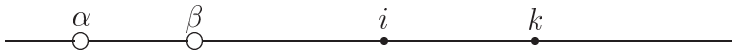
Пример 12. Ангармоническое отношение

Начнём с простейшего понятия, с расстояния между двумя точками i и k, лежащими на прямой,

$$(i\,k) = \ell_{ik}$$



Введём следующие обозначения:

$$(\alpha;\, ik) = \ell_{\alpha;ik} = \ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha k}$$
$$(\beta;\, ik) = \ell_{\beta;ik} = \ell_{\beta i} - \ell_{\beta k},$$

где α и β — две фиксированные точки на прямой.

Условие инвариантности расстояния ℓ_{ik} запишется в виде:

$$(\alpha;\, ik) = (\beta;\, ik)$$

или

$$\ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha k} - \ell_{\beta i} + \ell_{\beta k} = 0. \qquad (1)$$

Легко видеть, что сакральное тождество (1) может быть записано в виде:

$$\ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha k} - \ell_{\beta i} + \ell_{\beta k} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \ell_{\alpha i} & \ell_{\alpha k} \\ -1 & \ell_{\beta i} & \ell_{\beta k} \end{vmatrix} =$$
$$= \overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\beta;\,ik}(\mathring{w}) \equiv 0,$$

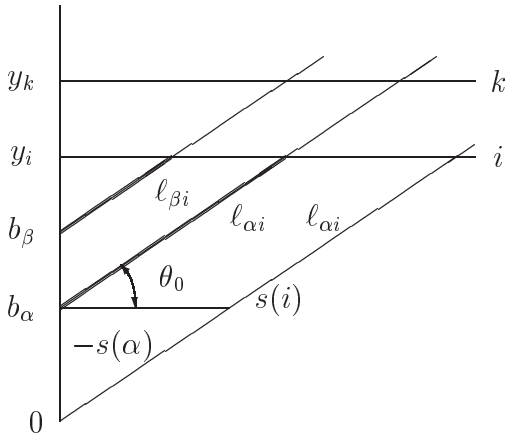
где

$$\mathring{w}_{\alpha i} = \ell_{\alpha i} = \frac{y_i - b_\alpha}{\sin\theta_0} = \overline{s}(i) + \underline{s}(\alpha).$$

$\overline{s}(i) = \dfrac{y_i}{\sin\theta_0}$ – скрытый параметр текущей точки i;

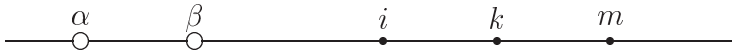
$\underline{s}(\alpha) = \dfrac{-b_\alpha}{\sin\theta_0}$ – скрытый параметр фиксированной точки α.

Тождество (1) допускает следующую геометрическую интерпретацию:



Итак, за понятием расстояния между двумя точками, лежащими на прямой (ik) , скрывается свойство аддитивности (см. Пример 5), находящее свое выражение в существовании физической структуры рода $\overset{1}{K}{}^{11}_{\alpha\beta;ik}(\overset{\circ}{w}) \equiv 0$.

Рассмотрим далее три точки i, k, m , лежащие на прямой



и введём новое понятие гармонического (простого) отношения между тремя точками:

$$(i\,k\,m) = \frac{\ell_{im}}{\ell_{mk}}.$$

Что скрывается за гармоническим отношением $(i\,k\,m)$?

Введём следующее обозначение:

$$(\alpha; ikm) = \frac{\ell_{\alpha;im}}{\ell_{\alpha;mk}} = \frac{\ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha m}}{\ell_{\alpha m} - \ell_{\alpha k}}.$$

Условие инвариантности гармонического отношения записывается в виде:

$$(\alpha;\, ikm) = (\beta;\, ikm)$$

или

$$\frac{\ell_{\alpha;\,im}}{\ell_{\alpha;\,mk}} - \frac{\ell_{\beta;\,im}}{\ell_{\beta;\,mk}} = \frac{\ell_{\alpha;\,im}\ell_{\beta;\,mk} - \ell_{\alpha;\,mk}\ell_{\beta;\,ik}}{\ell_{\alpha;\,mk}\ell_{\beta;\,mk}} = 0. \qquad (2)$$

Но легко видеть, что это сакральное тождество (2) можно записать в виде:

$$(\alpha;\, ikm) - (\beta;\, ikm) = \frac{(\ell_{\alpha i} - \ell_{\alpha m})(\ell_{\beta m} - \ell_{\beta k}) - (\ell_{\alpha m} - \ell_{\alpha k})(\ell_{\beta i} - \ell_{\beta k})}{\ell_{\alpha;\,mk}\ell_{\beta;\,mk}} =$$

$$= \ell^{-1}_{\alpha;\,km}\ell^{-1}_{\beta;\,km}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \ell_{\alpha i} & \ell_{\alpha k} & \ell_{\alpha m} \\ \ell_{\beta i} & \ell_{\beta k} & \ell_{\beta m} \end{vmatrix} \equiv 0$$

То есть

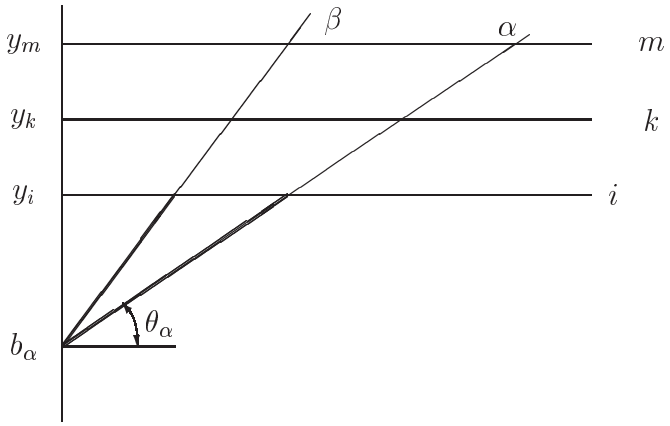
$$\ell_{\alpha;\,km}\ell_{\beta;\,km}\big[(\alpha;\,ikm)-(\beta;\,ikm)\big]=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\0&\ell_{\alpha i}&\ell_{\alpha k}&\ell_{\alpha m}\\0&\ell_{\beta i}&\ell_{\beta k}&\ell_{\beta m}\\-1&0&0&0\end{vmatrix}=$$

$$=\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;\,ikm}(\overset{1}{u})\equiv 0, \tag{3}$$

где

$$\overset{1}{u}_{\alpha i}=\ell_{\alpha i}=\frac{y_i-b_\alpha}{\sin\theta_\alpha}=\xi_\alpha x_i+\underline{s}(\alpha),$$
$$\xi_\alpha=\frac{1}{\sin\theta_\alpha},$$
$$x_i=y_i,$$
$$\underline{s}(\alpha)=\frac{-b_\alpha}{\sin\theta_\alpha}.$$

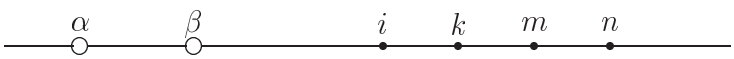
Тождество (3) допускает следующую геометрическую интерпретацию:



Итак, за понятием гармонического отношения трёх точек $(i\ k\ m)$ скрывается свойство аддитивности и подобия, находящее свое выражение в существовании физической структуры рода

$$\overset{2}{K}{}^{01}_{\alpha\beta;\,ikm}(\overset{1}{u})\equiv 0.$$

Рассмотрим, наконец, четыре точки i,k,m,n , лежащие на прямой



и введём новое понятие ангармонического (двойного) отношения между четырьмя точками. Введём следующее обозначение:

$$(\alpha;\,ikmn)=\frac{\ell_{\alpha;\,im}\ell_{\alpha;\,kn}}{\ell_{\alpha;\,in}\ell_{\alpha;\,km}}.$$

Условие инвариантности ангармонического отношения записывается в виде:

$$(\alpha;\, ikmn) = (\beta;\, ikmn)$$

или

$$\frac{\ell_{\alpha;\,im}\ell_{\alpha;\,kn}}{\ell_{\alpha;\,in}\ell_{\alpha;\,km}} - \frac{\ell_{\beta;\,im}\ell_{\beta;\,kn}}{\ell_{\beta;\,in}\ell_{\beta;\,km}} =$$
$$\frac{1}{\ell_{\alpha;\,in}\ell_{\alpha;\,km}\ell_{\beta;\,in}\ell_{\beta;\,km}}\big[(\ell_{\alpha i}-\ell_{\alpha m})(\ell_{\alpha k}-\ell_{\alpha n})(\ell_{\beta i}-\ell_{\beta n})(\ell_{\beta k}-\ell_{\beta m}) -$$
$$-(\ell_{\alpha i}-\ell_{\alpha n})(\ell_{\alpha k}-\ell_{\alpha m})(\ell_{\beta i}-\ell_{\beta m})(\ell_{\beta k}-\ell_{\beta n})\big] \equiv 0.$$

Выражение в квадратных скобках может быть записано в виде:

$$\begin{gathered}(\ell_{\alpha i}-\ell_{\alpha m})(\ell_{\alpha k}-\ell_{\alpha n})(\ell_{\beta i}-\ell_{\beta n})(\ell_{\beta k}-\ell_{\beta m}) -\\ -(\ell_{\alpha i}-\ell_{\alpha n})(\ell_{\alpha k}-\ell_{\alpha m})(\ell_{\beta i}-\ell_{\beta m})(\ell_{\beta k}-\ell_{\beta n}) =\\ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ell_{\alpha i} & \ell_{\alpha k} & \ell_{\alpha m} & \ell_{\alpha n} \\ \ell_{\beta i} & \ell_{\beta k} & \ell_{\beta m} & \ell_{\beta n} \\ \ell_{\alpha i}\ell_{\beta i} & \ell_{\alpha k}\ell_{\beta k} & \ell_{\alpha m}\ell_{\beta m} & \ell_{\alpha n}\ell_{\beta n} \end{vmatrix} = \overset{2}{M}{}^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\overset{1}{p}) \equiv 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Эту связь физической структуры ранга (2, 4) с проективно инвариантным ангармоническим отношением впервые обнаружил мой ученик Владимир Хананович Лев [1].

Сакральное тождество (4) допускает следующую геометрическую интерпретацию:

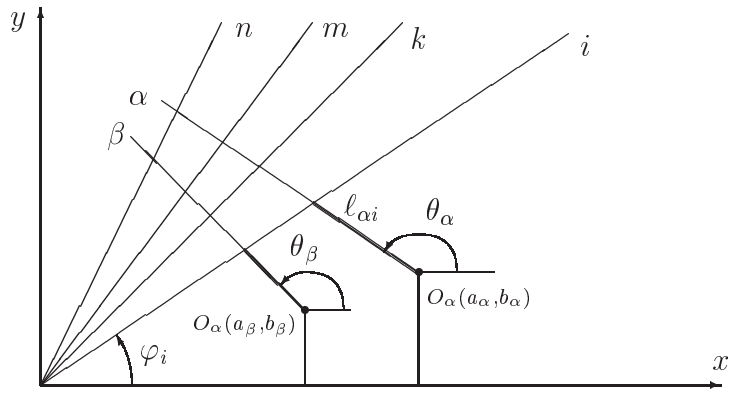


Рис. 1. Два множества прямых $\overline{\mathfrak{M}}$ и $\underline{\mathfrak{N}}$.

В качестве репрезентатора $\ell_{\alpha i}$, характеризующего отношение между прямой $i \in \overline{\mathfrak{M}}$ и прямой $\alpha \in \underline{\mathfrak{N}}$, возьмём расстояние от точки (a_α, b_α) до точки пересечения прямой α с прямой i.

Каждая прямая i из множества $\overline{\mathfrak{M}}$ характеризуется **одним** параметром, углом φ_i, а каждая прямая α из множества $\underline{\mathfrak{N}}$ характеризуется **тремя** параметрами, двумя декартовыми координатами a_α, b_α точки (a_α, b_α) и углом θ_α.

Из рис. 1. следует, что

$$\ell_{\alpha i} = \frac{-\dfrac{a_\alpha}{\cos\theta_\alpha}\operatorname{tg}\varphi_i + \dfrac{b_\alpha}{\cos\theta_\alpha}}{\operatorname{tg}\varphi_i - \operatorname{tg}\theta_\alpha} = \frac{\xi_\alpha x_i + \sigma_\alpha}{x_i + \lambda_\alpha},$$

где

$$\xi_\alpha = -\frac{a_\alpha}{\cos\theta_\alpha}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{b_\alpha}{\cos\theta_\alpha}$$

$$\lambda_\alpha = -\operatorname{tg}\theta_\alpha$$

$$x_i = \operatorname{tg}\varphi_i.$$

Итак, за понятием ангармонического (двойного) отношения четырёх точек $(i\,k\,m\,n)$ скрывается проективный инвариант, находящий своё выражение в существовании спорадической физической структуры ранга (2,4):

$$\overset{2}{M}{}^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\overset{1}{p}) \equiv 0. \tag{5}$$

Поскольку ангармоническое отношение является инвариантом проективного преобразования

$$\overset{1}{p}_{\alpha i} = \ell_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + s_\alpha}{x_i + \lambda_\alpha} = \frac{\xi'_\alpha x'_i + s'_\alpha}{x'_i + \lambda'_\alpha},$$

где

$$x = \frac{a\,x' + b}{x' + c} \qquad \text{и обратно} \qquad x' = \frac{-c\,x + b}{x - a}$$

$$\xi' = \frac{a\,\xi + \sigma}{\lambda + a}$$

$$\sigma' = \frac{b\,\xi + c\,\sigma}{\lambda + a}$$

$$\lambda' = \frac{c\,\lambda + b}{\lambda + a},$$

появляется возможность построить проективную геометрию плоскости на новых основаниях, а именно, на спорадическом решении Михайличенко (5) сакрального уравнения Теории физических структур:

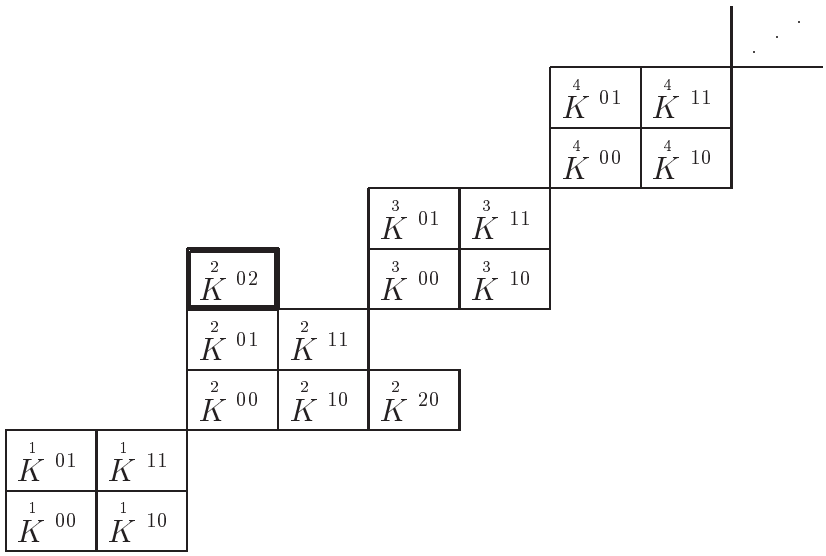
$$\Phi_{2,4}(\varphi_{\alpha i},\ \varphi_{\alpha k},\ \varphi_{\alpha m},\ \varphi_{\alpha n},\ \varphi_{\beta i},\ \varphi_{\beta k},\ \varphi_{\beta m},\ \varphi_{\beta n}) \equiv 0.$$

Итак, имеет место следующая

Сакральная формулировка закона, лежащего в основании ангармонического отношения и в основании проективной геометрии

$$\overset{2}{M}{}^{02}_{\alpha\beta;\,ikmn}(\overset{1}{p}) \equiv 0$$

$$\overset{1}{p}_{\alpha i} = \ell_{\alpha i} = \frac{\xi_\alpha x_i + s_\alpha}{x_i + \lambda_\alpha}$$



Место физической структуры ранга (2, 4), выражающей сущность ангармонического отношения и тесно связанной с ним проективной геометрии, среди всех возможных физических структур.

Литература к Примеру 12

[1]. *Лев В.Х.* Бинарная физическая структура ранга (3,3). //Структурный анализ символьных последовательностей. Выпуск 101. Вычислительные системы. - Новосибирск.: Институт математики СОАН СССР, 1984. С. 91 - 113.