Пример 19. Канонические преобразования

Рассмотрим систему канонических уравнений Гамильтона:

$$\begin{aligned} \dot{p}_\mu &= -\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\nu, p_\nu, t), \\ \dot{q}_\mu &= \frac{\partial H}{\partial p^\mu}(q^\nu, p_\nu, t). \end{aligned} \tag{1}$$

Каким должно быть преобразование старых переменных $q^1, \ldots, q^n$; $p_1, \ldots, p_n$ к новым $Q^1, \ldots, Q^n$; $P_1, \ldots, P_n$

$$\begin{aligned} q^\mu &= q^\mu(Q^\mu, P_\nu, t) \\ p_\mu &= p_\mu(Q^\mu, P_\nu, t), \end{aligned}$$

сохраняющее вид уравнений (1), то есть переводящее систему уравнений (1) в систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{P}_\mu &= -\frac{\partial K}{\partial Q^\mu}(Q^\mu, P_\nu, t), \\ \dot{Q}^\mu &= \frac{\partial K}{\partial P_\nu}(Q^\mu, P_\nu, t) \ ? \end{aligned} \tag{2}$$

Такие преобразования называются **каноническими**. Оказывается, что в основании канонических преобразований лежит рассмотренная выше общая теория сакральных потенциалов:

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu),\ A^{01}(x^\mu, \xi_\nu),\ A^{10}(x_\mu, \xi^\nu),\ A^{11}(x_\mu, \xi_\nu).$$

Эти потенциалы порождают систему $4n + 4n$ дуально сопряжённых уравнений, связывающих между собой $4n$ переменных:

$$\begin{array}{ll} x^1, \ldots, x^n; & \xi^1, \ldots, \xi^n \\ x_1, \ldots, x_n; & \xi_1, \ldots, \xi_n : \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu) = -x_\mu & \dfrac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu \\ \dfrac{\partial A^{01}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi_\nu) = -x_\mu & \dfrac{\partial A^{01}}{\partial \xi_\nu}(x^\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu \\ \dfrac{\partial A^{10}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi^\nu) = x^\mu & \dfrac{\partial A^{10}}{\partial \xi^\nu}(x_\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu \\ \dfrac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi_\nu) = x^\mu & \dfrac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu \end{array}$$

если потенциалы A_{00}, A^{01}, A^{10}, A^{11} связаны между собой следующими соотношениями:

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) = A^{00}(x^\mu, \xi^\nu)$$
$$A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) = A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + \xi_\nu \xi^\nu$$
$$A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) = A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu$$
$$A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) = A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu \xi^\nu.$$

Канонические преобразования

$$q^\mu = q^\mu(Q^\mu, P_\nu, t)$$
$$p_\nu = p_\nu(Q^\mu, P_\nu, t)$$

возникают из теории сакральных потенциалов, если придать переменным x^μ , x_μ , ξ^ν , ξ_ν следующий физический смысл:

$$x^1, \ldots, x^n = q^1, \ldots, q^n; \qquad \xi^1, \ldots, \xi^n = Q^1, \ldots, Q^n$$
$$x_1, \ldots, x_n = -p_1, \ldots, -p_n; \qquad \xi_1, \ldots, \xi_n = P_1, \ldots, P_n$$

и ввести следующие четыре производящие функции:

$$F_1(q^\mu, Q^\nu, t) = A^{00}(x^\mu, \xi^\nu)$$
$$F_2(q^\mu, P_\nu, t) = A^{01}(x^\mu, \xi_\nu)$$
$$F_3(p_\mu, Q^\nu, t) = A^{10}(x_\mu, \xi^\nu)$$
$$F_4(p_\mu, P_\nu, t) = A^{11}(x_\mu, \xi_\nu).$$

В этом случае одно и тоже каноническое преобразование может быть получено одним из следующих четырёх вариантов:
первый вариант:

$$\frac{\partial F_1}{\partial q^\mu}(q^\mu, Q^\nu, t) = p_\mu; \qquad \frac{\partial F_1}{\partial Q^\nu}(q^\mu, Q^\nu, t) = -P_\nu; \tag{3}$$

второй вариант:

$$\frac{\partial F_2}{\partial q^\mu}(q^\mu, P_\nu, t) = p_\nu; \qquad \frac{\partial F_2}{\partial P_\nu}(q^\mu, P_\nu, t) = Q^\nu; \tag{4}$$

третий вариант

$$\frac{\partial F_3}{\partial p_\mu}(p_\mu, Q^\nu, t) = -q^\mu; \qquad \frac{\partial F_3}{\partial Q^\nu}(p_\mu, Q^\nu, t) = -P_\nu; \tag{5}$$

четвёртый вариант:

$$\frac{\partial F_4}{\partial p_\mu}(p_\mu, P_\nu, t) = -q^\mu; \qquad \frac{\partial F_4}{\partial P_\nu}(p_\mu, P_\nu, t) = Q^\nu, \tag{6}$$

если четыре производящие функции

$$F_1(q^\mu, Q^\nu, t), \qquad F_2(q^\mu, P_\nu, t), \qquad F_3(p_\mu, Q^\nu, t), \qquad F_4(p_\mu, P_\nu, t)$$

связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} F_1(q^m, Q^\nu, t) &= F_1(q^m, Q^\nu, t) \\ F_2(q^\mu, P_\nu, t) &= F_1(q^m, Q^\nu, t) + P_\nu Q^\nu \\ F_3(p_\mu, Q^\nu, t) &= F_1(q^m, Q^\nu, t) - p_\mu q^\mu \\ F_4(p_\mu, P_\nu, t) &= F_1(q^m, Q^\nu, t) - p_\mu q^\mu + P_\nu Q^\nu. \end{aligned}$$

Докажем, что канонические преобразования, заданные в неявном виде каждым из четырёх вариантов (3)–(6), приводят к новой системе канонических уравнений (2).

Из равенств (3)–(6) следуют, соответственно, следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p_\mu}{\partial Q^\nu} = -\frac{\partial P_\nu}{\partial q^\mu}; \qquad &&\frac{\partial p_\mu}{\partial P_\nu} = \frac{\partial Q^\nu}{\partial q^\mu}; \\ &\frac{\partial q^\mu}{\partial Q^\nu} = \frac{\partial P_\nu}{\partial p_\mu}; \qquad &&\frac{\partial q^\mu}{\partial P_\nu} = -\frac{\partial Q^\nu}{\partial p_\mu}. \end{aligned} \tag{7}$$

В качестве новой функции Гамильтона $K(Q^\mu, P_\nu, t)$ возьмём одну из следующих четырёх функций:
первый вариант:

$$K_1(Q, \overline{P}, t, \overline{c}) = H\left(q(Q, \overline{P}, t), p(Q, \overline{P}, t), t\right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(\overline{c}, Q^\nu, t); \tag{8}$$

второй вариант:

$$K_2(\overline{Q}P, t, \overline{c}) = H\left(q(\overline{Q}, P, t), p(\overline{Q}, P, t), t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(\overline{c}, P_\nu, t); \tag{9}$$

третий вариант:

$$K_3(Q, \overline{P}, t, \underline{c}) = H\left(q(Q, \overline{P}, t), p(Q, \overline{P}, t), t\right) + \frac{\partial F_3}{\partial t}(\underline{c}, Q^\nu, t); \tag{10}$$

четвёртый вариант:

$$K_4(\overline{Q}, P, t, \underline{c}) = H\left(q(\overline{Q}, P, t), p(\overline{Q}, P, t), t\right) + \frac{\partial F_4}{\partial t}(\underline{c}, P_\nu, t), \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} Q^\mu &= Q^\mu(q, p, t); \qquad &\overline{Q} &= \overline{Q}^\mu(q, p); \\ P_\nu &= P_\nu(q, p, t); \qquad &\overline{P}_\nu &= \overline{P}_\nu(q, p), \end{aligned}$$

где $\overline{c} = c^1, \ldots, c^n$ и $\underline{c} = c_1, \ldots, c_n$ – два набора произвольных констант.

Учитывая соотношение (7) и им эквивалентные

$$\frac{\partial p_\mu}{\partial \overline{Q}^\nu} = -\frac{\partial \overline{P}_\nu}{\partial q^\mu}, \qquad \frac{\partial p_\mu}{\partial \overline{P}_\nu} = \frac{\partial \overline{Q}^\nu}{\partial q^\mu},$$

$$\frac{\partial q^\mu}{\partial \overline{Q}^\nu} = \frac{\partial \overline{P}_\nu}{\partial p_\mu}, \qquad \frac{\partial q^\mu}{\partial \overline{P}_\nu} = -\frac{\partial \overline{Q}^\nu}{\partial p_\mu}.$$

легко получаем непосредственным дифференцированием равенств (8)–(11) следующие уравнения:

$$\frac{\partial K_1}{\partial Q^\mu}(Q, \overline{P}, y, \overline{c}) = -\dot{P}_\mu; \qquad \frac{\partial K_1}{\partial \overline{P}_\mu}(Q, \overline{P}, t, \overline{c}) = \dot{\overline{Q}}^\mu;$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial \overline{Q}^\mu}(\overline{Q}, P, t, \overline{c}) = -\dot{\overline{P}}_\mu; \qquad \frac{\partial K_2}{\partial P_\mu}(Q, \overline{P}, t, \overline{c}) = \dot{Q}^\mu;$$

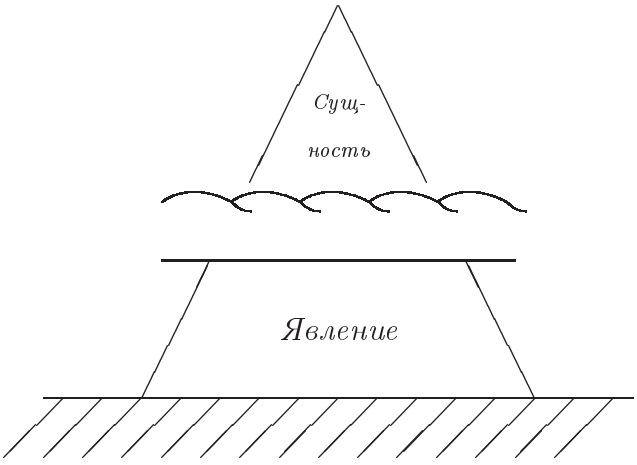
$$\frac{\partial K_3}{\partial Q^\mu}(Q, \overline{P}, y, \underline{c}) = -\dot{P}_\mu; \qquad \frac{\partial K_3}{\partial \overline{P}_\mu}(Q, \overline{P}, t, \underline{c}) = \dot{\overline{Q}}^\mu;$$

$$\frac{\partial K_4}{\partial \overline{Q}^\mu}(\overline{Q}, P, t, \underline{c}) = -\dot{\overline{P}}_\mu; \qquad \frac{\partial K_4}{\partial P_\mu}(Q, \overline{P}, t, \underline{c}) = \dot{Q}^\mu.$$

Итак, в конечном итоге система канонических уравнений Гамильтона в новых переменных Q^μ, P^ν имеет вид:

$$\frac{\partial K}{\partial Q^\mu}(Q, P, t) = -\dot{P}_\mu$$

$$\frac{\partial K}{\partial P_\mu}(Q, P, t) = \dot{Q}^\mu$$



Литература к Примеру 19

[1]. *Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М.* Механика. (Серия "Теоретическая физика" том. 1), М., 1973 г., С. 173.



Московский государственный университет

А вот и дом, куда он так летел –
Старинное святилище науки.
Московских зодчих золотые руки
Здесь положили прочности предел.