1) &= \left(1 + \frac{1}{c^2} \vec{\lambda}_1 \vec{z}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \chi_1^2, \\ g_{00}(2) &= \left(1 + \frac{1}{c^2} \vec{\lambda}_2 \vec{z}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \chi_2^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Что же касается контравариантных компонент g^{ik}, то они могут быть найдены из

$$g_{ei} g^{ik} = \delta_e^k$$

и имеют вид:

$$g^{00} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{c^2} \vec{\lambda} \vec{z}\right)^2},$$

$$g^{0\mu} = -\frac{\chi^\mu}{c\left(1 + \frac{1}{c^2} \vec{\lambda} \vec{z}\right)^2},$$

$$g^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\nu} + \frac{\chi^\mu \chi^\nu}{c^2 \left(1 + \frac{1}{c^2} \vec{\lambda} \vec{z}\right)^2}.$$

Итак, подставляя в выражение (13)

$$h = g_{00} = \left(1 + \frac{1}{c^2}\vec{\lambda}\vec{\varepsilon}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\chi^2,$$

$$g_{\mu} = -\frac{g_{0\mu}}{g_{00}} = -\frac{1}{ch}\,\overline{g}_{\mu\lambda}\chi^{\lambda},$$

$$g^{\mu} = -g^{0\mu} = \frac{\chi^{\mu}}{c\left(1 + \frac{1}{c^2}\vec{\lambda}\vec{\varepsilon}\right)^2},$$

$$a_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{g_{0\mu}g_{0\nu}}{g_{00}} = -\overline{g}_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2 h}\,\overline{g}_{\mu\lambda}\chi^{\lambda}\cdot\overline{g}_{\nu\varepsilon}\chi^{\varepsilon},$$

$$a^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} = -\overline{g}^{\mu\nu} - \frac{\chi^{\mu}\chi^{\nu}}{c^2\left(1 + \frac{1}{c^2}\vec{\lambda}\vec{\varepsilon}\right)^2},$$

получаем окончательный вид уравнения движения материальной точки в неинерциальной системе отсчёта:

$$\frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{(\vec{\chi}\vec{v})^2}{c^2 h}\right)^{1/2}}\cdot\left[\frac{dv^{\alpha}}{dt} + \frac{2}{\sqrt{h}}\left(1 + \frac{\vec{\chi}\vec{v}}{c^2\sqrt{h}}\right)\left\{[\vec{\Omega}\vec{v}]^{\alpha} - \frac{\chi^{\alpha}(\vec{\chi}\vec{v})}{c^2\left(1 + \frac{\vec{\lambda}\vec{\varepsilon}}{c^2}\right)}\right\} + \right.$$

$$+ \frac{1}{h}\left(1 + \frac{\vec{\chi}\vec{v}}{c^2\sqrt{h}}\right)^2\left\{\frac{\partial\chi^{\alpha}}{\partial t} + \lambda^{\alpha}\left(1 + \frac{\vec{\lambda}\vec{\varepsilon}}{c^2}\right) + [\vec{\Omega}\vec{\chi}]^{\alpha} - \frac{\chi^{\alpha}(\vec{\chi}\vec{\lambda})}{c^2\left(1 + \frac{\vec{\lambda}\vec{\varepsilon}}{c^2}\right)}\right. \tag{33}$$

$$\left.\left. - \frac{\chi^{\alpha}(\dot{\vec{\lambda}}\vec{\varepsilon})}{c^2\left(1 + \frac{\vec{\lambda}\vec{\varepsilon}}{c^2}\right)}\right\}\right] + \frac{m v^{\alpha}}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{(\vec{\chi}\vec{v})^2}{c^2 h}\right)^{1/2}}\left[(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}) + \frac{(\vec{\chi}\vec{v})}{c^2 h}\cdot(\vec{\chi}\frac{d\vec{v}}{dt}) + \right.$$

$$\left. + \frac{(\vec{\chi}\vec{v})}{c^2 h^{3/2}}\left(1 + \frac{\vec{\chi}\vec{v}}{c^2\sqrt{h}}\right)\left\{\left(\frac{\partial\vec{\chi}}{\partial t}\vec{v}\right) - \frac{1}{c^2 h}(\vec{\chi}\vec{v})\left(1 + \frac{\vec{\lambda}\vec{\varepsilon}}{c^2}\right)(\dot{\vec{\lambda}}\vec{\varepsilon}) + \right.\right.$$

$$+\frac{(\vec{\chi}\vec{v})}{c^2 h}\left(\frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t}\vec{\chi}\right)\Big\}+\frac{(\vec{\chi}\vec{v})^2}{c^4 h^2}\left\{\vec{v}[\vec{\chi}\vec{\Omega}]-(\lambda\vec{v})\left(1+\frac{\vec{\chi}\vec{z}}{c^2}\right)\right\}\Big]=f^{\alpha}$$

где

$$f^{\alpha}=\left(1-\frac{1}{c^2}a_{\sigma\rho}v^{\sigma}v^{\rho}\right)^{1/2}\mathcal{F}^{\alpha}$$

Рассмотрим теперь ряд частных случаев:

I. Нерелятивистское приближение

$$\left(\frac{v}{c}\ll 1,\qquad \frac{\chi}{c}\ll 1,\qquad \frac{(\vec{\chi}\vec{z})^{1/2}}{c}\ll 1\right).$$

В этом случае имеем:

$$h_1=h_2=1,\qquad \vec{\Omega}_1=\vec{\Omega}_2=\vec{\omega},$$

$$\vec{a}_1 t=\vec{z}_{0,1}(t),\qquad \vec{a}_2 t=\vec{z}_{0,2}(t),$$

$$\vec{\lambda}_1=\tilde{\alpha}\dot{\vec{a}}_1,$$

$$\vec{\lambda}_2=\dot{\vec{a}}_2+[\vec{\omega}\vec{a}_2]$$

и уравнение движения (33), соответствующее двум различным случаям движения неинерциальной системы, принимает хорошо известный [3] вид:

$$m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{w}+2[\vec{\omega}\vec{v}]+[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{z}]]+[\dot{\vec{\omega}}\vec{z}]\right)=\vec{f},\qquad (34)$$

где

$$\vec{w}_1=\tilde{\alpha}(2\dot{\vec{a}}_1+\ddot{\vec{a}}_1 t)=\tilde{\alpha}\ddot{\vec{z}}_{0,1}$$

$$\vec{w}_2 = 2\dot{\vec{a}}_2 + \ddot{\vec{a}}_2 t + 2[\vec{\omega}(\vec{a}_2 + \dot{\vec{a}}_2 t)] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{a}_2]]t + [\dot{\vec{\omega}}\vec{a}_2]t =$$

$$= \ddot{\vec{z}}_{0,2} + 2[\vec{\omega}\dot{\vec{z}}_{0,2}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{z}_{0,2}]] + [\dot{\vec{\omega}}\vec{z}_{0,2}].$$

2. Неинерциальная система совершает лишь вращательное движение.

В этом случае $\vec{a} = 0$, $\vec{\lambda}^* = 0$, $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$ и следовательно уравнение движения (33) записывается в виде:

$$\frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{(\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}])^2}{c^4\left(1 - \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]^2}{c^2}\right)}\right)^{1/2}} \left\{ \frac{d\vec{v}}{dt} + 2[\vec{\omega}\vec{v}] \frac{\left(1 - \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]^2}{c^2}\right)^{1/2} + \frac{\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}]}{c^2}}{1 - \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]^2}{c^2}} + \right.$$

$$\left. + \left([\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]] + [\dot{\vec{\omega}}\vec{r}]\right) \cdot \frac{\left[\left(1 - \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]^2}{c^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{c^2}(\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}])\right]^2}{\left(1 - \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]^2}{c^2}\right)^2} \right\} +$$

$$+ \frac{m\vec{v}}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{(\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}])^2}{c^4\left(1 - \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]^2}{c^2}\right)^2}\right)^{3/2}} \left\{ \left(\vec{v} + \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]}{c^2} \cdot \frac{\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}]}{1 - \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]^2}{c^2}}\right)\frac{d\vec{v}}{dt} \right. \quad (35)$$

$$+ \frac{1}{c^2}(\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}])(\vec{v}[\dot{\vec{\omega}}\vec{r}]) \cdot \frac{\left(1 - \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]^2}{c^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{c^2}\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}]}{\left(1 - \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]^2}{c^2}\right)^2} +$$

$$+ \frac{1}{c^4}(\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}])^2([\vec{\omega}\vec{r}] \cdot [\dot{\vec{\omega}}\vec{r}]) \cdot \frac{\left(1 - \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]^2}{c^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{c^2}\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}]}{\left(1 - \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]^2}{c^2}\right)^3} +$$

$$\left. + \frac{(\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}])^2([\vec{\omega}\vec{r}] \cdot [\vec{\omega}\vec{v}])}{c^4\left(1 - \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]^2}{c^2}\right)^2} \right\} = \vec{f}$$

Сравнивая полученное уравнение (35) с нерелятивистским уравнением (34), мы можем написать релятивистское выражение для кориолисова ускорения:

$$\vec{w}_к = 2[\vec{\omega}\vec{v}] \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{c^2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2\right)^{1/2} + \frac{1}{c^2}\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}]}{1 - \frac{1}{c^2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2} \approx$$

$$\approx 2[\vec{\omega}\vec{v}]\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2 + \vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}]\right)\right\},$$

для центростремительного ускорения:

$$\vec{w}_ω = [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]] \cdot \frac{\left[\left(1 - \frac{1}{c^2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2\right)^{1/2} + \frac{1}{c^2}\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}]\right]^2}{\left(1 - \frac{1}{c^2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2\right)^2} \approx$$

$$\approx [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]]\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left([\vec{\omega}\vec{r}]^2 + 2\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}]\right)\right\}$$

и для ускорения, связанного с неравномерным вращением системы $\mathcal{G}$:

$$\vec{w}_ε = [\dot{\vec{\omega}}\vec{r}] \cdot \frac{\left[\left(1 - \frac{1}{c^2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2\right)^{1/2} + \frac{1}{c^2}\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}]\right]^2}{\left(1 - \frac{1}{c^2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2\right)^2} \approx$$

$$\approx [\dot{\vec{\omega}}\vec{r}]\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left([\vec{\omega}\vec{r}]^2 + 2\vec{v}[\vec{\omega}\vec{r}]\right)\right\}.$$

Если движение материальной точки относительно вращающейся системы отсчёта $\mathcal{G}$ осуществляется с нерелятивистскими скоростями $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$, то уравнение (35) принимает вид:

$$m\left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{2[\vec{\omega}\vec{v}]}{\left(1 - \frac{1}{c^2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2\right)^{1/2}} + \frac{[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]] + [\dot{\vec{\omega}}\vec{r}]}{1 - \frac{1}{c^2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2}\right) = \vec{f}.$$

Если же, наоборот, вращение системы $\mathcal{S}$ происходит с нерелятивистскими скоростями $\left(\frac{[\vec{\omega}\vec{r}]}{c} \ll 1\right)$, а скорость точки v сравнима с c, то вместо (35) будем иметь:

$$m\left\{\frac{\frac{d\vec{v}}{dt} + 2[\vec{\omega}\vec{v}] + [\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}]] + [\dot{\vec{\omega}}\vec{r}]}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + \frac{\vec{v}\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}\right)}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right\} = \vec{f}.$$

3. Неинерциальная система совершает лишь поступательное прямолинейное движение.

Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор, задающий направление движения системы $\mathcal{S}$. Тогда закон движения начала отсчёта неинерциальной системы $\mathcal{S}$ относительно $\bar{\mathcal{S}}$ может быть записан в виде:

$$\vec{r}_0(\bar{t}) = \vec{n}\, x_0(\bar{t}),$$

где $x_0(\bar{t})$ – заданная функция $\bar{t}$ $(x_0(0)=0)$. Таким образом, в рассматриваемом случае имеем:

$$\alpha'_\nu = \tilde{\alpha}'_\nu = \delta^\mu_\nu,$$

$$\vec{\omega} = 0,$$

$$\vec{a}(t) = \vec{n}\, a(t) = \vec{n}\,\frac{x_0(\bar{t})}{\bar{t}^2\left(1-\frac{x_0^2(\bar{t})}{c^2\bar{t}^2}\right)^{1/2}} = \vec{n}\,\frac{x_0(\bar{t})}{t^2},$$

где функция $\bar{t}(t)$ определяется из равенства

$$t = \bar{t}\sqrt{1-\frac{x_0^2(\bar{t})}{c^2\bar{t}^2}}.$$

Согласно (28) имеем:

$$\vec{\lambda} = \vec{n}\lambda(t) = \vec{n}\,\frac{a}{\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

Подставляя в (33) $\vec{\chi} = \vec{n}\lambda t$ и $\vec{\Omega} = 0$, получаем следующий вид для уравнения движения материальной точки в неинерциальной системе отсчёта, совершающей поступательное прямолинейное движение в направлении $\vec{n}$:

$$\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}-\varepsilon^2\right)^{1/2}}\left\{\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{\vec{n}}{h}\cdot\frac{1+\varepsilon}{1+\delta}\left[\lambda\left((1-\varepsilon)h+(1+\varepsilon)(1+\delta)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\dot{\lambda}t(1+\varepsilon)\right]\right\}+\frac{m\vec{v}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}-\varepsilon^2\right)^{3/2}}\left\{(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt})+\varepsilon\frac{\lambda t}{\sqrt{h}}(\vec{n}\frac{d\vec{v}}{dt})+\right. \tag{36}$$

$$\left.+\frac{\varepsilon}{h^2}(\vec{n}\vec{v})(1+\delta)\left[\lambda\left((1+\varepsilon)(1+\delta)-\varepsilon h\right)+\dot{\lambda}t(1+\varepsilon)\right]\right\}=\vec{f}$$

где

$$\varepsilon = \frac{\lambda t(\vec{n}\vec{v})}{c^2\sqrt{h}},$$

$$\delta = \frac{\lambda(\vec{n}\vec{\varepsilon})}{c^2},$$

$$h = \left(1+\frac{\lambda}{c^2}\vec{n}\vec{\varepsilon}\right)^2-\frac{\lambda^2t^2}{c^2}.$$

При $\lambda = 0$, что соответствует случаю перехода к системе Σ, движущейся равномерно относительно $\bar{\Sigma}$, получаем, как это и должно быть, хорошо известное уравнение движения материальной точки в инерциальной системе отсчёта $\bar{\Sigma}$:

$$m\left\{\frac{\frac{d\vec{v}}{dt}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}+\frac{\vec{v}(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt})}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\right\}=\vec{f},$$

ЛИТЕРАТУРА.

I . М.-А. Тоннела, Основы электромагнетизма и теории относительности, стр. I63-I64, М., ИЛ, I962.

2 . Ю.И. Кулаков, "О физических законах, лежащих в основании механики" (статья, посланная в ЖЭТФ 6.XI.68 г.).

3 . Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц, Механика, стр. I62., М., "Наука", I965.

ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЙ.

> Если вы можете измерять и выражать в числах то, о чём говорите, то об этом предмете вы кое-что знаете, если вы не можете сделать этого, то ваши познания скудны и неудовлетворительны. Быть может, они и представляют первый шаг исследования, но едва ли позволительно думать, что ваша мысль продвинулась до степени настоящего знания.
>
> Вильям Томсон.

Результат всякой конкретной измерительной операции содержит в себе информацию как об изучаемом физическом объекте, так и о данном измерительном приборе. Последовательная теория измерений должна дать алгорифм, позволяющий отделить информацию, относящуюся к изучаемому объекту, от информации о свойствах измерительного прибора. Этот алгорифм может быть сформулирован в терминах теории физических структур, основные положения которой излагаются ниже.

В качестве примера, иллюстрирующего этот "алгорифм разделения" мы рассмотрим одну из наиболее фундаментальных операций – операцию измерения времени. Мы покажем при этом, что для измерения времени нет необходимости ограничиваться так называемыми "равномерными" процессами; можно использовать различные неравномерные процессы и после соответствующей обработки опытных данных, получать один и тот же результат – "истинное время", совпадающее с показаниями "равномерно идущих часов". Короче говоря, мы дадим определение ин-

вариантного промежутка времени между двумя событиями, значение которого не зависит от конкретных измерительных операций, выбранных из достаточно широкого класса, а определяется лишь "внутренними" свойствами множества событий.

§ I. Постановка задачи.

Пусть $\mathfrak{M} = \{i, \kappa, \ldots, \ell, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \ldots\}$ – два множества физических объектов произвольной природы (например, $\mathfrak{M}$ – множество проводников $i, \kappa, \ldots, \ell, \ldots$, а $\mathfrak{N}$ – множество источников тока $\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \ldots$) и $\mathfrak{I} = \{\mu, \nu, \ldots, \lambda, \ldots\}$ – множество различных измерительных операций, позволяющих сопоставить каждой паре объектов (i, α) вполне определенные численные результаты эксперимента $U_{i\alpha}^{\mu}, U_{i\alpha}^{\nu}, \ldots, U_{i\alpha}^{\lambda}, \ldots$ (в нашем примере это показания всевозможных электроизмерительных приборов $\mu, \nu, \ldots, \lambda, \ldots$, различных по своему устройству и имеющих, вообще говоря, произвольные шкалы, включенных последовательно с проводником i и источником тока α). Числа $U_{i\alpha}^{\mu}$ мы будем называть значениями фундаментальной (для данных соотношений) физической величины U.

Задача состоит в том, чтобы по данным эксперимента μ, относящимся к достаточно большому числу объектов $i_1, i_2, \ldots, i_M$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ и заданным в виде прямоугольной $M \times N$ – матрицы $\| U_{i_r \alpha_s} \|$ $(r = 1, 2, \ldots, M; s = 1, 2, \ldots, N)$ найти такую монотонную функцию $f_\mu(x)$, свою для каждой измерительной процедуры μ, значения которой при всех $x = U_{i\alpha}^{\mu}$ зависили бы только от i и α и не зависили от выбора конкретной измерительной процедуры $\mu \in \mathfrak{I}$, то есть

$$\forall i \in \mathfrak{M}, \forall \alpha \in \mathfrak{N}, \forall \mu, \nu \in \mathfrak{I} \quad f_\mu(u^\mu_{i\alpha}) = f_\nu(u^\nu_{i\alpha}).$$

Числа $f_\mu(u^\mu_{i\alpha})$ мы будем называть инвариантными относительно выбора измерительной операции значениями фундаментальной физической величины u, или короче, инвариантными результатами измерения и обозначить через $a_{i\alpha} = f_\mu(u^\mu_{i\alpha})$.

Другими словами, задача состоит в том, чтобы исходя из конкретных данных $\|u^\mu_{i\alpha}\|$, полученных с помощью измерительной процедуры μ, найти "истинные" свойства изучаемых объектов, не зависящих от свойств измерительного прибора μ. Или, более строго, необходимо указать алгорифм, позволяющий выделить из опытных данных $\|u^\mu_{i\alpha}\|$ два класса различных инвариантов: числа $a_{i\alpha}$, зависящие лишь от изучаемых объектов i и α и не зависящие от измерительной операции μ, и функцию $f_\mu(x)$, зависящую лишь от μ и не зависящую от выбора i и α.

Этот алгорифм может быть сформулирован, если воспользоваться результатами общей логической схемы, названной нами теорией физических структур [I].

§ 2. Основные положения теории физических структур.

I. Теория физических структур представляет собой своеобразную алгебру отношений симметрии, существующих между различными физическими объектами. Эта теория с одной стороны достаточно абстрактна и общa, чтобы, при соответствующей интерпретации, охватить все физические теории феноменологического типа (к ним относятся геоме-

трия, рассматриваемая как физическая теория протяженности реальных объектов, хронометрия, изучающая наиболее общие свойства времени, специальная теория относительности, теория тяготения, релятивистская и нерелятивисткая механика, электродинамика, термодинамика). С другой стороны, факт существования особого вида симметрии, названной нами феноменологической, является настолько сильным требованием, что позволяет получать явные выражения для всех известных первичных физических законов независимо от их конкретной интерпретации.

2. Отношения между элементами одного или нескольких множеств произвольной природы, изучаемые в теории физических структур, характеризуются соответствующим набором вещественных чисел - значений фундаментальной физической величины U. Так например, если речь идёт о бинарных отношениях между элементами двух различных множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, то соответствующий набор имеет вид матрицы $U = \| u_{i\alpha} \|$, строки которой соответствуют различным $i \in \mathfrak{M}$, а столбцы - различным $\alpha \in \mathfrak{N}$. Если же рассматриваются бинарные отношения между различными элементами одного множества $\mathfrak{M}$, то этот набор имеет вид матрицы $U = \| u_{ik} \|$ $(i, k \in \mathfrak{M})$.

Физическая интерпретация $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и U очень проста: $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ - множества физических объектов различной природы (множества тел, событий, проводников, термодинамических состояний и т.п.), U - набор экспериментальных данных (например, $u_{i\alpha}$ - ускорение тела i под действием поля α, u_{ik} - работа перехода из одного термодинамического состояния в другое, и т.д.).

3. Основная аксиома теории физических структур.

Мы ограничимся здесь двумя частными формулировками основной аксиомы.

А. Принцип феноменологической симметрии механического типа.

Имеется два множества физических объектов $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Каждой паре объектов (i, α) с помощью некоторой экспериментальной процедуры сопоставляется одно число $u_{i\alpha}^{\mu}$. Если из множества $\mathcal{M}$ выбрать произвольным образом подмножество $\mathcal{M}_m$, состоящее из m элементов, а из множества $\mathcal{N}$ – подмножество $\mathcal{N}_n$, состоящее из n элементов, то между $m \cdot n$ экспериментальными значениями $u_{i\alpha}^{\mu}$, относящимися к любой паре (i, α), имеет место зависимость:

$$\forall i, \kappa, \ldots, \ell \in \mathcal{M}, \forall \alpha, \beta, \ldots, \gamma \in \mathcal{N} \quad \Phi_{\mu}(u_{i\alpha}^{\mu}, u_{i\beta}^{\mu}, \ldots, u_{\ell\gamma}^{\mu}) = 0. \quad (1)$$

В. Принцип феноменологической симметрии пространственного типа.

Имеется одно множество физических объектов $\mathcal{M}$. Любым двум объектам этого множества $i, \kappa \in \mathcal{M}$ с помощью некоторой экспериментальной процедуры μ сопоставляется одно число $u_{i\kappa}^{\mu}$. Если из множества $\mathcal{M}$ выбрать произвольным образом подмножество $\mathcal{M}_m \subset \mathcal{M}$, состоящее из m элементов, то между $\frac{1}{2} m(m-1)$ экспериментальными данными $u_{i\kappa}^{\mu}$, относящимися к любой паре $(i, \kappa) \in \mathcal{M}_m \times \mathcal{M}_m$, имеет место зависимость:

$$\forall i, \kappa, \ldots, \tau \in \mathcal{M} \quad \Phi_{\mu}(u_{i\kappa}^{\mu}, u_{i\ell}^{\mu}, \ldots, u_{q\tau}^{\mu}) = 0. \quad (2)$$

В обоих случаях предполагается, что вещественная функция достаточное число раз дифференцируема, разрешима относительно любого своего аргумента и после параметризации не может быть представлена в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных.

4. Основные результаты теории физических структур.

Можно показать, что требование существования соотношений типа (I) или (2), инвариантных относительно выбора соответствующих подмножеств, является достаточным не только для нахождения вида функции Φ, представляющей собой первичный физический закон в его наиболее естественном виде, но и для получения допустимого набора U.

Так в случае феноменологической симметрии механического типа ранга (n, n) допустимый набор $u^r_{i\alpha}$ определен с точностью до одной произвольной функции одной переменной $\chi_\mu(x)$ и имеет вид:

$$u^r_{i\alpha} = \chi_\mu\left(x_i^1 \xi_{1\alpha} + x_i^2 \xi_{2\alpha} + \ldots + x_i^{n-1} \xi_{n-1\alpha}\right), \qquad (3)$$

где x_i^σ, $\xi_{\sigma\alpha}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, n-1)$ – произвольные параметры, сопоставляемые элементам $i \in \mathfrak{M}$ и $\alpha \in \mathfrak{N}$.

Что же касается самого первичного закона, реализующего данную физическую структуру, то он может быть записан следующим образом:

$$\Phi_\mu(u^r_{i\alpha}, u^r_{i\beta}, \ldots, u^r_{i\gamma}) = \begin{vmatrix} f_\mu(u^r_{i\alpha}) & f_\mu(u^r_{i\beta}) & \ldots & f_\mu(u^r_{i\gamma}) \\ f_\mu(u^r_{k\alpha}) & f_\mu(u^r_{k\beta}) & \ldots & f_\mu(u^r_{k\gamma}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_\mu(u^r_{l\alpha}) & f_\mu(u^r_{l\beta}) & \ldots & f_\mu(u^r_{l\gamma}) \end{vmatrix} = 0, \qquad (4)$$

где $f_\mu(x) = \chi_\mu^{-1}(x)$ – функция, обратная χ_μ.

Для примера, который мы хотим здесь рассмотреть, особый интерес представляют случай феноменологической симметрии пространственного типа.

Если ранг феноменологической симметрии множества $\mathfrak{M}$ равен

n , то можно показать, что решение системы функциональных уравнений (2) при $u^n_{ik} = u^n_{ki}$ зависит от произвольной постоянной a и имеет вид:

$$\Phi^+_n(u^n_{ik},\dots,u^n_{em};a) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{l_n(u^n_{ik})}{a} & \dots & \cos\frac{l_n(u^n_{im})}{a} \\ \cos\frac{l_n(u^n_{ik})}{a} & 1 & \dots & \cos\frac{l_n(u^n_{km})}{a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos\frac{l_n(u^n_{im})}{a} & \cos\frac{l_n(u^n_{km})}{a} & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

($n-2$ – мерное пространство постоянной, положительной кривизны $K = \frac{1}{a^2}$), или

$$\Phi^-_n(u^n_{ik},\dots,u^n_{em};a) = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{ch}\frac{l_n(u^n_{ik})}{a} & \dots & \operatorname{ch}\frac{l_n(u^n_{im})}{a} \\ \operatorname{ch}\frac{l_n(u^n_{ik})}{a} & 1 & \dots & \operatorname{ch}\frac{l_n(u^n_{km})}{a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{ch}\frac{l_n(u^n_{im})}{a} & \operatorname{ch}\frac{l_n(u^n_{km})}{a} & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

($n-2$ – мерное пространство постоянной, отрицательной кривизны $K = -\frac{1}{a^2}$), где $a^2 = g_{pq}x^p(i)x^q(i)$

$$\cos\frac{l_n(u^n_{ik})}{a},\quad \operatorname{ch}\frac{l_n(u^n_{ik})}{a} = \frac{1}{a^2}g_{pq}x^p(i)\cdot x^q(k)$$

g_{pq} – произвольная, симметрическая $(n-1)\times(n-1)$ – матрица, $(p,q = 1,2,\dots,n-1)$.

При $a \to \infty$ имеем:

$$\varphi^{\circ}_{\mu}(u^{n}_{ik},\ldots,u^{n}_{em}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & f^{2}_{\mu}(u^{n}_{ik}) & \ldots & f^{2}_{\mu}(u^{n}_{im}) \\ 1 & f^{2}_{\mu}(u^{n}_{ik}) & 0 & \ldots & f^{2}_{\mu}(u^{n}_{km}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & f^{2}_{\mu}(u^{n}_{im}) & f^{2}_{\mu}(u^{n}_{km}) & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (7$$

где $f^{2}_{\mu}(u^{n}_{ik}) = g_{\sigma\rho}\left(x^{\sigma}(i) - x^{\sigma}(k)\right)\left(x^{\rho}(i) - x^{\rho}(k)\right) \quad (\sigma,\rho = 1,2,\ldots,n-2)$

При $f_{\mu}(u^{n}_{ik}) = -f_{\mu}(u^{n}_{ki})$ решение системы (2) имеет следующий вид:

$n = 2p-1$

$$\varphi_{\mu}(u^{n}_{ik},\ldots,u^{n}_{em}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 0 & f_{\mu}(u^{n}_{ik}) & \ldots & f_{\mu}(u^{n}_{im}) \\ -1 & -f_{\mu}(u^{n}_{ik}) & 0 & \ldots & f_{\mu}(u^{n}_{km}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -f_{\mu}(u^{n}_{im}) & -f_{\mu}(u^{n}_{km}) & \ldots & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

где $f_{\mu}(u^{n}_{ik}) = x^{\sigma}(i)\,y_{\sigma}(k) - x^{\sigma}(k)\,y_{\sigma}(i) + x^{\circ}(i) - x^{\circ}(k); \quad (\sigma = 1,2,\ldots,p-2)$

$n = 2p$

$$\varphi_{\mu}(u^{n}_{ik},\ldots,u^{n}_{em}) = \begin{vmatrix} 0 & f_{\mu}(u^{n}_{ik}) & \ldots & f_{\mu}(u^{n}_{im}) & f_{\mu}(u^{n}_{in}) \\ -f_{\mu}(u^{n}_{ik}) & 0 & \ldots & f_{\mu}(u^{n}_{km}) & f_{\mu}(u^{n}_{kn}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -f_{\mu}(u^{n}_{im}) & -f_{\mu}(u^{n}_{km}) & \ldots & 0 & f_{\mu}(u^{n}_{en}) \\ -f_{\mu}(u^{n}_{in}) & -f_{\mu}(u^{n}_{kn}) & \ldots & -f_{\mu}(u^{n}_{en}) & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

где $f_{\mu}(u^{n}_{ik}) = x^{\sigma}(i)\,y_{\sigma}(k) - x^{\sigma}(k)\,y_{\sigma}(i). \quad (\sigma = 1,2,\ldots,p-1)$

§ 3. Алгорифм разделения.

Итак, мы видим, что из одного только факта существования феноменологической симметрии следует существование первичных физических законов (4) – (9), вид которых определяется заданием типа исходной феноменологической симметрии. Все эти законы определены с точностью до произвольной функции одной переменной $f_\mu(x)$, зависящей от выбора той или иной измерительной операции μ. Чтобы найти эту функцию, представим её в виде полинома[1] степени z

$$f_\mu(u_{i\alpha}^\mu) = c_0^\mu + c_1^\mu u_{i\alpha}^\mu + c_2^\mu (u_{i\alpha}^\mu)^2 + \ldots + c_z^\mu (u_{i\alpha}^\mu)^z \qquad (10)$$

Подставляя (10) в одно из (4) – (9) (для определенности возьмём, например, (4)) и используя известные из опыта значения $u_{i\alpha}^\mu$, мы получаем одно уравнение для определения $z+1$ неизвестных $c_0^\mu, c_1^\mu, \ldots, c_z^\mu$. Но так как первичный физический закон (4) справедлив для любых $\mathfrak{M}_m = \{i, \kappa, \ldots, \ell\}$ и $\mathfrak{N}_n = \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma\}$, то выбирая каждый раз новые $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$ и используя соответствующие им экспериментальные значения $u_{i\alpha}^\mu$ мы будем получать новые уравнения с теми же неизвестными $c_0^\mu, c_1^\mu, \ldots, c_z^\mu$. Повторяя эту операцию достаточно большое число раз, мы получим число уравнений значительно превышающее число неизвестных. При этом может возникнуть альтернатива – полученная система уравнений может оказаться либо несовместной, либо совместной.

Если имеет место первая ситуация, то это означает, что

I. либо число z взято недостаточно большим (увеличение его до-

---

[1] Так как каждый результат $u_{i\alpha}^\mu \pm \varepsilon$ известен с конечной точностью ε, то для представления $f_\mu(u_{i\alpha}^\mu)$ с соответствующей точностью $\delta(\varepsilon)$ в виде (10) достаточно взять конечное число членов разложения z.

жно приводить к сближению решений, полученных из разных, групп уравнений),

2. либо данная экспериментальная операция μ не причастна к изучаемым отношениям и нужно искать новую опытную процедуру (как раз здесь и потребуется особая "физическая" интуиция исследователя),

3. либо сделанное априори предположение о типе феноменологической симметрии неверно и нужно выбрать другой тип симметрии (и в этом должна помочь "физическая" интуиция).

Если же написанная система окажется совместной при любом выборе $\mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}_n \subset \mathfrak{N}$, то это, во-первых, подтверждает сделанное априори предположение о типе феноменологической симметрии, и во-вторых, даёт возможность найти $c_0^\mu, c_1^\mu, \ldots, c_2^\mu$ и следовательно $f_\mu(x)$.

Здесь следует заметить, что в некоторых случаях выражение первичного физического закона $\Phi = 0$ однородно относительно $f_\mu(u_{i\kappa}^\mu)$ (например (4), (7) – (9)) и поэтому нельзя найти все коэффициенты $c_0^\mu, c_1^\mu, \ldots, c_2^\mu$. В этом случае мы должны объявить два произвольных элемента $O \in \mathfrak{M}$ и $O \in \mathfrak{N}$ "эталонами" и положить $f_\mu(u_{oo}^\mu) = 1$, что фактически означает выбор определенной единицы измерения для $f_\mu(u_{i\kappa}^\mu)$.

§ 4. Определение инвариантного промежутка времени.

Рассмотрим множество произвольных событий $i, \kappa, \ldots, \ell, \ldots$, происходящих в одной точке пространства. Пусть μ – некоторая измерительная операция, сопоставляющая каждой паре событий (i, κ)

число τ_{ik}^{m}, называемое квазивременем (в качестве τ_{ik}^{m} можно брать не только показания "обычных" часов, но и, например, путь, пройденный свободно падающим телом к моменту k, если его движение началось в момент i, или уменьшение веса радиоактивного вещества, взятого в момент i в количестве m_0). Итак, множество событий $\mathfrak{M}$ может быть охарактеризовано матрицей $\| \tau_{ik}^{m} \|$. Возникает вопрос – существуют ли какие-нибудь ограничения, накладываемые на вид этой матрицы, и можно ли говорить о строгом физическом законе, которому подчиняется множество произвольных событий, происходящих в одной точке пространства.

Этот закон существует и заключается в следующем: множество произвольных событий, происходящих в одной точке пространства обладает феноменологической симметрией ранга 3 с антисимметрической метрикой.

Это значит, что существует такая монотонная функция $f_m(\tau_{ik}^{m}) = t_{ik}$, которая позволяет по τ_{ik}^{m} найти $t_{ik} = -t_{ki}$, удовлетворяющие каноническому соотношению:

$$\varphi(t_{ik}, t_{ie}, t_{ke}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & t_{ik} & t_{ie} \\ -1 & -t_{ik} & 0 & t_{ke} \\ -1 & -t_{ie} & -t_{ke} & 0 \end{vmatrix} = (t_{ik} + t_{ke} + t_{ei})^2 = 0. \quad (11)$$

Чтобы найти эту функцию мы должны, в соответствии с вышесказанным, выбрать эталонную пару событий $(0, 1)$ и представив искомую функцию $f_m(\tau_{ik}^{m}) = t_{ik}$ в виде полинома степени 2, решить следующую систему $2+1$ линейных уравнений:

$$\forall\, i, \kappa, \ell \in \mathfrak{M},$$

$$C_0^\mu + C_1^\mu \tau_{01}^\mu + C_2^\mu (\tau_{01}^\mu)^2 + \ldots + C_2^\mu (\tau_{01}^\mu)^2 = 1,$$

$$C_0^\mu + C_1^\mu (\tau_{i\kappa}^\mu + \tau_{\kappa\ell}^\mu - \tau_{i\ell}^\mu) + C_2^\mu \left[(\tau_{i\kappa}^\mu)^2 + (\tau_{\kappa\ell}^\mu)^2 - (\tau_{i\ell}^\mu)^2 \right] + \ldots \tag{12}$$

$$\ldots + C_2^\mu \left[(\tau_{i\kappa}^\mu)^2 + (\tau_{\kappa\ell}^\mu)^2 - (\tau_{i\ell}^\mu)^2 \right] = 0.$$

Таким образом, исходная матрица $\| \tau_{i\kappa}^\mu \|$ должна быть такова, чтобы система уравнения (I2) была бы совместной при любом выборе трех событий $i, \kappa, \ell \in \mathfrak{M}$ (этому требованию всегда можно удовлетворить, если положить $\tau_{i\kappa}^\mu = \chi_\mu (t_i - t_\kappa)$, где $\chi_\mu(x)$ – произвольная монотонная функция одного переменного, а t_i – произвольный параметр). Этот факт имеет фундаментальное для всей физики значение и является непосредственно измеряемым критерием существования одномерного, антисимметрического времени, как инвариантной характеристики отношений между произвольными событиями.

ЛИТЕРАТУРА:

I . Ю.И.Кулаков, К теории физических структур, изд.НГУ, I9

О НОВОМ ВИДЕ СИММЕТРИИ, ЛЕЖАЩЕЙ В ОСНОВАНИИ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОГО ТИПА.

> Симметрия – в широком или узком смысле в зависимости от того, как вы определите значение этого понятия, – является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство.
>
> Герман Вейль.

Нами установлено, что подавляющее большинство физических объектов находится в одних и тех же специфических отношениях. Эти отношения допускают строгую математическую формулировку и, благодаря этому, представляют собой по сути дела, то единственное реально существующее явление, из которого все физические законы феноменологического типа могут быть получены как далеко нетривиальные следствия. Эти отношения, названные нами физической структурой [I], выражают факт существования особого вида симметрии, имеющей место в мире физических объектов.

Каждый тип такой "феноменологической симметрии" определяется, вообще говоря, заданием $h+1$ кортежей длины k над множеством целых положительных чисел

$$\omega = \langle p, q, \ldots, z \rangle,$$

$$\rho_j = \langle m_j, n_j, \ldots, \ell_j \rangle \qquad (j = 1, 2, \ldots, h)$$

$$m_j \geq p, \quad n_j \geq q, \quad \ldots, \quad \ell_j \geq z$$

и целого положительного числа S, называемых, соответственно кратностью, рангом и порядком физической структуры $\mathfrak{S}_{\omega,\rho,s}$.

Однако практически всё многообразие физических законов сводится к следующим трём простейшим типам феноменологической симметрии:

I. Феноменологическая симметрия простейственного типа:

Имеется одно множество физических объектов $\mathfrak{M}$. Любым двум объектам этого множества $i,\kappa\in\mathfrak{M}$ с помощью некоторой экспериментальной процедуры сопоставляется одно число $a_{i\kappa}$. Если из множества $\mathfrak{M}$ выбрать произвольным образом подмножество $\mathfrak{M}_m\subset\mathfrak{M}$, состоящее из m элементов, то между $\frac{1}{2}m(m-1)$ экспериментальными данными $a_{i\kappa}$, относящимися к любой паре $(i,\kappa)\in\mathfrak{M}_m^{\circ}\times\mathfrak{M}_m$, имеет место одна $(h=1)$ аналитическая зависимость

$$\varphi(a_{i\kappa},a_{i\rho},\dots,a_{\rho\tau})=0, \qquad (1)$$

вид которой не зависит от выбора подмножества $\mathfrak{M}_m$.

2. Феноменологическая симметрия механического типа:

Имеется два множества физических объектов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Каждой паре объектов (i,α) (одному элементу $i\in\mathfrak{M}$ и одному элементу $\alpha\in\mathfrak{N}$) с помощью некоторой экспериментальной процедуры сопоставляется одно число $a_{i\alpha}$. Если из множества $\mathfrak{M}$ выбрать произвольным образом подмножество $\mathfrak{M}_m$, состоящее из m элементов, а из множества $\mathfrak{N}$ – подмножество $\mathfrak{N}_n$, состоящее из n элементов, то между $m\cdot n$ экспериментальными значениями $a_{i\alpha}$, относящимися к любой паре $(i,\alpha)\in\mathfrak{M}_m\times\mathfrak{N}_n$, имеет место одна $(h=1)$ аналитическая зависимость

$$\psi(a_{i\alpha},a_{i\beta},\dots,a_{\kappa\rho})=0, \qquad (2)$$

вид которой не зависит от выбора подмножеств $\mathfrak{M}_m$ и $\mathfrak{N}_n$.

3. Феноменологическая симметрия релятивистского типа:

Имеется одно множество физических объектов $\mathfrak{M}$. Каждому объекту этого множества i с помощью некоторой экспериментальной процедуры сопоставляется S чисел $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \ldots, a_i^{(S)}$. Если из множества $\mathfrak{M}$ выбрать произвольным образом подмножество $\mathfrak{M}_{S+1}$, состоящее из $S+1$ элемента, то между $S(S+1)$ экспериментальными значениями $a_i^{(e)}$ имеет место одна аналитическая зависимость

$$\Phi\left(a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \ldots, a_i^{(S)}; \ldots; a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \ldots, a_k^{(S)}\right) = 0, \quad (3)$$

вид которой не зависит от выбора подмножества $\mathfrak{M}_{S+1}$.

Можно показать, что требование существования соотношения (I) (или (2), или (3)), инвариантного относительно выбора соответствующего подмножества, является достаточным не только для нахождения вида функции Φ, представляющей собой физический закон в его наиболее естественном виде, но и для получения допустимого набора экспериментальных значений a_{ik} (или $a_{i\alpha}$, или $a_i^{(e)}$).

В следующих статьях мы приведем математический аппарат, возникающий при описании феноменологической симметрии и в качестве его приложений получим закон Ньютона, первое и второе начала термодинамики, принцип постоянства скорости света и многие другие физические утверждения обычно принимаемые без доказательства.

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ФИЗИЧЫСКИХ СТРУКТУР.

Высшим долгом физиков является поиск тех общих элементарных законов, из которых путем чистой дедукции можно получить картину мира.

Альберт Эйнштейн.

§ I. Отношения как исходное понятие научной картины мира.

Высшая цель науки состоит в создании простой и ясной картины мира. Это необходимо не только для того, чтобы обрести власть над природой, подчинить ее, преследуя чисто утилитарные цели, но и для того, чтобы удовлетворить извечное желание человека в познании Мира, которое, говоря словами Эйнштейна "можно сравнить с тоской, неотразимо влекущей горожанина из окружающей его шумной и мутной среды к тихим высокогорным ландшафтам, где взгляд далеко проникает через неподвижный чистый воздух, теряясь спокойными очертаниями, которые кажутся предназначенными для вечности".

Созданием картины мира занимаются, каждый по своему ,экономист и биолог , социолог и химик, физик и лингвист. Различны их пути. Но есть нечто общее, присущее в той или иной степени, каждому из них. Это первый этап. Он требует от исследователя

глубочайшей интуиции и состоит в объединении всех изучаемых объектов в одно или несколько множеств с более или менее четко определенными элементами. (Канторовское определение множества как " объединение в одно целое объектов хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью" с самого начала исключает из рассмотрения множества, элементы которых плохо определены; так нельзя говорить , например, о множестве идей. Кроме того, необходимо , чтобы элементы были различны между собой).

Свойства элементов любого множества проявляются лишь в отношении их друг к другу.

Таким образом, построить научную картину мира - это значит найти такие общие принципы, которые позволили бы унифицировать различные отношения , специфические для изучаемых объектов.

Общая концепция , которой мы будем последовательно придерживаться, сводится к следующему:

Предметом изучения любой научной теории являются не сами объекты материального мира, а отношения между ними.

Эта концепция берет начало от метода индукции Бэкона и близка основным взглядам Ньютона , сформулированной им во втором издании " Математических начал натуральной философии?"Я не измышляю гипотез (*Hypotheses non fingo*), - пишет он в последнем "Общем поучении",- Все же, что не выводится из явлений, должно называться гипотезой; гипотезам же метафизическим, физическим, механическим, скрытным свойствам не место в экспериментальной философии."

Согласно этой концепции вопрос, например, , о том, является ли свет волной или потоком световых корпускул лишен

всякого смысла.

Он должен быть сформулирован по-другому: в каких отношениях находятся свет и различные объекты материального мира (дифракционные решетки , интерференционные и поляризационные приборы, вещество и элементарные частицы)?

Как известно, ответ при первой постановке вопроса вырастает в целую проблему и " повидимому , нет никаких шансов, - пишут А.Эйнштейн и Л. Инфельд в " Эволюции физики", - последовательно описать световые явления, выбрав только какую-либо одну из двух возможных теорий. Положение таково, что мы должны применять иногда одну теорию , а иногда другую, а время от времени и ту и другую. Мы встретились с трудностью нового рода. Налицо две противоречивые картины реальности, но ни одна из них в отдельности не объясняет всех световых явлений, а совместно они их объяснят! Как возможно соединить обе эти картины? Как понять обе эти совершенно различные стороны света? Не легко разрешить эту новую трудность. Опять мы встречаемся с фундаментальной проблемой... Здесь мы снова имеем дело с проблемой , для решения которой нужны новые принципы (подчеркнуто нами Ю.К.)".

Г ли же , отбросив всякие гипотезы о природе света, стать на точку зрения отношений , то тот факт, что один и тот же объект (в данном случае, свет) может находиться в различных отношениях с другими материальными объектами (с дифракционными, интерференционными, поляризационными и т.п. приборами с одной стороны, и с веществом и элементарными частицами с другой),

не только не покажется парадоксальным, но будет выглядеть вполне естественным и даже тривиальным . В самом деле, ведь не видим же мы ничего особенного в том, что одно и то же материальное тело (например, металлический шарик) находится в одних отношениях с множеством пружинок, сообщающих ему различные ускорения, и в других отношениях с набором термостатов и адиабатических оболочек, с помощью которых мы можем переводить его из одного термодинамического состояния в другое.

§ 2. Возможно ли строгое определение исходных понятий?

> Прежде всего мы оказываемся перед трудностями, когда хотим дать определение основным понятиям... Эти затруднения непреодолимы
>
> Анри Пуанкаре

Итак , первый шаг на пути познания мира состоит в объединении всех изучаемых объектов в одно или несколько множеств. Уже на этом этапе мы сталкиваемся с большим числом терминов , предназначенных для обозначения тех или иных объектов материального мира, объединяемых в различные множества - события,тела, источники тока, источники поля, термодинамические состояния , проводники , свет, вещество, элементарные частицы и т.д. и т.п.

Эти термины носят исключительно интуитивный характер, мы не можем дать им какое -либо определение, не рискуя впасть в тавтологию (например, событие - это явление, или событие - это то, что произошло).

Единственное , что мы можем сделать, это указать на реальные объекты и сказать: " Вот это и это - источники тока, а это и это - проводники". Но можно себе представить насколько расплывчатой и неопределенной выглядела бы наука, если бы ее первичными понятиями являлись упомянутые выше объекты. Эти опасения наиболее отчетливо и откровенно сформулировал Дж.Синг: " О существующем в действительности неравенстве $M \neq \Phi$ (Φ- описание физических объектов в терминах измерительных операций , M - описание физических объектов на языке математики, Ю.К.) лучше не говорить громче чем шепотом, ибо это чрезвычайно опасно, - пишет он в своей книге " Общая теория относительности". - Стоит поверить этому неравенству, как тут же окажется разорванной связь между математикой и физикой, и как та, так и другая , станут бесплодными, потеряв возможность взаимного оплодотворения. Здесь мы позволим себе сказать об этом шепотом лишь в качестве извинения перед читателем, который надеялся увидеть математику и физику общей теории относительности, связанными прочными цепями ясной и последовательной логичной мысли. Это невозможно. Сначала и до конца нам неизбежно придется изворачиваться , действуя наобум. И если в этой книге будут некорректности при различении M и Φ , то их будет не больше , чем допущено (и с необходимостью должно быть допущено) во всех аналогичных книгах. Такого рода начальное положение присуще не только общей теории относительности; формула $M \neq \Phi$ вечный спутник любой области математической физики".

К счастью, такая пессимистическая точка зрения является ошибочной.

Поскольку предметом изучения научной теории являются не сами объекты реального мира, которые в принципе не могут быть последовательно и логически строго определены, а отношения между ними, то вся проблема сводится к строгому определению отношений между элементами одного или нескольких множеств произвольной природы.

И вот оказывается, что несмотря на то, что само понятие множества остается неопределенным, можно дать предельно строгое определение понятию отношения, в котором находятся его элементы.

Отметим, что с понятием отношения тесно связаны наиболее фундаментальные понятия физики, - физические величины (расстояние, время, энергия, масса, температура, энтропия, электрический заряд, тензор электромагнитного поля и т.д.). Таким образом, не имея возможности дать содержательные определения терминам, обозначающих объекты реального мира, мы, тем не менее, можем и обязаны дать предельно строгие определения основным физическим понятиям. Это необходимо сделать, т.к. в противном случае все величественное здание физики оказалось бы построенным на песке.

Так, рассматривая множество событий $\mathfrak{M} = \{i, \kappa, \ldots, \ell, \ldots\}$, происходящих в одной и той же точке пространства и анализируя результаты соответствующего эксперимента (эксперимент такого рода мы будем в дальнейшем называть фундаментальным) мы сможем заметить, что между всеми произвольными событиями

m , n , p , существуют определенные отношения. При этом оказывается, что эти отношения инвариантны относительно выбора трехэлементного подмножества $\mathfrak{M}_3 = \{m, n, p\}$.

Факт существования такого отношения позволяет ввести понятие времени, которое является ни чем иным как инвариантной характеристикой отношений между событиями. А так как это отношение не зависит от конкретного выбора событий , то и возникло представление о времени как о самостоятельном объекте (что-то вроде " временного потока"), существующем независимо от самих событий.

Точно так же обстоит дело и с другими физическими понятиями, точный смысл которых может быть выяснен только с точки зрения инвариантных отношений, существующих между объектами материального мира.

§ 3. Особая роль математики в построении научной картины мира

" Мерой научности какой-либо доктрины служит применимость в ней математики"

Иммануил Кант.

В свете вышесказанного постараемся понять ту особую роль, которую играет математика в создании научной картины мира. Как мы уже указывали выше, все науки, за исключением математики, занимаются изучением конкретных отношений, в которых находятся объекты реального мира.

Что же касается математики, то ее своеобразие состоит в том, что главной ее задачей является

изучение и унификация отношений, существующих между элементами абстрактных множеств, отношений как таковых, взятых в чистом виде, безотносительно к каким-либо конкретным объектам.

(Эти отношения , взятые сами по себе, безотносительно к чему-либо, называются математическими структурами). Любопытно, что в рамках самой математики существуют критерии, позволяющие выделить из огромного разнообразия всех мыслимых структур интересные, богатые структуры в отличие от бедных и тривиальных . При этом оказывается, что большинство нетривиальных математических структур допускает интерпретацию на языке объектов материального мира. Более того, мы склонны думать, что любая научная дисциплина, изучающая конкретные отношения между материальными объектами , в конце концов достигает такого уровня, на котором реальные отношения очищенные от всего внешнего , случайного и несущественного , оказываются тождественными с одной из многочисленных математических структур, априорно существующих в чистой математике.

Таким образом, особая роль математики в построении научной картины мира состоит в том, что она поставляет для различных разделов науки своего рода полуфабрикаты , в виде разнообразных математических структур вместе с соответствующими аксиомами, теоремами и эффективными правилами вывода.

Что же касается задачи любой конкретной науки, то она состоит в установлении соответствия между конкретными объектами

реального мира и абстрактными множествами с заданными на них математическими структурами, в интерпретации соответствующих математических структур на языке объектов материального мира.

§ 4. Что такое математика ?

> В своей аксиоматической форме современная математика представляется скоплением абстрактных форм-математических структур, и оказывается (хотя по существу и неизвестно, почему), что некоторые аспекты экспериментальной действительности как будто в результате предопределения укладываются в некоторые из этих форм.
>
> Н. Бурбаки

Чтобы понять, в чем смысл и значение фундаментального для всей излагаемой ниже теории, понятия физической структуры, нам придется начать с вопроса о сущности математики, о природе математических объектов, об определении математических структур. При этом мы должны сразу же оговориться, что этот параграф отнюдь не претендует на то, чтобы дать точное представление об истинном положении дел в математике. Здесь пойдет речь лишь о весьма грубом - схематическом и идеализированном приближении, которое, тем не менее , оказывается достаточным для понимания общей идеи, положенной в основу излагаемой ниже теории.

I. Развитие взглядов на природу математических объектов

Для того, чтобы лучше представить себе современную точку зрения на математический мир в целом, рассмотрим последовательные этапы развития представлений о природе математических объектов:

Первый этап: Классическая концепция.

(от античности до середины XIX века)

Характерной особенностью этого периода является полное единодушие относительно тех объектов, с которыми приходится иметь дело математикам; это - числа, величины и фигуры, мыслимые как идеализированные " абстракции" чувственного опыта и сохраняющие всю разнородность последних. При этом большинство математиков и философов было твердо убеждено в том, что эти объекты не являются произвольным созданием нашего разума; они существуют независимо от нас , как и объекты реального мира, и не в нашей власти придать им произвольные свойства, как не властен физик изменить какой-нибудь закон природы.

Второй этап. Арифметизация классической математики.

(Вторая половина XIX века)

Новый этап развития представлений о природе математических объектов состоит в замене первоначального плюрализма[1] (числа, величины. фигуры) унитарной концепцией , о которой мечтали пифагорейцы (" Все вещи суть числа").

---

1) Плюрализм - мировоззрение, согласно которому в основе мира лежит множество самостоятельных, независимых сущностей.
Унитарный - от фр. *unitaire* - единый.

Дело в том, что к 1870 году после открытия "патологических" фактов в анализе , возникла настоятельная необходимость избавления от всяких следов геометрической интуиции при определении действительных чисел. Благодаря работам Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора, интерпретировавших действительные числа в терминах натурального ряда, эта проблема была блестяще решена. Таким образом удалось арифметизировать (и тем самым полностью узаконить) не только геометрию Евклида, но и неевклидовы геометрии и все новые алгебраические объекты, появившиеся к началу XX века.

Начиная с этого момента натуральные числа стали основой классической математики.

Что же касается природы целых чисел, то большинство математиков начинает склоняться к мысли Гаусса о натуральных числах как об " исключительных творениях нашего разума!" Математики начинают отчетливо сознавать, что в математике вполне законно рассуждать об объектах, не имеющих никакой чувственной интерпретации.

Третий этап. Теоретико-множественная концепция (Начало XX века).

Дальнейшее обоснование арифметики тесно связано с именами Дедекинда и Пеано . В восьмидесятых годах прошлого столетия им удалось сформулировать полную систему аксиом арифметики, согласно которой понятие натурального числа сводится к основным понятиям теории множеств, созданной в конце XIX века гением Кантора. Таким образом, новый этап развития математики происходит под прямым или косвенным влиянием теории множеств. " Если прежде ," - пишут Н. Бурбаки в " Теории множеств", - могли думать

что каждая отрасль математики зависит от специфических интуиций, дающих ей первичные понятия и истины, и потому для каждой от - расли необходим свой специфический формализованный язык, то се- годня мы знаем, что логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника -"Теории множеств". " Теория множеств и ее ближайшие приложения, - отмечает акаде- мик П.С.Александров,- не только образовали новый предмет мате- матического исследования; значение теории множеств оказалось не- измеримо бо́льшим: она дала универсальный новый метод, быстро захвативший всю математику".

Оказалось, далее, что теоретико-множественная концепция располагает столь мощным аппаратом понятий и методов, что мо - жет служить не только фундаментом всей современной математики, но и непосредственно употребляться для описания самых различ- ных наук - от физики до биологии и лингвистики.

Итак, согласно теоретико-множественной концепции единствен- ными математическими объектами являются различные множества, на- деленные теми или иными свойствами.

Эта концепция, удобная при формулировке аксиом отдельных теорий, не смогла , однако, устранить бесформенный хаос в мате- матическом мире в целом (Сколько различных множеств - столько различных теорий).

2. Аксиоматическая и содержательная теории множеств

Понятие множества долгое время рассматривалось как перво- начальное и неопределимое, и было объектом многочисленных спо-

ров, вызванных характером его исключительной общности и весьма туманной природой представлений, которое оно у нас вызывает.

" Трудности исчезли только тогда, - отмечают Бурбаки, - когда исчезло само понятие множества (и с ним все метафизические псевдопроблемы относительно математических " объектов")в результате недавних исследований о логическом формализме. С точки зрения этой концепции единственными математическими объектами становятся, собственно говоря, математические структуры". Но как совместить это утверждение Бурбаки об " исчезновении" понятия множества с их же , приведенным выше , высказыванием о том, что почти вся современная математика может быть получена из единого источника - Теории множеств? Чтобы понять в чем тут дело, необходимо уяснить себе, хотя бы в общих чертах, суть тех радикальных идей, которые связаны с современным этапом развития математики.

Характерной особенностью современной математики является руководящий принцип , согласно которому " природа" математических объектов не играет никакой роли; важны лишь отношения, в которых они находятся . В соответствии с этим принципом в современной формализованной теории все классические математические объекты (действительные и комплексные числа, фигуры , натуральные числа, множества и т.п.) объявляются лишь безликими символами (буквами или термами), лишенными каких-либо свойств. Объектом же изучения становятся различного рода отношения, в которых могут находиться эти символы.

Существующий общий метод изучения этих отношений сводится к введению эффективных правил, позволяющих из произвольной

последовательности символов выделять определенные подклассы, называемые термами, аксиомами, правилами вывода, теоремами и истинными предложениями[1]. В приципе эти правила могут быть произвольными. Однако существует ряд соображений, согласно которым некоторым правилам отдается явное предпочтение перед всеми другими. К соображениям такого рода прежде всего относится требование непротиворечивости. Кроме того существуют критерии, упомянутые в § 3, позволяющие отделить интересные, содержательные правила от неинтересных и бессодержательных. Дело в том, что при одном выборе аксиом, появляется возможность получать все новые и новые теоремы и число их может возрастать до бесконечности Но может случиться и так, что при других правилах мы сможем получить всего несколько тривиальных теорем, а все остальные будут лишь их повторением . Ясно, что интересные (с точки зрения самой же математики) правила в первом случае предпочтительнее бессодержательных правил во втором.

Среди таких немногих, предпочтительных правил, хорошо изученных к настоящему времени , являются правила, на основе которых строится формализованная математическая теория $\mathcal{T}_0$, называемая формальной логикой.

Вводя дополнительные правила , также удовлетворяющие упомянутым выше общим соображениям ; можно получить теорию $\mathcal{T}$ более сильную чем $\mathcal{T}_0$.

На современном этапе существует лишь одна теория $\mathcal{T}$ более сильная чем $\mathcal{T}_0$ и в то же время более слабая чем любая , из -

---

I) Согласно известной теореме Гёделя о неполноте существуют такие формализованные теории, для которых можно построить истинные предложения, не являющиеся теоремами этой теории.

вестная к настоящему времени, конкретная аксиоматизируемая математическая теория. Это формализованная или аксиоматическая Теория множеств, рассматриваемая с чисто синтаксической точки зрения (т.е. с точки зрения возможного расположения символов).

Имеется несколько вариантов систем аксиом, которые могут быть положены в основание, вообще говоря, различных Теорий множеств. Главные из них следующие:

1. Система Цермело – Френкеля и близкая к ней система Бурбаки,
2. система Неймана –Бернайса– Гёделя и
3. логицистическая система Куайна – Вана.

Однако наличие нескольких конкурирующих между собой Теорий множеств вряд ли опасно, по крайней мере до тех пор, пока они не вносят существенных перемен в каждодневную деятельность математиков и физиков.

Аксиоматическая Теория множеств допускает интерпретацию, т.е.наделение рассматриваемых знакосочетаний определенным содержанием. В этом случае говорят о содержательной или " наивной" теории множеств.

Таким образом, в аксиоматической Теории множеств термины " элемент множества" и " множество" означают точные синонимы слов " буква" или " терм" (знакосочетание определенного вида) и бессмыслено говорить о каких-либо свойствах множеств или их элементов. В содержательной же теории термин " множество" является исходным , первоначальным, неопределяемым понятием. С ним связаны интуитивные представления о совокупнос-

ти объектов, обладающих теми или иными " свойствами" и находящихся между собой в неких соотношениях.

Итак, когда Бурбаки говорят об " исчезновении" понятия множества, они имеют в виду возможность сведения туманных понятий" наивной" теории множеств и четко определенным правилам, согласно которым строится аксиоматическая Теория множеств 9.

3. Математические структуры.

Как уже упоминалось, недавние исследования о логическом формализме позволили свести понятия " наивной" теории множеств к определенным отношениям, существующим между различными комбинациями абстрактных символов. Значение этих исследований состоит прежде всего в том, что освобождая терминологию современной математики от каких бы то ни было наглядных образов и интуитивных представлений, удалось выделить в чистом виде , то первичное понятие - математическую структуру, которое, выражая идею отношений, лежит в основании всей современной математики , составляет ее сущность и является могущественным рычагом, позволяющим унифицировать огромные области не только математики, но и физики, в которых , как некогда казалось, царил самый бесформенный хаос.

Если с точки зрения теоретико-множественной концепции главным объектом математики являются множества, элементы которых обладают теми или иными свойствами и находятся в определенных отношениях друг к другу, то согласно современной концепции математических структур единственными объектами изуче -

ния в формализованной математической теории являются отношения, взятые сами по себе, безотносительно к чему-либо . И только после определенной интерпретации мы можем говорить от отношениях между элементами множества, между натуральными числами, между прямой и плоскостью и т.п.

Итак, уточним, что мы понимаем под математической структурой.

Прежде всего отметим, что понятие структуры , тесно связанное с отношениями между абстрактными знакосочетаниями, имеет смысл не в любой формализованной теории, а лишь в теории, более сильной чем Теория множеств $\mathcal{T}$. Это обстоятельство дает нам возможность применять теоретико-множественную терминологию, хотя необходимо иметь в виду, что, строго говоря, невозможно сформулировать общие и точные определения, касающиеся структур, оставаясь в рамках содержательной теории множеств. Мы ограничимся тем, что дадим два определения математической структуры в терминах " наивной" теории множеств: одно очень грубое, другое несколько более строгое.

Задать математическую структуру это значит задать одно или несколько отношений, в которых находятся между собой элементы (или подмножества) некоторого абстрактного множества и указать систему условий (аксиом), которым удовлетворяют данные отношения.

Существенный недостаток этого определения состоит в том, что остается неясным, что понимается под отношением между элементами (или подмножествами) некоторого абстрактного множества.

Не углубляясь в детали, отметим, что задать отношение между двумя элементами двух произвольных множеств A и B, это значит из множества всех подмножеств множества AxB выбрать по определенному правилу один единственный элемент

$$\mathcal{S} \in \mathfrak{B}(A \times B) \qquad (1)$$

Точно так же можно задать определенные отношения между произвольными подмножествами множества A, если выбрать один элемент

$$V \in \mathfrak{B}(\mathfrak{B}(A)) \qquad (2)$$

Итак, задать математическую структуру на исходных множествах A, B, ..., C это значит задать схему построения из $A, B, \ldots, C$ некоторого множества подмножеств $\mathfrak{B}$ (вида (I) или (2)) и ряд правил (аксиом), позволяющих выбрать из $\mathfrak{B}$ единственный элемент - подмножество определенного вида.

Среди огромного разнообразия мыслимых структур к настоящему времени известны только три типа, к которым сводятся все остальные. Это, так называемые, порождающие структуры:

I. Структура порядка, задаваемая схемой

$$\mathcal{S} \in \mathfrak{B}(A \times A)$$

и, играющая чрезвычайно важную роль при рассмотрении отношений, приводящих к понятию натурального числа,

2. алгебраическая структура со схемой

$$\mathcal{F} \in \mathfrak{B}((A \times A) \times A)$$

выражающая идею операции и, наконец

3. топологическая структура, в основе которой лежит схе-

Ма

$V \in \mathfrak{B}(\mathfrak{B}(A))$

непосредственно связанная с интуитивными понятиями непрерывности, окрестности и предела.

4. Современная концепция иерархии структур.

Понятие математической структуры позволяет совершенно по-новому взглянуть на математический мир в целом.

На смену традиционному порядку , который, подобно первым классификациям животных, ограничивался тем, что расставлял рядом друг с другом теории, представляющие наибольшее внешнее сходство, пришел новый упорядочивающий принцип - концепция структур, идущей от простого к сложному , от общего к частному.

Согласно этой концепции все разнообразие изучаемых математикой отношений сводится к некоторым первичным, простейшим отношениям, к так называемым порождающим структурам.

Три структуры - структура порядка, алгебраическая и топологическая структуры являются теми основными кирпичиками, из которых построено величественно строгое и богатое своим разнообразием здание математики.

Даже оставаясь в рамках одной порождающей структуры, мы сталкиваемся с достаточным разнообразием частных структур, т.к. наиболее общая структура может быть значительно обогащена за счет добавления тех или иных аксиом. Но особенно разнообразными являются теории, построенные на сложных структурах— своего рода смешанных браках, в которые входит одновременно несколько порождающих структур, но не просто совмещенных друг с другом, а

органически скомбинированных при помощи одной или нескольких связующих их аксиом.

§ 5. Исчерпали ли себя классические разделы теоретической физики ?

" Исследования, имеющие исходным пунктом общие понятия, нужны прежде всего для того, чтобы движению вперед и успехам в познании связи вещей не препятствовали ограниченность понятий и укоренившиеся предрассудки".

Риман.

В настоящее время, несмотря на серьезные трудности в области сильных взаимодействий, теоретическая физика продолжает бурно развиваться. Особое место, попрежнему , занимают работы по теории элементарных частиц, так как ни у кого не возникает сомнения в том, что именно здесь сосредоточены проблемы, связанные с наиболее глубокими физическими принципами. Что же касается остальных традиционных разделов теоретической физики, ставших уже классическими, таких как механика, специальная теория относительности, термодинамика, электродинамика, квантовая механика, то интерес к ним постепенно угас и подавляющее большинство работ в этой области носит исключительно утилитарный характер.

Действительно, согласие перечисленных разделов теоретической физики с экспериментом настолько убедительно, а математический аппарат их настолько хорошо разработан, что всякая попытка пересмотреть принципиальную сторону теории с целью ее улучшения,

заранее кажется обреченной на неудачу.

И тем не менее, прежде чем хоронить, разумеется, со всеми подобающими почестями, многие разделы теоретической физики как исчерпавшие себя в идейном отношении, стоит еще раз задуматься над их эвристическим содержанием.

В самом деле, ценность по настоящему глубокой физической теории не исчерпывается ее утилитарным значением - способностью связывать между собой различные известные физические явления и предсказывать новые. Последовательная физическая теория обладает еще и эвристической ценностью - в ней заложены , часто в скрытой форме, некоторые глубокие физические принципы, которые при умелой экстраполяции за пределы данной теории могут привести к созданию нового формализма или стать исходным пунктом новых физических идей.

Вспомним, например, гамильтонову формулировку классической механики (функции Лагранжа и Гамильтона, скобки Пуассона, уравнение Гамильтона - Якоби, адиабатические инварианты и т.п.) Представляя собой , по сути дела, лишь новую формулировку известных законов Ньютона, гамильтонов формализм явился наиболее адекватным аппаратом для формулировки квантовой механики и тем самым , фактически подготовил осуществление грандиозной революции в естествознании.

Утилитарная сторона классических теорий действительно доведена до совершенства; трудности, которые здесь имеются, носят почти исключительно математический характер. Что же касается эвристического содержания отдельных разделов теоретической физики, то даже для классических теорий эта сторона воп-

роса остается совершенно неразработанной.

Как довольно ядовито подметил Дж.Синг: " Физики сравнительно мало задумываются над тем, почему и как они делают то, что они делают , и против этого нельзя сильно возражать, так как человеческая активность подавляется самоанализом.

Однако имеются случаи, когда опасность интеллектуальной путаницы больше опасности самоанализа."

§ 6. Золотой век физики и "архитектурные излишества".

Отсутствие серьезных работ по основаниям физики объясняется отчасти трудностями, возникающими при попытке дать точную формулировку задачи, которая с одной стороны, в отличие от конкретных физических задач, связана с наиболее общими законами, присущими различным физическим теориям, а с другой стороны, в отличие от философии, позволяла бы сформулировать эти закономерности на привычном аналитическом языке уравнений.

С подобной ситуаций в математике впервые столкнулся Эйлер при решении топологической задачи о кенигсберских мостах. Он сразу же осознал, что она не может быть решена обычными методами геометрии, алгебры или комбинаторики, решил ее, но сообщая решение Карлу Эйлеру, писал: "Это решение, по-видимому, имеет мало отношения к математике, и мне непонятно, почему следует скорее от математика ожидать этого решения, нежели от какого-нибудь другого человека, ибо это решение подкрепляется одним только расуждением, и нет необходимости привлекать для нахождения этого решения какие-либо законы, свойственные математике".

Короче говоря, последовательное решение проблемы оснований физики требует особой методики исследования, существенно от -

личной от той, которая выработалась в течение длительного времени при решении конкретных физических задач.

Эйнштейн, как может быть, никто из современных физиков, всю жизнь искал общие принципы, из которых путем чистой дедукции можно было бы получить картину мира.

" На протяжении долгих лет, - писал он, - я всеми силами стремился придавать ясность основаниям науки и совершенствовать их".

Однако своего рода отступничеством от научной веры стало считаться всякое высказывание сомнения в совершенстве признанных трактовок теории. В этом сказались и факты обожествления создателей современной физики и элементы слепой веры, мешающие выявить недостатки трактовки и изложения теорий.

Так, например, построение и изложение специальной теории относительности за шестьдесят лет ее существования упорно сохраняет все недостатки формального и далеко не совершенного в логическом отношении первоизложения. Нелогичность принятого построения этой действительно простейшей из современных теорий, к стыду многочисленной армии нескольких поколений физиков, была отмечена самим же Эйнштейном в конце его жизни. Однако, к этому времени всеобщая вера в совершенство принятого изложения настолько укрепилась, что к замечанию самого создателя теории отнеслись без должного внимания.

Главная же причина такого одностороннего развития теоретической физики, когда на передний план ставится утилитарная сторона дела, состоит в том, что сам вопрос об общих законах

построения физических теорий был просто преждевременным.

Действительно, период, начавшийся созданием специальной теории относительности и современной квантовой механики и закончившийся объяснением лэмбовского сдвига и аномального магнитного момента электрона в квантовой электродинамике, по праву может быть назван "золотым веком" физики. Этот период был замечателен тем, что удивительное согласие результатов теории с экспериментом достигалось формальным решением уравнений, содержащих величины, наши знания о которых ограничены поверхностными, интуитивными представлениями.

Возникла любопытная ситуация: с одной стороны - совершенный математический аппарат, с другой - поверхностная интуиция, от которой нельзя избавиться, когда речь заходит о фундаментальных для всей физики понятиях, таких как длина и время, энергия, электрический заряд и энтропия и т.п.

В связи с этим не может не возникнуть вопрос, вполне естественный для эпохи "золотого века": А нужны ли вообще точные определения исходных физических понятий? Не является ли стремление к логически завершенным физическим теориям своего рода "архитектурным излишеством"?

Действительно, что может дать уточнение и переосмысливание исходных понятий, если уравнения теории, весь ее формализм остаются без изменения? Ведь для того, чтобы получать превосходное согласие выводов теории в экспериментом, нет необходимости вникать в тонкости определений длины и времени, массы и энергии, волновой функции и заряда электрона. Нужно

лишь проявить достаточно изобретательности и извлечь из всемогущих уравнений нужный результат .

§ 7. Необходимость новых физических идей и унификации физических теорий.

Намеки тонкие на то, чего не ведает никто.

М.Ю.Лермонтов.

Но " золотой" век физики кончился. Уравнения квантовой механики , теории относительности и квантовой электродинамики, по-видимому , исчерпали себя. Становится все более очевидным, что построение последовательной теории элементарных частиц возможно лишь на базе новых физических принципов, нового формализма, новой физической картины мира. Но ясно, что " нельзя даже подойти к новой теории, не уяснив себе математической природы старых" (Фр.Дж.Дайсон).

Поэтому одной из очередных задач, стоящих перед современной физикой, является поиск новых физических принципов, с точки зрения которых все известные физические теории являлись бы естественными частными случаями. Имея такую единую формулировку для большинства существующих физических теорий можно надеяться путем умелой экстраполяции выйти за их пределы.

Конечно, не исключена возможность создания " достаточно безумной" физической теории более коротким и простым путем без кропотливого пересмотра всей физики, и особенно ее оснований , снизу доверху. Однако, вполне возможно, что на новом этапе фи-

ании, на этапе фундаментальных преобразований физической картины мира, глубокий анализ общих принципов, упорядочение физических понятий и согласование их с современным уровнем физики в целом, может оказаться полезным в создании нового формализма.

Итак, прежде чем строить новую теорию полезно знать, как построены старые классические теории.

Но разве наши знания традиционных разделов теоретической физики являются недостаточными? Эти знания утилитарны. Они вполне достаточны для объяснения почти любого физического явления, взятого из соответствующей области, но они недостаточны для установления общих физических принципов, из которых формализм теории вытекал бы как далеко нетривиальное следствие.

" Пока мы должны признать, - писал Эйнштейн незадолго до смерти, - что не имеем для физики общей теоретической основы, которую можно было бы считать ее логическим фундаментом",

Другим немаловажным обстоятельством, требующим пересмотра существующих физических теорий с точки зрения их унификации, является проблема преподавания.

Дело в том, что изучение современной физики чрезвычайно затруднено отсутствием общей картины строения физики в целом, генерального плана, на котором каждому разделу теоретической физики было бы отведено свое, вполне определенное место. Отсутствие же такой единой физической картины мира приводит к тому, что исходные аксиомы , лежащие в основании тех или иных разделов физики, воспринимаются как случайные, обусловленные скорее историческими причинами, нежели внутренней необходи-

мостью, что, естественно, не может не вызвать серьезных трудностей при попытке установить истинный характер физических закономерностей, лежащих в основании изучаемой теории.

Изучение физики требует больших усилий еще и потому, что каждый ее новый раздел связан с новыми принципами, никак не связанными с принципами предыдущих разделов, с понятиями, введение которых, как правило, основано только на интуиции, с новыми уравнениями, которые вводятся в теорию без достаточных обоснований.

Ситуация, сложившаяся в современной физике, удивительно сходна с положением дел в математике в начале XIX века. Эварист Галуа писал по этому поводу : " И учебные , и научные книги страдают одним и тем же - отсутствием четкости изложения. Возьмите любую книгу по алгебре , учебную или научную , и вы не найдете в ней ничего кроме хаотического множества теорем, строгость которых представляет странный контраст с общим беспорядком. Кажется, что отдельные соображения обошлись автору так дорого, что у него уже не хватило сил объединить их и что его ум, истощенный идеями, положенными в основу труда, не в состоянии породить еще одну мысль , которая связала бы их воедино. Если вы все-таки встретите какой-нибудь метод, какую-нибудь связь или схему, то они обязательно оказываются фальшивыми и искусственными. Деление на разделы не обосновано, сопоставления произвольны, порядок условен. Этот недостаток, еще более тяжелый, чем отсутствие метода , особенно часто встречается в учебниках".

Наконец, серьезным недостатком существующей аксиоматики, а вместе с ней и изложения современной физики, является отсутствие в ней глубокой, принципиальной связи с экспериментом, именно благодаря которой физика и является наукой о природе. Если же эта связь завуалирована, если ей в аксиоматике отведится третьестепенное место, то изучение физики невольно сводится лишь к усвоению математического аппарата в ущерб овладению высокой культурой физического мышления.

§.8. Три типа отношений между физическими объектами.

Чтобы достигнуть совершенства,
нужно овладеть наукой Единства.
Из древнеиндийского эпоса
("Махабхарата")

Удивительной особенностью материального мира, особенностью, которая не может не поражать исследователя, является существование большого числа различных совокупностей, состоящих из тождественных, принципиально неразличимых, элементов.

Речь идет о разнообразных совокупностях химических соединений, молекул, атомов, ионов, ядер и элементарных частиц.

Так одно и то же химическое соединение (молекула, атом, элементарная частица) может быть получено различными способами, но каждый раз мы будем получать соединения (молекулы, атомы, элементарные частицы), принципиально, неотличимые друг от друга. Кроме того, весьма существенно, что все перечисленные совокупности дискретны, т.е. в принципе не существует семейств, промежуточных между семействами, состоящими, например, из молекул

углекислого газа и молекул воды.

Кстати сказать, Эйнштейн был по-видимому первым, кого поразил факт существования принципиально неразличимых, тождественных электронов. Так, И.Е.Тамм в 1955 году вспоминал об этом замечании Эйнштейна, сделанном в сороковых годах: "Он сказал, что, казалось бы, уже факт существования электрона должен быть достаточным для построения основ общей теории элементарных частиц. Это несомненно гипербола, но она очень характерна для Эйнштейна и поучительно противопоставить ее широко распространенной точке зрения, что решению фундаментальных проблем науки необходимо должно предшествовать накопление огромного количества экспериментальных данных".

С другой стороны, в реальном мире существуют объекты, внешне различные, но по существу близкие друг к другу по своим общим свойствам. Множества, состоящие из таких объектов, мы будем называть феноменологическими (от гр. *φαινόμενον* - явление).

Итак, более строго, множество физических объектов $\mathfrak{M}$ называется феноменологическим, если отношения между двумя объектами $i, \kappa \in \mathfrak{M}$ могут быть охарактеризованы числом $a_{i\kappa}^{\mu}$, представляющим собой результат измерительной операции μ, и если для любого i (при произвольном фиксированном κ) всегда найдется такой объект i', что

$$|a_{i\kappa}^{\mu} - a_{i'\kappa}^{\mu}| \approx \varepsilon^{\mu}$$

где ε^{μ} - абсолютная погрешность измерительной операции μ.

В качестве многочисленных примеров феноменологических множеств можно привести множества тел, событий, проводников, термодинамических состояний, источников тока и т.д. и т.п.

Обозначим через $M_1, M_2, \ldots$, совокупности, состоящие из тождественных объектов, и через $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$, феноменологические множества, состоящие из различных, но обладающих общими свойствами, физических объектов.

(Заметим при этом, что деление всех объектов материального мира на два класса типа M и $\mathfrak{M}$ не является однозначным. Так в зависимости от характера изучаемых отношений некоторые объекты реального мира в одном случае могут быть отнесены к множествам типа M, а в другом - к множествам типа $\mathfrak{M}$. Возьмем, например, какое-либо химическое соединение. Если нас интересует связь между различными термодинамическими состояниями этого вещества, то мы должны отнести его к множествам типа $\mathfrak{M}$. Если же взглянуть на это вещество с точки зрения химии, т.е. рассматривать законы образования и разложения химических соединений, то в этом случае необходимо отнести его к множеству типа M).

Итак, между физическими объектами возможны следующие три типа отношений

$$\mathfrak{M} \longleftrightarrow \mathfrak{M},$$

$$\mathfrak{M} \longleftrightarrow M,$$

$$M \longleftrightarrow M.$$

Важной особенностью отношений типа

$$\mathfrak{M} \longleftrightarrow \mathfrak{M}$$

является их общий , универсальный характер. Это значит, что физические законы, основанные на отношениях этого типа, имеют вид одинаковый для любых элементов соответствующих множеств $\mathfrak{M}$; или , другими словами, инвариантны относительно выбора соответствующих подмножеств множества $\mathfrak{M}$.

Назовем раздел науки, предметом изучения которого являются отношения типа

$$\mathfrak{M} \longleftrightarrow \mathfrak{M}$$

общей физикой, подчеркивая термином " общая " общий , универсальный характер физических законов, рассматриваемых в этом разделе науки.

Что же касается отношений типа $\mathfrak{M} \longleftrightarrow M$

и $M \longleftrightarrow M$,

то раздел науки занимающийся их изучением можно было бы назвать физикой вещества.

В свою очередь физику вещества следует рассматривать как состоящую из двух частей:

I. Классификация дискретных состояний материи (отношения типа $M \longleftrightarrow M$),

2. Динамические свойства вещества (отношения типа $\mathfrak{M} \longleftrightarrow M$).

В первой части различные дискретные объекты (химические соединения, атомы, ионы, молекулы, ядра и элементарные частицы) объединяются в определенные семейства (мультиплеты, супермуль-

плеты), характеризуемые одним или несколь/кими целыми или полуцелыми числами. Эти числа подчиняются неким " законам сохранения " и благодаря этому приобретают определенный физический смысл. Математический аппарат, лежащий в основе такой классификации - это теория неприводимых представлений групп, соответствующих различным видам симметрии.

Так, например, классификация различных дискретных возбужденных состояний атомов, молекул, ионов и ядер осуществляется с помощью моментов количества движения L и спинов S , непосредственно связанных с неприводимыми представлениями группы трехмерных вращений O_3^+ (или точнее группы SU_2).

Что же касается адронов (мезонов и барионов) , то в основу их классификации положена идея унитарной симметрии, приводящая к появлению новых квантовых чисел, таких как гиперзаряд Y, изотопический спин I , $\mathcal{Y}$ - четность, внутренняя четность $\mathcal{P}$ и т.д.

Во второй части рассматривается поведение вещества, помещенного в непрерывно меняющиеся внешние условия (отношения типа $\mathcal{M} \leftrightarrow M$).

Это с одной стороны теория рассеяния элементарных частиц, а с другой - теория физических систем, состоящих из огромного числа частиц (статистическая физика).

Характерной чертой существующего способа описания отношений типа $\mathcal{M} \leftrightarrow M$ является широкое использование наглядных моделей для M (потенциал взаимодействия в нерелятивистской теории рассеяния, лагранжиан взаимодействия в квантовой теории

поля, модели идеального или Ван-дер-Ваальсовского, Бозе- или Ферми-газа, модель ферми-жидкости, добаевская или зонная модели твердого тела и т.п. в статистической физике). Подчеркнем, что зависимости, получаемые при рассмотрении отношений типа $\mathfrak{M} \to M$ (в отличие от отношений типа $\mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$), определяются выбором той или иной модели для M и потому носят существенно индивидуальный, приближенный характер.

§ 9. Физический эксперимент как источник информации об отношениях между физическими объектами

Характерная особенность отношений, существующих между физическими объектами феноменологического типа, состоит в том, что они выражаются на языке аналитических функций, определенных на множестве действительных чисел, получаемых в результате того или иного физического эксперимента.

Так говоря, о физических объектах, принадлежащих, например, к двум феноменологическим множествам $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, мы должны также указать такую измерительную операцию μ, которая каждой паре $i \in \mathfrak{M}$, $\alpha \in \mathfrak{N}$ сопоставляет действительное число $a_{i\alpha}^{r}$.

Если $i, \kappa, \ldots, \ell, \ldots$ и $\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \ldots$ соответственно, элементы множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, то полный набор экспериментальных данных, характеризующих отношения между множествами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, может быть записан в виде, строго говоря, бесконечной матрицы:

$$
\begin{array}{cccc}
a^{r}_{i\alpha} & a^{r}_{i\beta} & \dots & a^{r}_{i\gamma} \dots \\
a^{r}_{k\alpha} & a^{r}_{k\beta} & \dots & a^{r}_{k\gamma} \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a^{r}_{l\alpha} & a^{r}_{l\beta} & \dots & a^{r}_{l\gamma} \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Эта матрица является единственным источником информации об отношениях, существующих между физическими объектами, принадлежащими к множествам $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Отметим, что существует целый класс различных измерительных операций $\mu, \nu, \dots, \lambda, \dots$, приводящих к различным матрицам $a^{r}_{i\alpha}, a^{\nu}_{i\alpha}, \dots, a^{\lambda}_{i\alpha}, \dots$ и тем не менее описывающих одни и те же отношения между множествами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

Как мы увидим в дальнейшем, отношения, в которых находятся реальные физические объекты, чрезвычайно просты, но для их описания необходимо ввести новую, так называемую, физическую структуру.

Эта новая математическая структура не может быть причислена к числу порождающих и потому вопрос о том, насколько плодотворной окажется она с точки зрения чистой математики остается открытым.

Однако ниже мы постараемся показать, какое фундаментальное значение играет эта новая структура для описания, унификации и понимания сущности физических законов.

§ 10. Краткое резюме

Итак, методологическая концепция, лежащая в основании предлагаемого метода исследования физических законов, сводится к следующему:

I. Предметом изучения любой научной теории являются не сами объекты материального мира, а отношения между ними.

2. Главной задачей математики является изучение и унификация отношений, существующих между элементами абстрактных множеств, отношений как таковых , взятых в чистом виде безотносительно к каким-либо реальным объектам.

3. Задача любой конкретной науки состоит а) в установлении соответствия между конкретными объектами реального мира и абстрактными множествами и заданными на них математическими структурами и

в) в интерпретации соответствующих математических структур на языке объектов и измерительных операций материального мира.

4. Терминология , используемая в физике для обозначения реальных физических объектов (события, тела , источники тока, термодинамические состояния, элементарные частицы) необходимо носит приближенный , интуитивный характер.

5. Инвариантные отношения , существующие между физическими объектами, выражаются на языке физических понятий (длина, время, масса, сопротивление, температура, энтропия и т.п.). и соответствующим терминам может быть придан точный смысл.

6. Поиск новых физических идей, нового формализма, новой физической картины мира следует начинать с кропотливого пересмотра всей физики, и особенно ее оснований, снизу доверху.При этом новый взгляд на известные законы может оказаться более полезен, чем создание " достаточно безумной" физической модели.

7. Все физические объекты могут быть разбиты на два класса $\mathfrak{M}$ и M ($\mathfrak{M}$ – класс феноменологических (непрерывных), а M – класс тождественных (дискретных) объектов).

8. Между физическими объектами возможны следующие три типа отношений:

$$\mathfrak{M} \leftrightarrow \mathfrak{M}$$

$$\left.\begin{array}{l} M \leftrightarrow M \\ \mathfrak{M} \leftrightarrow M \end{array}\right\}$$

(Общая физика)

(Физика вещества)

9. Специфика отношений типа $\mathfrak{M} \leftrightarrow \mathfrak{M}$ состоит в том, что они выражаются на языке аналитических функций, определенных на множестве действительных чисел, представляющих собой непосредственный результат физического эксперимента.

ВОПРОСЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР.

Г.Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

Основное уравнение для физической структуры произвольного ранга было предложено Ю.И.Кулаковым [1] и решено им для бинарной структуры ранга (2,2) методом параметризации [2]. Ниже приводятся два способа решения уравнения структуры. Один из них использует метод параметризации, другой состоит в сведении уравнения структуры к обычному функциональному уравнению. Второй способ позволяет рассматривать структуры произвольных кратностей и рангов. Например, найдены решения для тернарной структуры ранга $\langle 4 \rangle$ на одном множестве , для тернарной структуры ранга (3,2) на двух множествах ,

§ 1. Структура ранга (2,2)

Уравнение для бинарной физической структуры ранга (2,2) конструируется по общей схеме [1] . Прямое произведение двух множеств $\mathfrak{M} = \{i, \kappa, \ldots, \ell, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \ldots\}$ однозначно отображается на множество действительных чисел, то есть каждому элементу $(i,\alpha) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется некоторое число $a_{i\alpha}$

$$(i,\alpha) \longrightarrow a_{i\alpha}. \qquad (1)$$

Будем говорить, что на двух множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ отображение (1) реализует физическую структуру ранга (2,2), если существует такая вещественная функция четырех переменных

$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, что

$$\forall i,k \in \mathfrak{M}, \ \forall \alpha,\beta \in \mathfrak{N} \quad \varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0. \tag{2}$$

Предположим, что (2) однозначно разрешимо относительно хотя бы одного из четырех аргументов и функция φ в (2) достаточное число раз дифференцируема. Соотношение (2) представляет собой функциональное уравнение специального вида для φ . Это уравнение было решено, как мы уже отмечали, с использованием метода параметризации. Здесь мы применим второй из отмеченных во вступлении способ решения.

Выделим в множестве $\mathfrak{M}$ произвольное подмножество $\{i,k,l\}$, содержащее три элемента, и запишем (2) для любых двух элементов этого подмножества

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0,$$

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{l\alpha}, a_{l\beta}) = 0,$$

$$\varphi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}, a_{l\alpha}, a_{l\beta}) = 0.$$

Разрешим каждое из этих соотношений относительно третьего аргумента

$$a_{k\alpha} = f(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\beta}), \tag{3}$$

$$a_{l\alpha} = f(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{l\beta}), \tag{4}$$

$$a_{l\alpha} = f(a_{k\alpha}, a_{k\beta}, a_{l\beta}). \tag{5}$$

Подставим (3) в (5) и приравняем к (4)

$$f(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{i\beta}) = f[f(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\beta}), a_{k\beta}, a_{l\beta}]. \tag{6}$$

Соотношение (6) является тождеством. Переобозначим переменные в (6): $x = a_{i\alpha}$, $y = a_{i\beta}$, $z = a_{l\beta}$, $s = a_{k\beta}$

$$f(x,y,z) = f[f(x,y,s),s,z].$$

Таким образом, мы получили обычное функциональное уравнение, совпадающее с уравнением одномерного нестационарного движения [3].

Ниже предлагается способ решения уравнения (7). Продифференцируем (7) отдельно по каждому из четырех аргументов

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial f[\ ]}{\partial f(x,y,s)} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial f[\ ]}{\partial f(x,y,s)} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial f[\ ]}{\partial z},$$

$$0 = \frac{\partial f[\ ]}{\partial f(x,y,s)} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial s} + \frac{\partial f[\ ]}{\partial s}.$$

Выписанные четыре равенства можно рассматривать как систему четырех линейных неоднородных уравнений относительно трёх неизвестных

$$\frac{\partial f[\ ]}{\partial f(x,y,s)}, \quad \frac{\partial f[\ ]}{\partial z}, \quad \frac{\partial f[\ ]}{\partial s}.$$

Для совместности системы уравнений необходимо, чтобы определитель расширенной матрицы этой системы был равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial s} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \cdot \frac{\partial f(x,y,s)}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Положим в (8) $S = const$. Тогда имеем

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} A(x,y) + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} B(x,y) = 0. \quad (9)$$

(9) легко интегрируется методом характеристик

$$f(x,y,z) = \chi [\varphi(x,y), z]. \quad (10)$$

Подставим (10) в (3)

$$a_{k\alpha} = \chi [\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}), a_{k\beta}] \quad (11)$$

Разрешим (11) относительно $\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta})$ и запишем соотношения (3); (4), (5) в новом виде

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) + \psi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0,$$

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) + \psi(a_{e\alpha}, a_{e\beta}) = 0,$$

$$\varphi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}) + \psi(a_{e\alpha}, a_{e\beta}) = 0$$

куда следует

$$\varphi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = -\psi(a_{k\alpha}, a_{k\beta})$$

Таким образом, соотношение структуры (2) может быть представлено в виде

$$\psi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) - \psi(a_{k\alpha}, a_{k\beta}) = 0. \qquad (12)$$

Аналогично из условия справедливости (2) для любых двух элементов из подмножества $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathfrak{N}$ имеем другую возможную форму записи соотношения структуры (2)

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{k\alpha}) - \varphi(a_{i\beta}, a_{k\beta}) = 0. \qquad (13)$$

Реализация двух возможных вариантов (12) и (13) налагает некоторые ограничения на функции двух переменных ψ и φ. Обозначим $x = a_{i\alpha}$, $y = a_{i\beta}$, $s = a_{k\alpha}$, $t = a_{k\beta}$. В новых обозначениях перепишем (12) и (13)

$$\psi(x, y) - \psi(s, t) = 0 \qquad (14)$$

$$\varphi(x, s) - \varphi(y, t) = 0 \qquad (15)$$

(14) и (15) задают в неявном виде, например, t как одну и ту же функцию переменных x, y, s

$$t = \chi_1[\psi(x,y), s] = \chi_2[\varphi(x,s), y]. \qquad (16)$$

По переменным x, y, s (16) является тождеством. Продифференцируем (16) отдельно по x, y, s:

$$\frac{\partial \chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial \psi(x,y)} \cdot \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial \varphi(x,s)} \cdot \frac{\partial \varphi(x,s)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial \psi(x,y)} \cdot \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial s} = \frac{\partial \chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial \varphi(x,s)} \cdot \frac{\partial \varphi(x,s)}{\partial s}.$$

Рассмотрим эти три равенства как систему трёх линейных неоднородных уравнений относительно следующих двух неизвестных

$$\frac{\partial \chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial \varphi(x,s)}, \qquad \frac{\partial \chi_2[\varphi(x,s),y]}{\partial y}.$$

Для совместности уравнений необходимо, чтобы определитель расширенной матрицы системы был равен нулю

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial \psi(x,y)} \cdot \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial \varphi(x,s)}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial \chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial \psi(x,y)} \cdot \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} & 0 & 1 \\ \frac{\partial \chi_1[\psi(x,y),s]}{\partial s} & \frac{\partial \varphi(x,s)}{\partial s} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (17)$$

Положим в (17) $x = a = const$, $\psi(a,y) = u$

$$\psi_x(a,y) = A(u), \qquad \frac{\varphi_x(a,s)}{\varphi_s(a,s)} = -B(s).$$

Раскрывая определитель (17), можем записать

$$\frac{\partial \chi_1(u,s)}{\partial u} A(u) + \frac{\partial \chi_1(u,s)}{\partial s} B(s) = 0.$$

Решение этого линейного уравнения может быть найдено методом характеристик

$$\chi_1(u,s) = \chi[\varphi(u) + \psi(s)]. \qquad (18)$$

Подставим (18) в (16) и введем некоторые переобозначения функций

$$t = \chi[\psi(x,y) + \psi(s)]$$

или

$$\psi(x,y) = \varphi(t) - \psi(s) \qquad (19)$$

Из сравнения (14) и (19) следует

$$\psi(s,t) = -\psi(s) + \varphi(t)$$

и вместо (14) имеем

$$-\psi(x) + \varphi(y) + \psi(s) - \varphi(t) = 0. \qquad (20)$$

Но, с другой стороны, (20) может быть записано в виде (15), то есть

$$\varphi(x,s) = -\psi(x) + \psi(s)$$

$$\varphi(y,t) = -\varphi(y) + \varphi(t)$$

откуда

$$\varphi(x) = \psi(x).$$

Таким образом, получаем окончательную форму записи соотношения структуры (2)

$$\psi(a_{i\alpha}) - \psi(a_{i\beta}) - \psi(a_{k\alpha}) + \psi(a_{k\beta}) = 0. \qquad (21)$$

(21) можно рассматривать как самое общее и единственное решение уравнения (2) бинарной физической структуры ранга (2,2). Обычная мультипликативная форма записи решения (21) получается при следующей замене функций

$$\psi(x) = \ln \lambda(x)$$

$$\ln \lambda(a_{i\alpha})\lambda(a_{k\beta}) - \ln \lambda(a_{k\alpha})\lambda(a_{i\beta}) = 0$$

или

$$\lambda(a_{i\alpha}) \cdot \lambda(a_{k\beta}) - \lambda(a_{k\alpha})\lambda(a_{i\beta}) = 0.$$

§ 2. Структура ранга (3,2).

Основное уравнение физической структуры ранга (3,2), согласно [1], имеет вид

$$\forall\, i,k,\ell \in \mathfrak{N}, \quad \forall\, \alpha,\beta \in \mathfrak{N}$$

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{k\alpha}, a_{k\beta}, a_{\ell\alpha}, a_{\ell\beta}) = 0. \qquad (1)$$

Предполагается, что функция φ достаточно гладкая и что (1) однозначно разрешимо относительно хотя бы одного из шести аргументов. Отображение прямого произведения $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ на множество действительных чисел R

$$\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \to R \qquad (2)$$

может быть представлено в параметрическом виде при помощи метода параметризации, предложенного в [2]. Сущность метода заключается в следующем. Зафиксируем в множестве $\mathfrak{M}$ два элемента – эталона, которые условно обозначим цифрами $\{1,2\} \subset \mathfrak{M}$; а в множестве $\mathfrak{N}$ – один эталонный элемент $\{1\} \subset \mathfrak{N}$. Соотношение структуры (1) запишем для подмножеств $\{i, 1, 2\} \subset \mathfrak{M}$ и $\{\alpha, 1\} \subset \mathfrak{N}$, содержащих эталонные элементы,

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i1}, a_{1\alpha}, a_{11}, a_{2\alpha}, a_{21}) = 0 \qquad (3)$$

Вводя обозначения $x_i = \varphi(a_{i1})$, $\xi_\alpha = \psi_1(a_{1\alpha}, a_{2\alpha})$ $\eta_\alpha = \psi_2(a_{1\alpha}, a_{2\alpha})$ и разрешая (3) относительно $a_{i\alpha}$, получаем некоторое параметрическое представление отображения (2)

$$a_{i\alpha} = f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha) \qquad (4)$$

Будем предполагать, что параметры ξ_α, η_α входят в (4) существенным образом, то есть (4) нельзя записать в виде

$$a_{i\alpha} = \chi[x_i, \psi(\xi_\alpha, \eta_\alpha)] \qquad (5)$$

Подставляя (4) в (1), получаем, согласно условию задачи, тождество

$$\varphi[f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha), f(x_i, \xi_\beta, \eta_\beta), \ldots, f(x_c, \xi_\beta, \eta_\beta)] \equiv 0. \qquad (6)$$

Тождество (6) можно рассматривать как выражение функциональной зависимости шести различных функций, в которые специальным образом входят семь переменных. Например,

$$f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha) = \varphi_1(x_i, x_\kappa, x_e, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \xi_\beta, \eta_\beta). \qquad (7)$$

Для осуществления функциональной зависимости (6) необходимо, чтобы любой определитель шестого порядка соответствующей матрицы Якоби был равен нулю.

Введя обозначения, сокращающие запись

$$f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha), \qquad f_x(i\alpha) = \frac{\partial f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha)}{\partial x_i}$$

$$\varphi(i) = \varphi(x_i), \qquad \psi(\alpha) = \psi(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$$

выпишем матрицу Якоби для шести зависимых функций, входящих в (6)

$$\left\| \begin{array}{cccccc}
f_x(i\alpha) & f_x(i\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & f_x(k\alpha) & f_x(k\beta) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & f_x(e\alpha) & f_x(e\beta) \\
f_\xi(i\alpha) & 0 & f_\xi(k\alpha) & 0 & f_\xi(e\alpha) & 0 \\
f_\eta(i\alpha) & 0 & f_\eta(k\alpha) & 0 & f_\eta(e\alpha) & 0 \\
0 & f_\xi(i\beta) & 0 & f_\xi(k\beta) & 0 & f_\xi(e\beta) \\
0 & f_\eta(i\beta) & 0 & f_\eta(k\beta) & 0 & f_\eta(e\beta)
\end{array} \right\| \qquad (8)$$

Приравнивая к нулю каждый из определителей шестого порядка матрицы (8), получаем систему из семи функционально ⁂ дифференциальных уравнений. Для решения этих уравнений воспользуемся методом вторичной параметризации, предложенным Б.Я. Штивельманом в его дипломной работе [4]. Для этого перепишем матрицу (8) для подмножеств $\{i, 1, 2\} \subset \mathfrak{M}$ и $\{\alpha, 1\} \subset \mathfrak{N}$, содержащих эталонные элементы

$$\begin{Vmatrix} f_x(i\alpha) & f_x(i1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_x(1\alpha) & f_x(11) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_x(2\alpha) & f_x(21) \\ f_\xi(i\alpha) & 0 & f_\xi(1\alpha) & 0 & f_\xi(2\alpha) & 0 \\ f_\eta(i\alpha) & 0 & f_\eta(1\alpha) & 0 & f_\eta(2\alpha) & 0 \\ 0 & f_\xi(i1) & 0 & f_\xi(11) & 0 & f_\xi(21) \\ 0 & f_\eta(i1) & 0 & f_\eta(11) & 0 & f_\eta(21) \end{Vmatrix} \qquad (9)$$

Определитель, полученный из матрицы (9) вычеркиванием последней строки, разложим по первому столбцу и приравняем к нулю

$$f_x(i\alpha) f_\xi(i1) A_1(\alpha) + f_\xi(i\alpha) f_x(i1) A_2(\alpha) + f_\eta(i\alpha) f_x(i1) A_3(\alpha) \equiv 0 \qquad (10)$$

(10) есть линейное однородное уравнение в частных производных для функции $f(i\alpha)$, которое может быть проинтегрировано методом характеристик

$$f(i\alpha) = \chi[\varphi(i) + \psi_1(\alpha), \psi_2(\alpha)]. \qquad (11)$$

(11) ранее было получено Б.Я.Штивельманом [4]. Поскольку мы предполагаем, что параметры ξ_α, η_α входят в (11) существенным образом, следует считать функции $\psi_1(\alpha)$ и $\psi_2(\alpha)$ независимыми, то есть

$$\psi_{1\xi}(\alpha)\,\psi_{2\eta}(\alpha) - \psi_{1\eta}(\alpha)\,\psi_{2\xi}(\alpha) \not\equiv 0$$

Подставим (11) в матрицу (8). Из условия обращения в нуль каждого определителя шестого порядка матрицы (8) найдём ограничения на функцию χ в (11).

при подстановке воспользуемся обозначением

$$s = \varphi(i) + \psi_1(\alpha), \qquad t = \psi_2(\alpha). \tag{12}$$

После элементарных преобразований приходим к матрице

$$\left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ T(i\alpha) & 0 & T(k\alpha) & 0 & T(l\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & T(i\beta) & 0 & T(k\beta) & 0 & T(l\beta) \end{array} \right\| \tag{13}$$

где

$$T(i\alpha) = \frac{\chi_t(i\alpha)}{\chi_s(i\alpha)}. \tag{14}$$

В матрице (13) линейно зависимы строки, содержащие единицы, поэтому есть только один определитель шестого порядка, не обращающийся тождественно в нуль. Понижая порядок этого определителя и приравнивая его к нулю, получаем

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ T(i\alpha) & T(k\alpha) & T(l\alpha) \\ T(i\beta) & T(k\beta) & T(l\beta) \end{array} \right| = 0 \tag{15}$$

Из (15) необходимо следует

$$T(i\alpha) = B(i)A_1(\alpha) + A_2(\alpha), \tag{16}$$

в чём можно убедиться, проводя вторичную параметризацию определителя (15).

Условие (16) представляет собой функциональное уравнение, так как согласно определению (14)

$$T(i\alpha) = T\left[\varphi(i) + \psi_1(\alpha), \psi_2(\alpha)\right] . \qquad (17)$$

апишем уравнение (16) в виде, удобном для решения

$$T(x+\xi, \eta) = B(x) A_1(\xi, \eta) + A_2(\xi, \eta), \qquad (18)$$

используя обозначения

$$x = \varphi(i), \quad \xi = \psi_1(\alpha), \quad \eta = \psi_2(\alpha). \qquad (19)$$

Продифференцируем (18) по x и ξ и приравняем результаты

$$B_x(x) A_1(\xi, \eta) = B(x) A_{1\xi}(\xi, \eta) + A_{2\xi}(\xi, \eta). \qquad (20)$$

Запишем (20) для $x = 0$

$$B_x(0) A_1(\xi, \eta) = B(0) A_{1\xi}(\xi, \eta) + A_{2\xi}(\xi, \eta)$$

и вычтем полученное равенство из (20)

$$\frac{B_x(x) - B_x(0)}{B(x) - B(0)} = \frac{A_{1\xi}(\xi, \eta)}{A_1(\xi, \eta)} = a . \qquad (21)$$

Число a в (21) не должно зависеть от переменных x, ξ, η. Рассмотрим две возможности для значений a

1. $a = 0$

$$A_{1\xi}(\xi, \eta) = 0, \qquad A_1(\xi, \eta) = A_1(0, \eta) \qquad (22)$$

$$B_x(x) = B_x(0), \qquad B(x) = B_x(0)\,x + B(0). \tag{23}$$

Для того, чтобы найти $A_2(\xi,\eta)$, воспользуемся следующим приёмом. Очевидное из (18) соотношение

$$B(x)\,A_1(\xi,\eta) + A_2(\xi,\eta) = B(\xi)\,A_1(x,\eta) + A_2(x,\eta)$$

запишем для $x = 0$

$$B(0)\,A_1(\xi,\eta) + A_2(\xi,\eta) = B(\xi)\,A_1(0,\eta) + A_2(0,\eta). \tag{24}$$

Если подставить (22), (23) в (24), то для $A_2(\xi,\eta)$ находим

$$A_2(\xi,\eta) = B_x(0)\,A_1(0,\eta)\,\xi + A_2(0,\eta). \tag{25}$$

Воспользовавшись затем (22), (23), (25) и (18), после некоторых удобных переобозначений функций, получаем

$$T(x+\xi,\eta) = \varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta)(x+\xi). \tag{26}$$

Возвращаясь к прежним обозначениям с помощью (19) и (12), окончательно имеем

$$T(s,t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)\cdot s \tag{27}$$

2. $a \neq 0$.

Без ограничения общности получаемых результатов можно положить $a = 1$

$$\frac{A_{1\xi}(\xi,\eta)}{A_1(\xi,\eta)} = 1, \qquad A_1(\xi,\eta) = A_2(0,\eta)\,e^{\xi} \tag{28}$$

$$\frac{B_x(x)-B_x(0)}{B(x)-B(0)}=1\,,\qquad B(x)=B_x(0)\,e^{x}+B(0)-B_x(0)\tag{29}$$

Из (24) при подстановке (28) и (29) находим $A_2(\xi,\eta)$

$$A_2(\xi,\eta)=[B(0)-B_x(0)](1-e^{\xi})A_1(0,\eta)+A_2(0,\eta)\,.\tag{30}$$

Воспользовавшись (28), (29), (30) и (18), после некоторых удобных переобозначений получаем

$$T(x+\xi,\eta)=\varphi_1(\eta)+\varphi_2(\eta)\,e^{x+\xi}\,.\tag{31}$$

Учитывая (19) и (12), окончательно можем записать

$$T(s,t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)\,e^{s}\,.\tag{32}$$

(27) и (32) дают, в силу определения (14), два различных уравнения для функции χ

$$\frac{\chi_t(s,t)}{\chi_s(s,t)}=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)s\,,\tag{33}$$

$$\frac{\chi_t(s,t)}{\chi_s(s,t)}=\varphi_1(t)+\varphi_2(t)\,e^{s}\,.\tag{34}$$

Уравнение характеристик для (33)

$$\frac{ds}{dt}=-\varphi_1(t)-\varphi_2(t)s$$

представляет собой линейное уравнение для s, которое может быть проинтегрировано в квадратурах при произвольных функциях $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Решение (33) есть

$$\chi(s,t)=\chi[s\psi_2(t)+\psi_2(t)]\tag{35}$$

где χ , ψ_1 , ψ_2 – произвольные функции одной переменной. Если подставить (12) в (35), то после удобных переобозначений получаем

$$f(i\alpha) = \chi\left[\varphi(i)\,\psi_1(\alpha) + \psi_2(\alpha)\right] \qquad (36)$$

Уравнение характеристик для (34)

$$\frac{ds}{dt} = -\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\,e^{s}$$

жет быть преобразовано к линейному для $exp(-s)$

$$\frac{de^{-s}}{dt} = \varphi_1(t)\,e^{-s} + \varphi_2(t)$$

Решение (34), поэтому, есть

$$\chi(s,t) = \chi\left[\psi_1(t)\,e^{-s} + \psi_2(t)\right] \qquad (37)$$

Воспользовавшись обозначением (12), снова приходим к (36). Итак, мы нашли, что единственно возможное параметрическое представление отображения (2) задается функцией

$$a_{i\alpha} = \chi\left[\varphi(x_i)\,\psi_1(\xi_\alpha,\eta_\alpha) + \psi_2(\xi_\alpha,\eta_\alpha)\right] \qquad (38)$$

причём решение исходного уравнения (1) бинарной физической структуры ранга (3,2) легко может быть восстановлено по виду функции (38)

$$\begin{vmatrix} \chi^{-1}(a_{i\alpha}) & \chi^{-1}(a_{i\beta}) & 1 \\ \chi^{-1}(a_{k\alpha}) & \chi^{-1}(a_{k\beta}) & 1 \\ \chi^{-1}(a_{e\alpha}) & \chi^{-1}(a_{e\beta}) & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (39)$$

Обобщая (38) и (39), можно записать решения уравнения для физической структуры ранга $(n+1, n)$

$$u_{i\alpha} = \sum_{\mu=1}^{n-1} x_i^{\mu} \xi_{\alpha\mu} + \xi_{\alpha n} \tag{40}$$

$$\begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & \dots & u_{i\gamma} & 1 \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & \dots & u_{k\gamma} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{e\alpha} & u_{e\beta} & \dots & u_{e\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{41}$$

для любого подмножества $\{i, \kappa, \dots, \ell, \} \subset \mathfrak{M}$, содержащего $n+1$ произвольных элементов и подмножества $\{\alpha, \beta, \dots, \gamma\} \subset \mathfrak{N}$, содержащего n произвольных элементов. Однако, единственность решения (40), (41) не доказана.

Единственность решения (38), (39) предопределяет форму записи физического закона, выражающего отношение между двумя физическими множествами, одно из которых содержит однопараметрические элементы (как например, множество проводников в законе Ома), а другое – двухпараметрические элементы (множество источников тока в законе Ома).

§ 3. Структура ранга (4,2).

Уравнение для бинарной физической структуры ранга (4,2) записывается

$$\forall\, i,\kappa,e,m \in \mathfrak{N}, \quad \forall\, \alpha,\beta \in \mathfrak{N}$$

$$\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{\kappa\alpha}, a_{\kappa\beta}, a_{e\alpha}, a_{e\beta}, a_{m\alpha}, a_{m\beta}) = 0 \quad (1)$$

Будем предполагать, что функция φ в (1) достаточно гладкая и (1) однозначно разрешимо относительно хотя бы одного из восьми аргументов. Параметризация позволяет получить параметрическое представление отображения

$$\mathfrak{N} \times \mathfrak{N} \longrightarrow R \quad (2)$$

прямого произведения на множество действительных чисел

$$a_{i\alpha} = f(i\alpha) = f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha) \,. \quad (3)$$

Подстановка (3) в (1) должна обращать (1) в тождество, согласно условию задачи

$$\varphi[f(x_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha), f(x_i, \xi_\beta, \eta_\beta, \zeta_\beta), \ldots, f(x_m, \xi_\beta, \eta_\beta, \zeta_\beta)] \overset{(4)}{\equiv} 0$$

(4) выражает функциональную зависимость восьми функций типа (3) от десяти переменных

$$x_i, x_\kappa, x_e, x_m, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha, \xi_\beta, \eta_\beta, \zeta_\beta.$$

Для осуществления функциональной зависимости (4) необходимо, чтобы любой определитель восьмого порядка соответствующей матрицы Якоби был равен нулю. Это условие приводит к системе функционально-дифференциальных уравнений, при решении которой следует воспользоваться методом вторичной параметризации. Одно из уравнений системы после вторичной параметризации превращается в линейное однородное уравнение в частных производных для функции $f(i\alpha)$

$$f_x(i\alpha)\, B(i) + f_\xi(i\alpha)\, A_1(\alpha) + f_\eta(i\alpha)\, A_2(\alpha) + f_\zeta(i\alpha)\, A_3(\alpha) = 0 \quad (5)$$

где

$$B(i) = B(x_i), \qquad A(\alpha) = A(\xi_\alpha, \eta_\alpha, \zeta_\alpha)$$

равнение (5) может быть проинтегрировано методом характеристик

$$f(i\alpha) = \chi[\varphi(i) + \psi_1(\alpha), \psi_2(\alpha), \psi_3(\alpha)] . \qquad (6)$$

Мы предполагаем, что параметры ξ_α, η_α, ζ_α входят в (8) существенным образом. Введём обозначения

$$s = \varphi(i) + \psi_1(\alpha), \quad t = \psi_2(\alpha), \quad u = \psi_3(\alpha) \qquad (7)$$

и подставим решение (6) в матрицу Якоби до вторичной параметризации. После некоторых элементарных преобразований получаем

$$\begin{Vmatrix} T(i\alpha) & T(k\alpha) & T(l\alpha) & T(m\alpha) \\ U(i\alpha) & U(k\alpha) & U(l\alpha) & U(m\alpha) \\ T(i\beta) & T(k\beta) & T(l\beta) & T(m\beta) \\ U(i\beta) & U(k\beta) & U(l\beta) & U(m\beta) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (8)$$

где

$$T(i\alpha) = \frac{\chi_t(i\alpha)}{\chi_s(i\alpha)}, \qquad U(i\alpha) = \frac{\chi_u(i\alpha)}{\chi_s(i\alpha)} \qquad (9)$$

порядка

Любой определитель четвертого матрицы (8) должен обращаться в нуль. Приравнивая к нулю определитель, полученный из матрицы (8) вычеркиванием второй строки и проводя вторичную параметризацию этого определителя, имеем

$$T(i\alpha) = B_1(i)\,A_1(\alpha) + B_2(i)\,A_2(\alpha) + A_3(\alpha). \qquad (10)$$

Условие (10) представляет собой функциональное уравнение, так как согласно определению (9)

$$T(i\alpha) = T\left[\varphi(i) + \psi_1(\alpha),\ \psi_2(\alpha),\ \psi_3(\alpha)\right].$$

Используя обозначения (7), можно записать следующие пять решений функционального уравнения (10)

$$T(s,t,u) = \varphi_1(t,u)s + \varphi_2(t,u)s^2 + \varphi_3(t,u); \qquad (11)$$

$$T(s,t,u) = \varphi_1(t,u)s + \varphi_2(t,u)e^s + \varphi_3(t,u); \qquad (12)$$

$$T(s,t,u) = \varphi_1(t,u)e^s + \varphi_2(t,u)se^s + \varphi_3(t,u); \qquad (13)$$

$$T(s,t,u) = \varphi_1(t,u)e^s + \varphi_2(t,u)e^{as} + \varphi_3(t,u); \qquad (14)$$

$$T(s,t,u) = \varphi_1(t,u)\sin s + \varphi_2(t,u)\cos s + \varphi_3(t,u). \qquad (15)$$

Пока не удалось доказать, что (11) – (15) исчерпывают все возможные решения уравнения (10). Так как согласно (9)

$$T(s,t,u) = \frac{\chi_t(s,t,u)}{\chi_s(s,t,u)}$$

решения (11) – (15) приводят к пяти различным уравнениям для функции χ

Уравнение характеристик для (11)

$$\frac{ds}{dt} = -\varphi_1(t,u)s - \varphi_2(t,u)s^2 - \varphi_3(t,u)$$

есть уравнение Рикати, которое в общем случае не может быть проинтегрировано в квадратурах. Однако, любое решение уравнения Рикати может быть записано в виде

$$\frac{S\psi_1(t,u)+\psi_2(t,u)}{S+\psi_3(t,u)}=const. \qquad (16)$$

Решение (11) есть произвольная функция интеграла (16)

$$\chi(s,t,u)=\chi\left[\frac{S\psi_1(t,u)+\psi_2(t,u)}{S+\psi_3(t,u)}\right]. \qquad (17)$$

Если теперь в (17) подставить (7), то после удобных переобозначений функций получаем

$$f(i\alpha)=\chi\left[\frac{\varphi(i)\psi_1(\alpha)+\psi_2(\alpha)}{\varphi(i)+\psi_3(\alpha)}\right]. \qquad (18)$$

Итак, мы получили один из возможных вариантов параметрического представления отображения (3)

$$a_{i\alpha}=\chi\left[\frac{\varphi(x_i)\psi_1(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)+\psi_2(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)}{\varphi(x_i)+\psi_3(\xi_\alpha,\eta_\alpha,\zeta_\alpha)}\right]. \qquad (19)$$

Решение уравнения структуры (1) может быть восстановлено по виду функции (19)

$$\begin{vmatrix} u_{i\alpha} & u_{i\beta} & u_{i\alpha}u_{i\beta} & 1 \\ u_{k\alpha} & u_{k\beta} & u_{k\alpha}u_{k\beta} & 1 \\ u_{e\alpha} & u_{e\beta} & u_{e\alpha}u_{e\beta} & 1 \\ u_{m\alpha} & u_{m\beta} & u_{m\alpha}u_{m\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (20)$$

где

$$u_{i\alpha} = \chi^{-1}(a_{i\alpha}) .$$

Решение (19) – (20), повидимому, только одно из возможных. Интегрирование уравнений (12) – (15) в общем виде при произвольных коэффициентах встречает большие затруднения. Заметим только, что уравнение характеристик для (14) при $a = -1$ сводится к уравнению Рикати и в результате мы вновь приходим к решению (19) – (20).

Аналогичные трудности возникают при изучении бинарных физических структур ранга $(n, 2)$ $n \geq 5$. Есть некоторые соображения, позволяющие считать, что решений для этих структур нет.

§ 4. Структура ранга (3,3).

Основное уравнение для бинарной физической структуры ранга (3,3) записывается

$$\forall i, \kappa, \ell \in \mathfrak{M}, \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{N}$$

$$\Phi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}, a_{i\gamma}, a_{\kappa\alpha}, a_{\kappa\beta}, a_{\kappa\gamma}, a_{\ell\alpha}, a_{\ell\beta}, a_{\ell\gamma}) = 0. \qquad (1)$$

Будем предполагать, что: Φ достаточно гладкая функция, (1) разрешимо относительно хотя бы одного из девяти аргументов и параметрическое представление отображения

$$\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \longrightarrow R .$$

прямого произведения на множество действительных чисел

$$a_{i\alpha} = f(i\alpha) = f(x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha) \qquad (2)$$

включает в себя параметры x_i, y_i и ξ_α, η_α существенным образом. Подстановка (2) в (1) должна обращать (1) в тождество

что означает наличие функциональной зависимости девяти функций типа (2) от двенадцати переменных

$$x_i, y_i, x_\kappa, y_\kappa, x_e, y_e, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \xi_\beta, \eta_\beta, \xi_\delta, \eta_\delta.$$

Необходимым условием для осуществления функциональной зависимости является обращение в нуль каждого определителя девятого порядка соответствующей матрицы Якоби. Вторичная параметризация этих определений приводит к линейным однородным уравнениям для $f(i\alpha)$. Одно из них

$$f_x(i\alpha)\,B_1(i) + f_y(i\alpha)\,B_2(i) + f_\xi(i\alpha)\,A_1(\alpha) + f_\eta(i\alpha)\,A_2(\alpha) = 0$$

может быть проинтегрировано методом характеристик (см. [4])

$$f(i\alpha) = \chi\,[\varphi_1(i) + \psi_1(\alpha),\ \varphi_2(i),\ \psi_2(\alpha)] \tag{3}$$

где $\varphi(i) = \varphi(x_i, y_i), \qquad \psi(\alpha) = \psi(\xi_\alpha, \eta_\alpha).$

Подставим решение (3) в матрицу Якоби, чтобы из условия обращения в нуль определителей матрицы найти ограничения на функцию $\chi(s,t,u)$ в (3). В результате получаем следующие варианты

$$T(i\alpha) = A(\alpha)\,B_1(i) + B_2(i) \tag{4}$$

$$U(i\alpha) = B(i)\,A_1(\alpha) + A_2(\alpha) \tag{5}$$

$$T(i\alpha) = \frac{A(\alpha)\,B_1(i) + B_2(i)}{A(\alpha) + B(i)} \tag{6}$$

$$U(i\alpha) = \frac{B(i)\,A_1(\alpha) + A_2(\alpha)}{A(\alpha) + B(i)} \tag{7}$$

где

$$T(i\alpha) = \frac{\chi_t(i\alpha)}{\chi_s(i\alpha)}, \qquad U(i\alpha) = \frac{\chi_u(i\alpha)}{\chi_s(i\alpha)}. \tag{8}$$

Условия (4),(5) и (6), (7) представляют собой системы двух функциональных уравнений, так как, согласно определению (8),

$$T(i\alpha) = T\left[\varphi_1(i) + \psi_1(\alpha),\ \varphi_2(i),\ \psi_2(\alpha)\right];$$

$$U(i\alpha) = U\left[\varphi_1(i) + \psi_1(\alpha),\ \varphi_2(i),\ \psi_2(\alpha)\right].$$

Уравнения (4), (5) решаются методом, аналогичным тому, которым решалось уравнение (16) § 2. Два возможных решения системы (4), (5) приводят к следующим решениям уравнения структуры (1)

$$a_{i\alpha} = \chi\left[\varphi_1(i)\psi_1(\alpha) + \varphi_2(i)\psi_2(\alpha)\right] \tag{9}$$

$$\begin{vmatrix} \chi^{-1}(a_{i\alpha}) & \chi^{-1}(a_{i\beta}) & \chi^{-1}(a_{i\gamma}) \\ \chi^{-1}(a_{k\alpha}) & \chi^{-1}(a_{k\beta}) & \chi^{-1}(a_{k\gamma}) \\ \chi^{-1}(a_{e\alpha}) & \chi^{-1}(a_{e\beta}) & \chi^{-1}(a_{e\gamma}) \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

и

$$a_{i\alpha} = \chi\left[\varphi_1(i)\psi_1(\alpha) + \varphi_2(i) + \psi_2(\alpha)\right] \tag{11}$$

$$\begin{vmatrix} X^{-1}(a_{i\alpha}) & X^{-1}(a_{i\beta}) & X^{-1}(a_{i\gamma}) & 1 \\ X^{-1}(a_{k\alpha}) & X^{-1}(a_{k\beta}) & X^{-1}(a_{k\gamma}) & 1 \\ X^{-1}(a_{e\alpha}) & X^{-1}(a_{e\beta}) & X^{-1}(a_{e\gamma}) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

Можно показать, что совместное решение системы функциональных уравнений (6), (7) приводит к решению уравнения структуры, совпадающему с (9),(10) . Это означает, что (9), (10) и (11), (12) исчерпывают все возможные решения уравнения (1) бинарной физической структуры ранга (3,3).

Решения (9), (10) и (11), (12) легко могут быть обобщены для структуры ранга (n,n) $n \geq 3$

$$a_{i\alpha} = \sum_{\mu=1}^{n-1} x_i^{\mu} \xi_{\alpha\mu} \qquad (13)$$

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \dots & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \dots & a_{k\gamma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{e\alpha} & a_{e\beta} & \dots & a_{e\gamma} \end{vmatrix} = 0 \qquad (14)$$

и

$$a_{i\alpha} = \sum_{\mu=1}^{n-2} x_i^{\mu} \xi_{\alpha\mu} + x_i^{n-1} + \xi_{\alpha\, n-1} \qquad (15)$$

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \dots & a_{i\gamma} & 1 \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & \dots & a_{k\gamma} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{e\alpha} & a_{e\beta} & \dots & a_{e\gamma} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (16)$$

для любых подмножеств $\mathfrak{M}_n = \{i, \kappa, \dots, e\}$ и $\mathfrak{N}_n = \{\alpha, \beta, \dots, \gamma\}$, содержащих n – произвольных элементов. Единственность решений (13), (14) и (15), (16), однако, в случае $n \geq 4$ не доказана.

§ 5. Бинарная структура ранга $\langle 3 \rangle$.

Основное уравнение для бинарных физических структур на одном множестве $\mathfrak{M} = \{i, \kappa, \dots, e, \dots\}$ также конструируется по общей схеме, предложенной в [1]. Прямое произведение множества $\mathfrak{M}$ само на себя отображается на множество действительных чисел R

$$\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to R \ , \qquad (1)$$

то есть каждому элементу $(i, \kappa) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ сопоставляется некоторое число $a_{i\kappa}$

$$(i, \kappa) \longrightarrow a_{i\kappa} \ . \qquad (2)$$

Будем считать, что прямое произведение $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ содержит только такие пары (i, κ), в которых $i \neq \kappa$. В общем случае элементы (i, κ) и (κ, i) рассматриваются как различные. В нашей задаче мы будем предполагать, что между числами $a_{i\kappa}$

и $a_{\kappa i}$ существует функциональная связь

$$\varphi_1(a_{i\kappa}, a_{\kappa i}) = 0 \qquad (3)$$

Будем говорить, что на исходном множестве $\mathfrak{M}$ отображение (1) реализует бинарную физическую структуру ранга $\langle 3 \rangle$, если найдется такая вещественная функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ трех переменных, что

$$\forall\, i,\kappa,\ell \in \mathfrak{M} \qquad \varphi(a_{i\kappa}, a_{i\ell}, a_{\kappa\ell}) = 0 \qquad (4)$$

Поедположим, что функция φ в (4) достаточно гладкая и (4) может быть однозначно разрешено относительно хотя бы одного из трех аргументов. Соотношение (4) представляет собой функциональное уравнение специального вида для φ.

Выбер ем в множестве $\mathfrak{M}$ четыре произвольных элемента i, κ, ℓ, m и запишем (4) для любых трех элементов из четырёх

$$\varphi(a_{i\kappa}, a_{i\ell}, a_{\kappa\ell}) = 0,$$

$$\varphi(a_{i\kappa}, a_{im}, a_{\kappa m}) = 0,$$

$$\varphi(a_{i\ell}, a_{im}, a_{\ell m}) = 0,$$

$$\varphi(a_{\kappa\ell}, a_{\kappa m}, a_{\ell m}) = 0.$$

Разрешим все четыре соотношения относительно третьего аргумента

$$a_{\kappa\ell} = f(a_{i\kappa}, a_{i\ell}), \qquad (5)$$

$$a_{\kappa m} = f(a_{i\kappa}, a_{im}), \qquad (6)$$

$$a_{em} = f(a_{ie}, a_{im}), \tag{7}$$

$$a_{em} = f(a_{ke}, a_{km}). \tag{8}$$

Подставим (5), (6) в (8) и приравняем к (7)

$$f(a_{ie}, a_{im}) = f[f(a_{ik}, a_{ie}), f(a_{ik}, a_{im})]. \tag{9}$$

(9) не может быть соотношением структуры и потому является тождеством. Если ввести обозначения $x = a_{ie}$, $y = a_{im}$, $z = a_{ik}$ то

$$f(x,y) = f[f(z,x), f(z,y)] \tag{10}$$

можно рассматривать как обычное функциональное уравнение для $f(x,y)$

Продифференцируем (10) отдельно по x, y, z

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f[\ ]}{\partial f(z,x)} \cdot \frac{\partial f(z,x)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f[\ ]}{\partial f(z,y)} \cdot \frac{\partial f(z,y)}{\partial y},$$

$$0 = \frac{\partial f[\ ]}{\partial f(z,x)} \cdot \frac{\partial f(z,x)}{\partial z} + \frac{\partial f[\ ]}{\partial f(z,y)} \cdot \frac{\partial f(z,y)}{\partial z}.$$

Полученные равенства можно рассматривать как линейную неоднородную систему уравнений относительно двух неизвестных

$$\frac{\partial f[\ ]}{\partial f(z,x)}, \qquad \frac{\partial f[\ ]}{\partial f(z,y)}.$$

Для совместности уравнений необходимо, чтобы определитель расширенной матрицы системы был равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(z,x)}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} & 0 & \frac{\partial f(z,y)}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial f(z,x)}{\partial z} & \frac{\partial f(z,y)}{\partial z} \end{vmatrix} = 0. \qquad (11)$$

Положим в (11) $z = a = const$

$$\left.\frac{\partial f(z,x)}{\partial x}\right|_{z=a} = A(x), \qquad \left.\frac{\partial f(z,x)}{\partial z}\right|_{z=a} = B(x).$$

Раскрывая определитель (11), получаем линейное однородное уравнение в частных производных для функции $f(x,y)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} B(x) A(y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot A(x) B(y) = 0,$$

которое может быть проинтегрировано методом характеристик

$$f(x,y) = \chi [\varphi(x) - \varphi(y)]. \qquad (12)$$

Для того чтобы найти функцию χ в (12) подставим (12) в исходное функциональное уравнение (10)

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi\{\chi[\varphi(z) - \varphi(x)]\} - \varphi\{\chi[\varphi(z) - \varphi(y)]\} \quad (13)$$

Положим в (13) $y = z$, . $t = -\varphi(x) + \varphi(y)$

$$-t = \varphi[\chi(t)] - a$$

$$\chi(t) = \varphi^{-1}(-t + a),$$

где $a = \varphi[\chi(0)]$. Вместо (12) в этом случае можно записать

$$f(x,y) = \varphi^{-1}[-\varphi(x) + \varphi(y) + a]. \quad (14)$$

Легко убедиться в том, что (14) удовлетворяет уравнению (10) при любой функции $\varphi(x)$. Постоянную a в (14) можно исключить, введя переопределение функции φ

$$\psi(x) = \varphi(x) - a \quad \text{и} \quad \psi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(x + a) \quad (15)$$

Решение (14) при этом имеет вид

$$f(x,y) = \psi^{-1}[-\psi(x) + \psi(y)]. \quad (16)$$

Подставив (16) в (5), получаем каноническую форму записи решения уравнения (4) бинарной физической структуры ранга $\langle 3 \rangle$

$$\psi(a_{ik}) - \psi(a_{il}) + \psi(a_{kl}) = 0. \quad (17)$$

(17) допускает простую геометрическую интерпретацию. Если

$$\psi(a_{ik}) = L_{ik} = x_k - x_i \quad ,$$

есть длина отрезка на прямой между точками i и k, взятая с определенным знаком в зависимости от относительного расположения этих точек, то

$$L_{ik} = L_{ie} + L_{ek}$$

§ 6. Тернарная структура ранга $\langle 4 \rangle$

Пусть прямое произведение $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ множества $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots, l, \ldots\}$ отображается на множество действительных чисел

$$\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to K \quad , \tag{1}$$

то есть каждому элементу $(i,k,l) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ сопоставляется некоторое число a_{ikl}. Будем считать, что прямое произведение $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ содержит только такие элементы (i,k,l), в которых $i \neq k \neq l$, а также, что шесть чисел

$$a_{ikl}, \; a_{ilk}, \; a_{kil}, \; a_{kli}, \; a_{lik}, \; a_{lki}$$

попарно связаны между собой, то есть

$$a_{ikl} = \varphi_1(a_{ilk}) = \varphi_2(a_{kil}) = \varphi_3(a_{kli}) = \varphi_4(a_{lik}) = \varphi_5(a_{lki}).$$

Будем говорить, что на исходном множестве $\mathfrak{M}$, отображение (1) реализует тернарную структуру ранга $\langle 4 \rangle$, если существует такая вещественная функция $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, что

$$\forall\, i,k,l,m \in \mathfrak{M} \quad \Phi(a_{ikl}, a_{ikm}, a_{ilm}, a_{klm}) = 0. \tag{2}$$

(2) представляет собой функциональное уравнение специального вида для Φ. Предположим, что Φ достаточно гладкая функция

и (2) может быть однозначно разрешено относительно одного из четырех аргументов. Выделим в исходном множестве M пять произвольных элементов i, k, l, m, n и запишем (2) для любых четырех элементов из пяти в виде, разрешенном относительно последнего аргумента.

$$a_{klmn} = f(a_{ikl}, a_{ikm}, a_{iln}), \tag{3}$$

$$a_{klm} = f(a_{ikl}, a_{ikm}, a_{ilm}), \tag{4}$$

$$a_{kmn} = f(a_{ikm}, a_{ikn}, a_{imn}), \tag{5}$$

$$a_{lmn} = f(a_{ilm}, a_{iln}, a_{imn}), \tag{6}$$

$$a_{lmn} = f(a_{klm}, a_{kln}, a_{kmn}). \tag{7}$$

Подставим (3), (4), (5) в (7) и приравняем к (6)

$$f(a_{ilm}, a_{iln}, a_{imn}) =$$

$$= f[f(a_{ikl}, a_{ikm}, a_{ilm}), f(a_{ikl}, a_{ikn}, a_{iln}), f(a_{ikm}, a_{ikn}, a_{imn})]. \tag{8}$$

(8) не может быть соотношением структуры и потому является тождеством. После соответствующих обозначений переменных получаем обычное функциональное уравнение

$$f(x, y, z) = f[f(s, t, x), f(s, u, y), f(t, u, z)]. \tag{9}$$

Продифференцируем (9) по всем шести переменным x, y, z, s, t, u. В результате получаем шесть равенств, которые можно рассматривать как систему шести линейных неоднородных уравнений относительно трёх неизвестных

$$\frac{\partial f[\ ]}{\partial f(s,t,x)}, \quad \frac{\partial f[\ ]}{\partial f(s,u,y)}, \quad \frac{\partial f[\ ]}{\partial f(t,u,z)}.$$

Для совместности уравнений необходимо, чтобы любой определитель четвертого порядка расширенной матрицы системы был равен нулю

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial f(s,t,x)}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} & 0 & \frac{\partial f(s,u,y)}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial f(t,u,z)}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial f(s,t,x)}{\partial s} & \frac{\partial f(s,u,y)}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f(s,t,x)}{\partial t} & 0 & \frac{\partial f(t,u,z)}{\partial t} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f(s,u,y)}{\partial u} & \frac{\partial f(t,u,z)}{\partial u} \end{Vmatrix} \qquad (10)$$

Возьмём определитель, полученный из матрицы (10) вычеркиванием последних двух строк, положим в нём $s, t, u = const$ и приравняем к нулю. В результате получаем линейное уравнение для $f(x,y,z)$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} A(x) + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} B(y) = 0$$

решение которого есть

$$f(x,y,z) = \chi[\varphi(x) + \psi(y); z]. \qquad (11)$$

Подставим решение (11) в матрицу (10) и потребуем обращения в нуль определителя, полученного вычеркиванием первой и пятой строк, положив при этом $s, t, u = const$. После несложных операций получаем уравнение для функции $\chi(v,w)$ в (11)

$$\frac{\chi_w[\varphi(x)+\psi(y),z]}{\chi_v[\varphi(x)+\psi(y),z]} = A(z)\cdot B(y). \qquad (12)$$

Правая часть (12) не зависит от x , поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\chi_w(x,y,z)}{\chi_v(x,y,z)} = \frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\chi_w(x,y,z)}{\chi_v(x,y,z)}\cdot\varphi_x(x) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial v}\cdot\frac{\chi_w(v,w)}{\chi_v(v,w)} = 0. \qquad (13)$$

Решение (12)

$$\frac{\chi_w(v,w)}{\chi_v(v,w)} = A(w) \qquad (14)$$

в свою очередь определяет уравнение для функции $\chi(v,w)$
Решение (14) есть

$$\chi(v,w) = \chi[v + \theta(w)] \qquad (15)$$

Подставим (15) в (11)

$$f(x,y,z) = \chi[\varphi(x) + \psi(y) + \theta(z)] \qquad (16)$$

где справа χ – произвольная функция одной переменной. Подставив решение (16) снова в матрицу (10), находим связь между функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\theta(x)$

$$\varphi(x) = \theta(x), \qquad \psi(x) = -\theta(x),$$

то есть

$$f(x,y,z) = \chi[\varphi(x) - \varphi(y) + \varphi(z)]. \qquad (17)$$

Ограничение на функцию χ можно найти из того условия, что (17) должно быть решением функционального уравнения (9). Повторяя переход (12)–(16) из предыдущего параграфа, можем записать

$$f(x,y,z) = \psi^{-1}[\psi(x) - \psi(y) + \psi(z)], \qquad (18)$$

где $\psi(x)$ – произвольная функция, имеющая обратную. Используя (18) и (3), мы можем выписать решение уравнения (2) тернарной физической структуры ранга $\langle 4 \rangle$

$$\psi(a_{ike}) - \psi(a_{ikm}) + \psi(a_{ilm}) - \psi(a_{kem}) = 0. \qquad (19)$$

Геометрическая интерпретация (19) очень проста

$$\psi(a_{ike}) = S_{ike} = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_e & y_e & 1 \end{vmatrix}$$

есть площадь треугольника на плоскости с вершинами в точках i, k, e. Площади S_{ike} приписывается определенный знак в зависимости от направления обхода. В заключение заметим, что структуры кратности $\langle n \rangle$ и ранга $\langle n+1 \rangle$ исследуются аналогичным методом. При $n=4$, например, имеем

$$V_{ikem} - V_{iken} + V_{ikmn} - V_{iemn} + V_{kemn} = 0,$$

где $V_{i\kappa e m}$ – объём тетраэдра, построенного на четырёх точках в трехмерном пространстве. Объёму приписывается знак в зависимости от взаимного расположения точек.

§ 7. Тернарная структура ранга (3,2).

Простейшую тернарную структуру на двух множествах $\mathfrak{M} = \{i, \kappa, \ldots, \ell, \ldots\}$ и $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \ldots\}$ можно определить следующим образом. Пусть прямое произведение $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ отображается на множество действительных чисел

$$\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \longrightarrow R , \qquad (1)$$

то есть каждому элементу $(i, \kappa; \alpha) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ сопоставляется некоторое число

$$(i, \kappa; \alpha) \longrightarrow a_{i\kappa\alpha} . \qquad (2)$$

Между парой, вообще говоря, различных чисел $a_{i\kappa\alpha}$ и $a_{\kappa i\alpha}$ существует функциональная связь

$$\varphi_1(a_{i\kappa\alpha}, a_{\kappa i\alpha}) = 0 .$$

Будем говорить, что на двух исходных множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ отображение (1) реализует тернарную структуру ранга (3,2), если существует такая вещественная, достаточно гладкая функция φ шести переменных, что

$$\forall i, \kappa, \ell \in \mathfrak{M}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{N}$$

$$\varphi(a_{i\kappa\alpha}, a_{i\kappa\beta}, a_{ie\alpha}, a_{ie\beta}, a_{\kappa e\alpha}, a_{\kappa e\beta}) = 0. \qquad (3)$$

Как обычно предполагается однозначная разрешимость (3) относительно хотя бы одного из аргументов. Выделим в множестве $\mathfrak{M}$ четыре произвольных элемента i, κ, ℓ, m и запишем (3) для любых трех элементов из четырех в виде, разрешенном относительно по-

следнего аргумента

$$a_{\kappa\varepsilon\rho} = f(a_{i\kappa\alpha}, a_{i\kappa\rho}, a_{i\varepsilon\alpha}, a_{i\varepsilon\rho}, a_{\kappa\varepsilon\alpha}), \tag{4}$$

$$a_{\kappa\tau\rho} = f(a_{i\kappa\alpha}, a_{i\kappa\rho}, a_{i\tau\alpha}, a_{i\tau\rho}, a_{\kappa\tau\alpha}), \tag{5}$$

$$a_{\varepsilon\tau\rho} = f(a_{i\varepsilon\alpha}, a_{i\varepsilon\rho}, a_{i\tau\alpha}, a_{i\tau\rho}, a_{\varepsilon\tau\alpha}), \tag{6}$$

$$a_{\varepsilon\tau\rho} = f(a_{\kappa\varepsilon\alpha}, a_{\kappa\varepsilon\rho}, a_{\kappa\tau\alpha}, a_{\kappa\tau\rho}, a_{\varepsilon\tau\alpha}). \tag{7}$$

Подставим (4), (5) в (7) и приравняем к (6). Так как полученное равенство не может быть соотношением структуры, оно должно быть тождеством. После соответствующих обозначений переменных приходим к обычному функциональному уравнению

$$z, s, t) = f[w, f(u, v, x, y, w), p, f(u, v, z, s, p), t] \tag{8}$$

Продифференцируем (8) отдельно по каждой из девяти переменных $x, y, z, s, t, u, v, w, p$. Полученные девять равенств будем рассматривать как систему девяти линейных неоднородных уравнений относительно следующих пяти неизвестных

$$\frac{\partial f[\,]}{\partial w}, \quad \frac{\partial f[\,]}{\partial p}, \quad \frac{\partial f[\,]}{\partial t}, \quad \frac{\partial f[\,]}{\partial f(u,v,x,y,w)}, \quad \frac{\partial f[\,]}{\partial f(u,v,z,s,p)}.$$

Для совместности уравнений необходимо, чтобы любой определитель шестого порядка расширенной матрицы системы был равен нулю. Один из таких определителей после понижения порядка имеет вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f(x,y,z,s,t)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(u,v,x,y,w)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y,z,s,t)}{\partial y} & \dfrac{\partial f(u,v,x,y,w)}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Положим в (9) $u, v, w = const$. Получающееся при этом линейное уравнение интегрируется методом характеристик

$$f(x,y,z,s,t) = \chi\,[\varphi(x,y), z, s, t]. \qquad (10)$$

Подставим решение (10) в определитель (9)

$$\begin{vmatrix} \varphi_x(x,y) & \chi_x[\varphi(u,v), x, y, w] \\ \varphi_y(x,y) & \chi_y[\varphi(u,v), x, y, w] \end{vmatrix} = 0. \qquad (11)$$

Уравнение (11) также решается методом характеристик

$$f(u,v,x,y,w) = \chi\,[\varphi(u,v), \varphi(x,y), w]. \qquad (12)$$

В расширенной матрице возьмём другой определитель и приравняем его к нулю

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f(x,y,z,s,t)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(u,v,x,y,w)}{\partial x} & 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y,z,s,t)}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial f(u,v,z,s,p)}{\partial z} \\ 0 & \dfrac{\partial f(u,v,x,y,w)}{\partial u} & \dfrac{\partial f(u,v,z,s,p)}{\partial u} \end{vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

Подставим решение (12) в определитель (13)

$$\begin{vmatrix} \chi_{\varphi(x,y)}[\varphi(x,y), \varphi(z,s), t] & \chi_{\varphi(x,y)}[\varphi(u,v), \varphi(z,s), w] & 0 \\ \chi_{\varphi(z,s)}[\varphi(x,y), \varphi(z,s), t] & 0 & \chi_{\varphi(z,s)}[\varphi(u,v), \varphi(z,s), p] \\ 0 & \chi_{\varphi(u,v)}[\varphi(u,v), \varphi(z,s), w] & \chi_{\varphi(u,v)}[\varphi(u,v), \varphi(z,s), p] \end{vmatrix} = 0 \qquad (14)$$

Положим в (I4) $w = p = const$, $u, v = const$. Для функции $\chi[\varphi(x,y), \varphi(z,s), t]$ получаем уравнение относительно переменных $\varphi(x,y)$, $\varphi(z,s)$

$$\chi_{\varphi(x,y)}[\varphi(x,y), \varphi(z,s), t]\, A[\varphi(x,y)] + \chi_{\varphi(z,s)}[\varphi(x,y), \varphi(z,s), t]\, A[\varphi(z,s)] = 0 \qquad (I5)$$

где

$$A[\varphi(x,y)] = \left. \frac{\chi_{\varphi(u,v)}[\varphi(u,v), \varphi(x,y), w]}{\chi_{\varphi(x,y)}[\varphi(u,v), \varphi(x,y), w]} \right| \begin{matrix} \varphi(u,v) = const \\ w = const \end{matrix}$$

Решение уравнения (I5) есть

$$\chi[\varphi(x,y), \varphi(z,s), t] = \chi[\varphi(x,y) - \varphi(z,s), t]\,. \qquad (I6)$$

Подставим (I6) в (4)

$$a_{\kappa\varepsilon\rho} = \chi[\varphi(a_{i\kappa\alpha}, a_{i\kappa\rho}) - \varphi(a_{i\varepsilon\alpha}, a_{i\varepsilon\rho}), a_{\kappa\varepsilon\alpha}] \qquad (I7)$$

и разрешим (I7) относительно разности $\varphi(a_{i\kappa\alpha}, a_{i\kappa\rho}) - \varphi(a_{i\varepsilon\alpha}, a_{i\varepsilon\rho})$

$$\varphi(a_{i\kappa\alpha}, a_{i\kappa\rho}) - \varphi(a_{i\varepsilon\alpha}, a_{i\varepsilon\rho}) + \psi(a_{\kappa\varepsilon\alpha}, a_{\kappa\varepsilon\rho}) = 0, \qquad (I8)$$

запишем также (5), (6) в виде (I8)

$$\varphi(a_{i\kappa\alpha}, a_{i\kappa\rho}) - \varphi(a_{im\alpha}, a_{im\rho}) + \psi(a_{\kappa m\alpha}, a_{\kappa m\rho}) = 0, \qquad (I9)$$

$$\varphi(a_{i\varepsilon\alpha}, a_{i\varepsilon\rho}) - \varphi(a_{im\alpha}, a_{im\rho}) + \psi(a_{\varepsilon m\alpha}, a_{\varepsilon m\rho}) = 0. \qquad (20)$$

Из (I8) вычтем (I9) и прибавим (20)

$$\psi(a_{\kappa\varepsilon\alpha}, a_{\kappa\varepsilon\rho}) - \psi(a_{\varepsilon m\alpha}, a_{\varepsilon m\rho}) + \psi(a_{\varepsilon m\alpha}, a_{\varepsilon m\rho}) = 0, \qquad (2I)$$

то есть соотношение тернарной структуры ранга (3,2) может быть записано в виде

$$\psi(a_{i\kappa\alpha}, a_{i\kappa\beta}) - \psi(a_{ie\alpha}, a_{ie\beta}) + \psi(a_{ke\alpha}, a_{ke\beta}) = 0 \qquad (22)$$

В множестве $\mathfrak{M}$ выделим три произвольных элемента α, β, γ и запишем (4) для любых двух из них

$$a_{ke\beta} = f(a_{i\kappa\alpha}, a_{i\kappa\beta}, a_{ie\alpha}, a_{ie\beta}, a_{ke\alpha}) \qquad (23)$$

$$a_{ke\gamma} = f(a_{i\kappa\alpha}, a_{i\kappa\gamma}, a_{ie\alpha}, a_{ie\gamma}, a_{ke\alpha}) \qquad (24)$$

$$a_{ke\gamma} = f(a_{i\kappa\beta}, a_{i\kappa\gamma}, a_{ie\beta}, a_{ie\gamma}, a_{ke\beta}) \qquad (25)$$

Подставим (23) в (25) и приравняем к (24). После некоторых обозначений переменных получаем функциональное уравнение

$$f(x,y,z,s,t) = f[u,y,v,s,f(x,u,z,v,t)] \qquad (26)$$

Дифференцируя (26) по всем переменным, как обычно получаем линейную неоднородную систему уравнений для совместности которой необходимо, например

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f(x,y,z,s,t)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,u,z,v,t)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y,z,s,t)}{\partial z} & \frac{\partial f(x,u,z,v,t)}{\partial z} \end{vmatrix} = 0. \qquad (27)$$

Полагая $u, v = const$, получаем линейное уравнение

$$\frac{\partial f(x,y,z,s,t)}{\partial x} A(x,z,t) + \frac{\partial f(x,y,z,s,t)}{\partial z} B(x,z,t) = 0$$

решение которого есть

$$f(x,y,z,s,t) = \chi[\varphi(x,z,t), y, s] \qquad (28)$$

Подставим (28) в (23) и разрешим относительно $\varphi(a_{ik\alpha}, a_{ie\alpha}, a_{ke\alpha})$

$$\varphi(a_{ik\alpha}, a_{ie\alpha}, a_{ke\alpha}) + \psi(a_{ik\beta}, a_{ie\beta}, a_{ke\beta}) = 0, \qquad (29)$$

$$\varphi(a_{ik\alpha}, a_{ie\alpha}, a_{ke\alpha}) + \psi(a_{ik\gamma}, a_{ie\gamma}, a_{ke\gamma}) = 0, \qquad (30)$$

$$\varphi(a_{ik\beta}, a_{ie\beta}, a_{ke\beta}) + \psi(a_{ik\gamma}, a_{ie\gamma}, a_{ke\gamma}) = 0. \qquad (31)$$

Сравнивая (29) – (31), замечаем, что должно быть

$$\varphi(a_{ik\beta}, a_{ie\beta}, a_{ke\beta}) = -\psi(a_{ik\beta}, a_{ie\beta}, a_{ke\beta})$$

и, следовательно, соотношение тернарной структуры принимает вид

$$\varphi(a_{ik\alpha}, a_{ie\alpha}, a_{ke\alpha}) - \varphi(a_{ik\beta}, a_{ie\beta}, a_{ke\beta}) = 0 \qquad (32)$$

Реализация двух возможных вариантов соотношения структуры, естественно налагает ограничения на функции ψ и φ в (22) и (32). Разрешим (32) относительно $a_{ke\beta}$

$$a_{ke\beta} = \chi_1[\varphi(a_{ik\alpha}, a_{ie\alpha}, a_{ke\alpha}), a_{ik\beta}, a_{ie\beta}]$$

и приравняем к $a_{ke\beta}$ из (22)

$$\chi[\psi(a_{ik\alpha}, a_{ik\beta}) - \psi(a_{ie\alpha}, a_{ie\beta}), a_{ke\alpha}] = \qquad (33)$$

$$= \chi_1[\varphi(a_{ik\alpha}, a_{ie\alpha}, a_{ke\alpha}), a_{ik\beta}, a_{ie\beta}].$$

(33) не может быть соотношением структуры и должно быть тождеством. Вводя обозначения переменных, получаем функциональное уравнение

$$\chi[\psi(x,y) - \psi(s,t), u] = \chi_1[\varphi(x,s,u), y, t] \qquad (34)$$

продифференцируем (34) по пяти переменным x, y, s, t, u . Полученные пять равенств будем рассматривать как систему пяти линейных однородных уравнений относительно следующих пяти неизвестных

$$\frac{\partial \chi[\ ]}{\partial \psi(x,y)}, \quad \frac{\partial \chi[\ ]}{\partial u}, \quad \frac{\partial \chi_1[\ ]}{\partial \varphi(x,s,u)}, \quad \frac{\partial \chi_1[\ ]}{\partial y}, \quad \frac{\partial \chi_1[\ ]}{\partial t}.$$

Так как система должна иметь нетривиальное решение, определитель матрицы этой системы равен нулю. В результате получаем

$$\begin{vmatrix} \psi_x(x,y), & \varphi_x(x,s,u) \\ -\psi_s(s,t) & \varphi_s(x,s,u) \end{vmatrix} = 0 . \qquad (35)$$

Положим в (3 5) $s, t, u = const$. Тогда

$$\psi_x(x,y) = A(x)$$

и, следовательно,

$$\psi(x,y) = \psi(x) + \theta(y) . \qquad (36)$$

Подставим (36) в (22)

$$\psi(a_{ik\alpha}) + \theta(a_{ik\beta}) - \psi(a_{ie\alpha}) - \theta(a_{ie\beta}) + \psi(a_{ke\alpha}) - \theta(a_{ke\beta}) = 0 \qquad (37)$$

Но с другой стороны (37) должно быть записано в виде (32), то есть

$$\varphi(a_{ik\alpha}, a_{ie\alpha}, a_{ke\alpha}) = \psi(a_{ik\alpha}) - \psi(a_{ie\alpha}) + \psi(a_{ke\alpha})$$

и

$$\varphi(a_{ik\beta}, a_{ie\beta}, a_{ke\beta}) = -\theta(a_{ik\beta}) + \theta(a_{ie\beta}) - \theta(a_{ke\beta}) .$$

Из сравнения получаем

$$\psi(a_{ik\alpha}) = -\theta(a_{ik\alpha}) \qquad (38)$$

Используя (38), можно окончательно записать решение уравнения (3) тернарной физической структуры ранга (3,2)

$$\psi(a_{i\kappa\alpha}) - \psi(a_{i\kappa\beta}) - \psi(a_{ie\alpha}) + \psi(a_{ie\beta}) + \psi(a_{ke\alpha}) - \psi(a_{ke\beta}) = 0$$

В заключение приведем решение для тернарной структуры ранга (2,2,2) на трёх множествах $\mathfrak{M} = \{i, \kappa, \ldots, \ell, \ldots\}$, $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \ldots\}$, $\mathfrak{K} = \{\mu, \nu, \ldots, \sigma\}$ когда прямое произведение $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{K}$ отображается на множество действительных чисел, то есть

$$(i, \alpha, \mu) \longrightarrow a_{i\alpha\mu}$$

$$\psi(a_{i\alpha\mu}) - \psi(a_{i\alpha\nu}) - \psi(a_{i\beta\mu}) + \psi(a_{i\beta\nu}) -$$

$$- \psi(a_{\kappa\alpha\mu}) + \psi(a_{\kappa\alpha\nu}) + \psi(a_{\kappa\beta\mu}) - \psi(a_{\kappa\beta\nu}) = 0$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

[1]. Ю.И. Кулаков "Элементы теории физических структур" Наст. изд. стр. 71 - 76.

[2]. Ю.И.Кулаков "К теории физических структур" Изд.НГУ 1968.

[3]. Я.Ацель "Успехи математических наук" т.II. вып.3 (69) стр. 3 - 65 1956.

[4]. Б.Я. Штивельман. Дипломная работа НГУ. 1968. Физический факультет.

§8 ДЕСЯТЬ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Задача 1. Доказать с помощью метода параметризации, что

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & 1 \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

есть соотношение физической структуры ранга (2,2).

Решение: Запишем (1) для подмножеств с эталонными элементами $\mathfrak{M}_2 = \{i, 0\}$, $\mathfrak{N}_2 = \{\alpha, 0\}$, предварительно разложив (1) по последней строке

$$a_{i\alpha} - a_{i\beta} - a_{k\alpha} + a_{k\beta} = 0, \qquad (2)$$

$$a_{i\alpha} - a_{i\alpha} - a_{0\alpha} + a_{00} = 0. \qquad (3)$$

Если ввести параметры $x_i = a_{i0}$ $\xi_\alpha = a_{0\alpha} - a_{00}$, то

$$a_{i\alpha} = x_i + \xi_\alpha. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получаем

$$x_i + \xi_\alpha - x_i - \xi_\beta - x_k - \xi_\alpha + x_k + \xi_\beta \equiv 0,$$

то есть действительно функция (4) реализует физическую структуру ранга (2,2) в форме (1).

Задача 2. Доказать, что функция $a_{i\alpha} = x_i \xi_\alpha + x_i + \xi_\alpha$ может быть аналитической формой выражения физического закона.

Решение: Необходимым и достаточным условием того, чтобы некоторая функция $a_{i\alpha} = f(x_i, \xi_\alpha)$ была функцией отображения, реализующей физическую структуру ранга (2,2) является

$$\frac{\partial f(x_i, \xi_\alpha)}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial f(x_i, \xi_\alpha)}{\partial \xi_\alpha} = A(x_i) B(\xi_\alpha), \qquad (1)$$

где $A(x_i)$ и $B(\xi_\alpha)$ произвольные функции. Для $f(x_i, \xi_\alpha) = x_i \xi_\alpha + x_i + \xi_\alpha$

получаем

$$\frac{\partial f(x_i,\xi_\alpha)}{\partial x_i} = \xi_\alpha + 1 ,$$

$$\frac{\partial f(x_i,\xi_\alpha)}{\partial \xi_\alpha} = x_i + 1$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial f(x_i,\xi_\alpha)}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial f(x_i,\xi_\alpha)}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\xi_\alpha + 1}{x_i + 1} .$$

Задача 3. Найти феноменологически инвариантную форму для физического закона $a_{i\alpha} = x_i \xi_\alpha + x_i + \xi_\alpha$.

Решение: Из предыдущей задачи

$$A(x_i) = \frac{1}{x_i + 1} ; \qquad B(\xi_\alpha) = \xi_\alpha + 1. \qquad (I)$$

Каноническая форма есть

$$a_{i\alpha} = \chi\,[R(x_i) \cdot S(\xi_\alpha)],$$

где

$$R(x_i) = \exp \int A(x_i)\, dx_i ; \qquad S(\xi_\alpha) = \exp \int \frac{d\xi_\alpha}{B(\xi_\alpha)} .$$

Воспользовавшись (I) получаем

$$R(x_i) = \exp \int \frac{dx_i}{1 + x_i} = 1 + x_i ,$$

$$S(\xi_\alpha) = \exp \int \frac{d\xi_\alpha}{1 + \xi_\alpha} = 1 + \xi_\alpha ,$$

$$a_{i\alpha} = \chi\,[(1 + x_i)(1 + \xi_\alpha)] = \chi\,[(x_i \xi_\alpha + x_i + \xi_\alpha) + 1] .$$

Очевидно, что $\chi(t) = t - 1$, $\chi^{-1}(t) = t + 1$. (2)

Инвариантная форма для физической структуры (2.2)

$$X^{-1}(a_{i\alpha})X^{-1}(a_{k\beta}) = X^{-1}(a_{i\beta})X^{-1}(a_{k\alpha}).$$

Воспользовавшись (2), получаем

$$(a_{i\alpha}+1)(a_{k\beta}+1) = (a_{i\beta}+1)(a_{k\alpha}+1)$$

или
$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & 1 \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (3)$$

Заметим, что в (3) каждое слагаемое может задавать соотношение физической структуры (2,2)

Задача 4. Проверить соотношение физической структуры (2.2)

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

на совместность

Решение. Возьмем три произвольных элемента i, k, ℓ и запишем соотношение (I) при фиксированных α и β для точек $\{i,\ell\}$ и $\{k,\ell\}$

$$a_{i\alpha}a_{\ell\beta} = a_{\ell\alpha}a_{i\beta}, \qquad (2)$$

$$a_{k\alpha}a_{\ell\beta} = a_{\ell\alpha}a_{k\beta}. \qquad (3)$$

Разделив (2) на (3) получаем

$$\frac{a_{i\alpha}}{a_{k\alpha}} = \frac{a_{i\beta}}{a_{k\beta}},$$

что эквивалентно (I) .Совместность (I), (2), (3) легко проверить также с помощью параметризации, которая приводит к функции

$$a_{i\alpha} = x_i \xi_\alpha .$$

Задача 5. Доказать, что функция

$$a_{i\alpha} = f(x_i, \xi_\alpha) = 1 + \sqrt{1 + 4(x_i^2 \xi_\alpha + x_i \xi_\alpha^2)},$$

полученная параметризацией соотношения

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} a_{k\beta} & a_{i\beta} + a_{k\alpha} \\ a_{i\beta} a_{k\alpha} & a_{i\alpha} + a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0$$

не может быть аналитической формой выражения физического закона, входящего в схему структуры (2,2).

Решение:

$$\frac{\partial f(x_i, \xi_\alpha)}{\partial x_i} = \frac{2(2x_i + \xi_\alpha) \cdot \xi_\alpha}{\sqrt{1 + 4(x_i^2 \xi_\alpha + x_i \xi_\alpha^2)}},$$

$$\frac{\partial f(x_i, \xi_\alpha)}{\partial \xi_\alpha} = \frac{2(x_i + 2\xi_\alpha) \cdot x_i}{\sqrt{1 + 4(x_i^2 \xi_\alpha + x_i \xi_\alpha^2)}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f(x_i, \xi_\alpha)}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial f(x_i, \xi_\alpha)}{\partial \xi_\alpha} = \frac{(2x_i + \xi_\alpha) \cdot \xi_\alpha}{(2\xi_\alpha + x_i) \cdot x_i} \neq A(x_i) B(\xi_\alpha),$$

то есть не выполняется необходимое условие (см. задачу 2).

Задача 6. Провести параметризацию соотношения:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{k\alpha} & a_{e\alpha} \\ a_{i\beta} & a_{k\beta} & a_{e\beta} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (I)$$

и показать, что (I) есть соотношение физической структуры (3,2).

Решение. Разложим (I) по первой строке

$$a_{i\alpha} \begin{vmatrix} a_{k\beta} & 1 \\ a_{e\beta} & 1 \end{vmatrix} - a_{i\beta} \begin{vmatrix} a_{k\alpha} & 1 \\ a_{e\alpha} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{k\alpha} & a_{k\beta} \\ a_{e\alpha} & a_{e\beta} \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Запишем (2) для подмножеств с эталонными элементами

$$\mathfrak{B}_3 = \{i, 0, \theta\}, \qquad \mathfrak{B}_2 = \{\alpha, 0\}.$$

$$a_{i\alpha}\begin{vmatrix} a_{00} & 1 \\ a_{\theta 0} & 1 \end{vmatrix} - a_{i0}\begin{vmatrix} a_{0\alpha} & 1 \\ a_{\theta\alpha} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{0\alpha} & a_{00} \\ a_{\theta\alpha} & a_{\theta 0} \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Вводя параметры $a_{i0} = x_i$,

$$\begin{vmatrix} a_{0\alpha} & 1 \\ a_{\theta\alpha} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{00} & 1 \\ a_{\theta 0} & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \xi_\alpha,$$

$$\begin{vmatrix} a_{0\alpha} & a_{00} \\ a_{\theta\alpha} & a_{\theta 0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{00} & 1 \\ a_{\theta 0} & 1 \end{vmatrix} = -\eta_\alpha,$$

находим из (3)

$$a_{i\alpha} = x_i \xi_\alpha + \eta_\alpha. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (I), легко убеждаемся, что

$$\begin{vmatrix} x_i\xi_\alpha + \eta_\alpha & x_i\xi_\beta + \eta_\beta & 1 \\ x_\kappa\xi_\alpha + \eta_\alpha & x_\kappa\xi_\beta + \eta_\beta & 1 \\ x_\ell\xi_\alpha + \eta_\alpha & x_\ell\xi_\beta + \eta_\beta & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

<u>зча 7.</u> Доказать совместность соотношения

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & 1 \\ a_{\kappa\alpha} & a_{\kappa\beta} & 1 \\ a_{\ell\alpha} & a_{\ell\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (I)$$

для структуры ранга (3,2)

<u>Решение.</u> Разложим (I) и запишем для всевозможных троек из i,κ,ℓ,m

$$\{i,\kappa,\ell\} = a_{\kappa\alpha}a_{\ell\beta} - a_{\ell\alpha}a_{\kappa\beta} + a_{\ell\alpha}a_{i\beta} - a_{i\alpha}a_{\ell\beta} + a_{i\alpha}a_{\kappa\beta} - a_{\kappa\alpha}a_{i\beta} = 0,$$

$$\{i,\kappa,m\} = a_{\kappa\alpha}a_{m\beta} - a_{m\alpha}a_{\kappa\beta} + a_{m\alpha}a_{i\beta} - a_{i\alpha}a_{m\beta} + a_{i\alpha}a_{\kappa\beta} - a_{\kappa\alpha}a_{i\beta} = 0,$$

$$\{i,\ell,m\} = a_{\ell\alpha}a_{m\beta} - a_{m\alpha}a_{\ell\beta} + a_{m\alpha}a_{i\beta} - a_{i\alpha}a_{m\beta} + a_{i\alpha}a_{\ell\beta} - a_{\ell\alpha}a_{i\beta} = 0,$$

$$\{\kappa,\ell,m\} = a_{\ell\alpha}a_{m\beta} - a_{m\alpha}a_{\ell\beta} + a_{m\alpha}a_{\kappa\beta} - a_{\kappa\alpha}a_{m\beta} + a_{\kappa\alpha}a_{\ell\beta} - a_{\ell\alpha}a_{\kappa\beta} = 0.$$

$$\{i,k,\ell\} = \{i,k,m\} - \{i,\ell,m\} + \{k,\ell,m\}.$$

Для доказательства совместности (I) по вторым индексам запишем (I) в виде

$$\frac{a_{i\alpha} - a_{k\alpha}}{a_{\ell\alpha} - a_{k\alpha}} = \frac{a_{i\beta} - a_{k\beta}}{a_{\ell\beta} - a_{k\beta}}. \qquad (2)$$

(2) для трех элементов α, β, γ можно записать

$$\frac{a_{i\alpha} - a_{k\alpha}}{a_{\ell\alpha} - a_{k\alpha}} = \frac{a_{i\gamma} - a_{k\gamma}}{a_{\ell\gamma} - a_{k\gamma}} = \frac{a_{i\beta} - a_{k\beta}}{a_{\ell\beta} - a_{k\beta}} \qquad (3)$$

Из (3) следуют все возможные соотношения (I) для трех элементов α, β, γ.

Задача 8. Провести параметризацию соотношения для физической структуры $(3,3)$

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} & 1 \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} & 1 \\ a_{\ell\alpha} & a_{\ell\beta} & a_{\ell\gamma} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (I)$$

Решение. Запишем (I) для подмножеств с эталонными элементами $\mathcal{M}_3 = \{i,0,\theta\}$, $\mathcal{N}_3 = \{\alpha,0,\theta\}$

$$0 = \begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i0} & a_{i\theta} & 1 \\ a_{0\alpha} & a_{00} & a_{0\theta} & 1 \\ a_{\theta\alpha} & a_{\theta 0} & a_{\theta\theta} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Вычтем в (2) третий столбец из предыдущих

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} - a_{i\theta} & a_{i0} - a_{i\theta} & 1 \\ a_{0\alpha} - a_{0\theta} & a_{00} - a_{0\theta} & 1 \\ a_{\theta\alpha} - a_{\theta\theta} & a_{\theta 0} - a_{\theta\theta} & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Разлагая (3) по элементам первого столбца и вводя параметры

$$a_{i0} = y_i, \qquad a_{i0} - a_{i\theta} = x_i,$$

$$\begin{vmatrix} a_{0\alpha} - a_{00} & 1 \\ a_{\theta\alpha} - a_{\theta\theta} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{00} - a_{0\theta} & 1 \\ a_{\theta 0} - a_{\theta\theta} & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \xi_\alpha,$$

$$\begin{vmatrix} a_{0\alpha} - a_{00} & a_{00} - a_{0\theta} \\ a_{\theta\alpha} - a_{\theta\theta} & a_{\theta 0} - a_{\theta\theta} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{00} - a_{0\theta} & 1 \\ a_{\theta 0} - a_{\theta\theta} & 1 \end{vmatrix} = -\eta_\alpha,$$

приходим к

$$a_{i\alpha} = x_i \xi_\alpha + y_i + \eta_\alpha. \qquad (4)$$

Легко проверить, что подстановка (4) в (I) обращает (I) в тождество.

Задача 9. Доказать совместность соотношений для физической структуры ранга $(3,3.)$

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ a_{e\alpha} & a_{e\beta} & a_{e\gamma} \end{vmatrix} = 0 \qquad (I)$$

Решение. Запишем (I) для любых трех точек из i, k, e, m, предварительно разложив (I) по последней строке

$$\{ike\} = a_{e\alpha}(a_{i\beta}a_{k\gamma} - a_{k\beta}a_{i\gamma}) + a_{e\beta}(a_{k\alpha}a_{i\gamma} - a_{i\alpha}a_{k\gamma}) + a_{e\gamma}(a_{i\alpha}a_{k\beta} - a_{i\beta}a_{k\alpha}),$$

$$\{ikm\} = a_{m\alpha}(a_{i\beta}a_{k\gamma} - a_{k\beta}a_{i\gamma}) + a_{m\beta}(a_{k\alpha}a_{i\gamma} - a_{i\alpha}a_{k\gamma}) + a_{m\gamma}(a_{i\alpha}a_{k\beta} - a_{k\alpha}a_{i\beta}),$$

$$\{iem\} = a_{m\alpha}(a_{i\beta}a_{e\gamma} - a_{e\beta}a_{i\gamma}) + a_{m\beta}(a_{e\alpha}a_{i\gamma} - a_{i\alpha}a_{e\gamma}) + a_{m\gamma}(a_{i\alpha}a_{e\beta} - a_{e\alpha}a_{i\beta}),$$

$$\{kem\} = a_{m\alpha}(a_{k\beta}a_{e\gamma} - a_{e\beta}a_{k\gamma}) + a_{m\beta}(a_{e\alpha}a_{k\gamma} - a_{k\alpha}a_{e\gamma}) + a_{m\gamma}(a_{k\alpha}a_{e\beta} - a_{e\alpha}a_{k\beta}).$$

Соотношения для точек $\{ikm\}$, $\{iem\}$ и $\{kem\}$ можно рассматривать как систему из трех линейных однородных уравнений для $a_{m\alpha}$, $a_{m\beta}$, $a_{m\gamma}$, которая должна иметь нетривиальные решения. Ранг матрицы системы для этого должен быть равен нулю

$$\begin{vmatrix} a_{i\beta}a_{k\gamma} - a_{k\beta}a_{i\gamma} & a_{k\alpha}a_{i\gamma} - a_{i\alpha}a_{k\gamma} & a_{i\alpha}a_{k\beta} - a_{k\alpha}a_{i\beta} \\ a_{i\beta}a_{e\gamma} - a_{e\beta}a_{i\gamma} & a_{e\alpha}a_{i\gamma} - a_{i\alpha}a_{e\gamma} & a_{i\alpha}a_{e\beta} - a_{e\alpha}a_{i\beta} \\ a_{k\beta}a_{e\gamma} - a_{e\beta}a_{k\gamma} & a_{e\alpha}a_{k\gamma} - a_{k\alpha}a_{e\gamma} & a_{k\alpha}a_{e\beta} - a_{e\alpha}a_{k\beta} \end{vmatrix} = 0 . \qquad (2)$$

Легко показать разложением, что (2) можно привести к

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\gamma} \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\gamma} \\ a_{e\alpha} & a_{e\beta} & a_{e\gamma} \end{vmatrix}^2 = 0,$$

откуда и следует (I).

Параметризация (I) дает $a_{i\alpha} = \xi_\alpha x_i + \eta_\alpha y_i$ и подстановка этой функции в (I) обращает (I) в тождество (проверить самостоятельно).

Задача IO. Показать, что функция отображения

$$a_{i\alpha} = \frac{x_i \xi_\alpha + \eta_\alpha}{x_i + \zeta_\alpha} \qquad (I)$$

реализует физическую структуру ранга (4,2) в форме:

$$\begin{vmatrix} a_{i\alpha} & a_{i\beta} & a_{i\alpha}a_{i\beta} & 1 \\ a_{k\alpha} & a_{k\beta} & a_{k\alpha}a_{k\beta} & 1 \\ a_{e\alpha} & a_{e\beta} & a_{e\alpha}a_{e\beta} & 1 \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & a_{m\alpha}a_{m\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (2)$$

Решение. Подставляя (2) в (I) и освобождаясь от знаменателей в каждой строке получаем

$$\begin{vmatrix} (x_i\xi_\alpha+\eta_\alpha)(x_i+\zeta_\beta) & (x_i\xi_\beta+\eta_\beta)(x_i+\zeta_\alpha) & (x_i\xi_\alpha+\eta_\alpha)(x_i\xi_\beta+\eta_\beta) & (x_i+\zeta_\alpha)(x_i+\zeta_\beta) \\ (x_k\xi_\alpha+\eta_\alpha)(x_k+\zeta_\beta) & (x_k\xi_\beta+\eta_\beta)(x_k+\zeta_\alpha) & (x_k\xi_\alpha+\eta_\alpha)(x_k\xi_\beta+\eta_\beta) & (x_k+\zeta_\alpha)(x_k+\zeta_\beta) \\ (x_e\xi_\alpha+\eta_\alpha)(x_e+\zeta_\beta) & (x_e\xi_\beta+\eta_\beta)(x_e+\zeta_\alpha) & (x_e\xi_\alpha+\eta_\alpha)(x_e\xi_\beta+\eta_\beta) & (x_e+\zeta_\alpha)(x_e+\zeta_\beta) \\ (x_m\xi_\alpha+\eta_\alpha)(x_m+\zeta_\beta) & (x_m\xi_\beta+\eta_\beta)(x_m+\zeta_\alpha) & (x_m\xi_\alpha+\eta_\alpha)(x_m\xi_\beta+\eta_\beta) & (x_m+\zeta_\alpha)(x_m+\zeta_\beta) \end{vmatrix} \quad (3)$$

Разложим определитель (3) в сумму определителей по известному правилу

$$\begin{vmatrix} a & b+c \\ d & e+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ d & h \end{vmatrix}.$$

В определителе (3) имеется всего три отличных столбика (если отбросить общий коэффициент)

$$\begin{array}{lll} 1.\ x_i^2 & 2.\ x_i & 3.\ \mathrm{I} \\ x_k^2 & x_k & \mathrm{I} \\ x_e^2 & x_e & \mathrm{I} \\ x_m^2 & x_m & \mathrm{I} \end{array} \quad (4)$$

Ясно, что в разложении (3) на определители четвертого порядка любой из них будет содержать какой-то из столбцов(4) дважды и потому каждый член в разложении определителя (3) обращается в нуль; это и доказывает , что соотношение (2) есть соотношение физической структуры ранга (4,2).

К Ч И Т А Т Е Л Я М

Отзывы об этой книге просим присылать
по адресу: г.Новосибирск, 90
ул.Жемчужная, 10, кв.14 тел. 65-58-32
КУЛАКОВУ Юрию Ивановичу

Кулаков Юрий Иванович
Элементы теории физических структур
(Лекции для студентов НГУ)

Дополнение Г.Г.Михайличенко

Ответственный за выпуск Б.Я.Штивельман

Подписано к печати 25/-69 г. МН02518
заказ № 224

Формат 60 х 84 1/16
Объем 16 п.л.

Тираж 600 экз. Цена 40 коп.

Отпечатано на ротапринте НГУ, Новосибирск-90