Пример 17. Механика Лагранжа и механика Гамильтона

По традиции, идущей от "Теоретической физики" Ландау, в основание механики положен принцип наименьшего действия Гамильтона. Из него вытекает как следствие система дифференциальных уравнений второго порядка – система уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где

$$L(q^\mu, \dot{q}^\mu, t) = L(q^\mu, v^\mu, t) -$$

функция Лагранжа, частные производные которой по q^μ и v^μ имеют простой физический смысл:

$$\frac{\partial L}{\partial q^\mu}(q^\mu, v^\mu, t) = f_\mu, \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v^\mu}(q^\mu, v^\mu, t) = p_\mu, \tag{3}$$

где q^μ — обобщённая координата,
$v^\mu = \dot{q}^\mu$ — обобщённая скорость,
p_μ — обобщённый импульс,
$f_\mu = \dot{p}_\mu$ — обобщённая сила,
где точка над буквой служит обозначением производной по времени t.

Из равенств (2) и (3) следует:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q^\mu} dq^\mu + \frac{\partial L}{\partial v^\nu} v^\nu + \frac{\partial L}{\partial t} dt = f_\mu dq^\mu + p_\nu dv^\nu + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{4}$$

Равенство (4) можно переписать в виде:

$$dL = f_\mu dq^\mu + d(p_\nu v^\nu) - v^\nu dp_\nu + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

или

$$d(-L + p_\mu v^\mu) = dH = \frac{\partial H}{\partial q^\mu} dq^\mu + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} dp_\mu + \frac{\partial H}{\partial t} dt = -f_\mu dq^\mu + v^\mu dp_\mu - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \tag{5}$$

где

$$H(q^\mu, p_\nu, t) = -L(q^\mu, v^\mu, t) + p_\mu v^\mu.$$

Равенство (4) может быть переписано в другом виде:

$$dL = d(f_\mu q^\mu) - q^\mu df_\mu + p_\mu dv^\mu + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

или

$$d(-L+f_\mu q^m)=q^\mu df_\mu-p_\mu dv^\mu-\frac{\partial L}{\partial t}dt=d\widetilde{H}=\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial f_\mu}df_\mu+\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial v^\mu}dv^\mu-\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial t}dt, \quad (6)$$

где

$$\widetilde{H}(f_\mu,v^\nu,t)=-L(q^\mu,v^\nu,t)+f_\mu q^\mu.$$

Наконец, перепишем равенство (4) в виде:

$$dL=d(f_\mu q^\mu)+d(p_\nu v^\nu)-q^\mu df_\mu-v_\nu dp_\nu+\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

или

$$d(-L+f_\mu q^\mu+p_\nu v^\nu)=q^\mu df_\mu+v^\nu dp_\nu-\frac{\partial L}{\partial t}dt=$$
$$=d\widetilde{U}=\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial f_\mu}df_\mu+\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial p_\nu}dp_\nu+\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial t}dt, \quad (7)$$

где

$$\widetilde{U}(f_\mu,p_\nu,t)=-L(q^\mu,v^\nu,t)+f_\mu q^\mu+p_\nu v^\nu.$$

Таким образом, из равенств:

$$dL=\frac{\partial L}{\partial q^\mu}dq^\mu+\frac{\partial L}{\partial v^\nu}dv^\nu+\frac{\partial L}{\partial t}dt=f_\mu dq^\mu+p_\nu dv^\nu+\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$dH=\frac{\partial H}{\partial q^\mu}dq^\mu+\frac{\partial H}{\partial p_\nu}dp_\nu+\frac{\partial L}{\partial t}dt=-f_\mu dq^\mu+v_\nu dp^\nu+\frac{\partial H}{\partial t}dt$$

$$d\widetilde{H}=\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial f_\mu}df_\mu+\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial v^\nu}dv^\nu+\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial t}dt=q^\mu df_\mu-p_\nu dv^\nu-\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$d\widetilde{U}=\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial f_\mu}df_\mu+\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial p_\mu}dp_\mu+\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial t}dt=q^\mu df_\mu+v^\nu dp_\nu-\frac{\partial L}{\partial t}dt$$

следует существование следующей системы равенств:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial q^\mu}(q^\mu,v^\nu,t)=f_\mu && \frac{\partial L}{\partial v^\nu}(q^\mu,v^\nu,t)=p_\nu\\
&\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu,p_\nu,t)=-f_\mu && \frac{\partial H}{\partial p_\nu}(q^\mu,p_\nu,t)=v^\nu\\
&\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial f_\mu}(f_\mu,v^\nu,t)=q^\mu && \frac{\partial\widetilde{H}}{\partial v^\nu}(f_\mu,v^\nu,t)=-p_\nu\\
&\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial f_\mu}(f_\mu,p_\nu,t)=q^\mu && \frac{\partial\widetilde{U}}{\partial p_\nu}(f_\mu,p_\nu,t)=v^\nu
\end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t}$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

где

$$\begin{aligned} L(q^\mu, v^\nu, t) &= L(q^\mu, v^\nu, t) \\ H(q^\mu, v_\nu, t) &= -L(q^\mu, v^\nu, t) + p_\nu v^\nu \\ \widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t) &= -L(q^\mu, v^\nu, t) + f_\mu q^\mu \\ \widetilde{U}(f_\mu, p_\mu, t) &= -L(q^\mu, v^\nu, t) f_\mu q^\mu + p_\nu v^\nu \end{aligned} \tag{9}$$

В итоге мы получили полную систему уравнений (8) и систему уравнений (9), обладающих определённой асимметрией.

Для устранения этой асимметрии введём новую функцию — **потенциальную энергию Лагранжа**[81] $U(q^\mu, v^\nu, t)$, равную функции Лагранжа $L(q^\mu, v^\nu, t)$, взятой с обратным знаком:

$$U(q^\mu, v^\nu, t) = -L(q^\mu, v^\nu, t).$$

После замены функции Лагранжа $L(q^\mu, v^\nu, t)$ на потенциальную энергию Лагранжа $U(q^\mu, v^\nu, t)$ полная система уравнений (8) и система равенств (9) примут следующий симметричный вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial q^\mu}(q^\mu, v^\nu, t) = -f_\mu \qquad \frac{\partial U}{\partial v^\nu}(q^\mu, v^\nu, t) = -p_\nu \\ &\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu, p_\nu, t) = -f_\mu \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\nu}(q^\mu, p_\nu, t) = v^\nu \\ &\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial f_\mu}(f_\mu, v^\nu, t) = q^\mu \qquad \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial v^\nu}(f_\mu, v^\nu, t) = -p_\nu \\ &\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial f_\mu}(f_\mu, p_\nu, t) = q^\mu \qquad \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\nu}(f_\mu, p_\nu, t) = v^\nu \end{aligned} \tag{10}$$

[81] Как будет показано ниже, потенциальная энергия Лагранжа $U(q^\mu, v^\nu, t)$ имеет более глубокий физический смысл, нежели функция Лагранжа $L(q^\mu, v^\nu, t)$.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}$$
$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t},$$

где

$U(q^m, v^\nu, t)$ — потенциальная энергия Лагранжа (механический аналог внутренней энергии $U(S,V)$),

$H(q^\mu, p_\nu, t)$ — функция Гамильтона (механический аналог энтальпии $H(S,P)$),

$\widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t)$ — дуально сопряжённая функция Гамильтона[82] (механический аналог свободной энергии $F(T,V)$),

$\widetilde{U}(f_\mu, p_\mu, t)$ — дуально сопряжённая потенциальная энергия Лагранжа (механический аналог энергии Гиббса $\Phi(T,P)$).

Но откуда берётся принцип наименьшего действия Гамильтона и вытекающее из него уравнение Лагранжа (1)?

Получим полную систему дуальносопряжёных уравнений (10) независимым путём из Теории физических структур.

При рассмотрении Примера 16, исходя из чрезвычайно общего **принципа сакральной симметрии**, лежащего в основании Теории физических структур, и опираясь на teorema egregium Михайличенко, мы смогли убедиться в существовании двух пар дуальносопряжённых сакральных потенциалов:

$$\big(A^{00}(x^\mu, \xi^\nu),\ \ A^{11}(x_\mu, \xi_\nu)\big) \quad \text{и} \quad \big(A^{01}(x^\mu, \xi_\nu),\ \ A^{10}(x_\mu, \xi^\nu)\big),$$

зависящих от двух групп соответствующих переменных:

$$\begin{array}{ll} x^1, \ldots, x^n & \xi^1, \ldots, \xi^n \\ x_1, \ldots, x_n & \xi_1, \ldots, \xi_n \end{array}$$

связанных между собой тремя соотношениями:

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) + x_\mu x^\mu + \xi_\nu \xi^\nu - A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) = 0$$

$$A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) + x_\mu x^\mu - \xi_\nu \xi^\nu - A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) = 0$$
$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) - A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) - A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) + A^{11}(x_\mu, \xi_\nu) = 0,$$

[82] Сакральные потенциалы $\widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t)$ и $\widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t)$ неизвестны в традиционной аналитической механике. Они неизбежно возникают в теории физических структур как проявление сакральной симметрии.

и полученных $4m + 4n$ дуальносопряжённых уравнений, связывающих между собой $2m + 2n$ переменных $x^\mu,\ x_\mu,\ \xi^\nu,\ \xi_\nu$,

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi^\nu) = -x_\mu \qquad \frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu}(x^\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu$$

$$\frac{\partial A^{01}}{\partial x^\mu}(x^\mu, \xi_\nu) = -x_\mu \qquad \frac{\partial A^{01}}{\partial \xi_\nu}(x^\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu$$

$$\frac{\partial A^{10}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi^\nu) = x^\mu \qquad \frac{\partial A^{10}}{\partial \xi^\nu}(x_\mu, \xi^\nu) = -\xi_\nu$$

$$\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, \xi_\nu) = x^\mu \qquad \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu}(x_\mu, \xi_\nu) = \xi^\nu$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, m \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Механика Лагранжа и механика Гамильтона возникают как частный случай общей теории сакральных потенциалов, если положить

$$m = n \ (\mu = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

и дать анонимным физическим величинам

$x^\mu,\ x_\mu,\ \xi^\nu,\ \xi_\nu$ и сакральным потенциалам $(A^{00},\ A^{11})$ и $(A^{01},\ A^{01})$ следующую физическую интерпретацию:

$$x^1, \ldots, x^n = q^1, \ldots, q^n; \qquad \xi^1, \ldots, \xi^n = v^1, \ldots, v^n,$$
$$x_1, \ldots, x_n = f_1, \ldots, f_n; \qquad \xi_1, \ldots, \xi_n = p_1, \ldots, p_n,$$

где

$q^1, \ldots, q^n$ — обобщённые координаты,

$f_1, \ldots, f_n$ — обобщённые силы,

$v^1, \ldots, v^n$ — обобщённые скорости,

$p_1, \ldots, p_n$ — обобщённые импульсы

$$A^{00}(x^\mu, \xi^\nu) = U(q^\mu, v^\nu, t)$$
$$A^{01}(x^\mu, \xi_\nu) = H(q^\mu, p_\nu, t)$$
$$A^{10}(x_\mu, \xi^\nu) = \widetilde{H}(f_\mu, x^\nu, t)$$
$$A^{11}(x^\mu, \xi^\nu) = \widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t)$$

Таким образом, сакральные потенциалы $U(q^\mu, v^\nu, t)$, $\widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t)$, $H(q^\mu, p_\nu, t)$,

$\widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t)$ связаны между собой тремя соотношениями,

$$U(q^\mu, v^\nu, t) + f_\mu q^\mu + p_\nu v^\nu - \widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t) = 0$$

$$H(q^\mu, p_\nu, t) + f_\mu q^\mu - p_\nu v^\nu - \widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t) = 0$$

$$U(q^\mu, v^\nu, t) - H(q^\mu, p_\nu, t) - \widetilde{H}(f_\mu, v^\nu, t) + \widetilde{U}(f_\mu, p_\nu, t) = 0,$$

порождают полную систему $4n+4n$ дуальносопряжённых уравнений, связывающих между собой $2n+2n$ физических величин $q^1, \ldots, q^n$; $f_1, \ldots, f_n$; $v^1, \ldots, v^n$; $p_1, \ldots, p_n$;

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial q^\mu}(q^\mu, v^\nu, t) = -f_\mu \qquad \frac{\partial U}{\partial v^\nu}(q^\mu, v^\nu, t) = -p_\nu \\
&\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu, p_\nu, t) = -f_\mu \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\nu}(q^\mu, p_\nu, t) = v^\nu \\
&\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial f_\mu}(f_\mu, v^\nu, t) = q^\mu \qquad \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial v^\nu}(f_\mu, v^\nu, t) = -p_\nu \\
&\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial f_\mu}(f_\mu, p_\mu, t) = q^\mu \qquad \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\nu}(f_\mu, p_\mu, t) = v^\nu
\end{aligned} \tag{10}$$

В отличие от термодинамики, не содержащей в себе времени, механика существенным образом включает в себя понятие времени t. Это находит своё выражение в $2n$ дополнительных связей:

$$v^\mu = \dot{q}^\mu$$

и

$$f_\mu = \dot{p}_\mu.$$

В результате система $8n$ алгебраических уравнений (10) превращается в систему $8n$ дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial q^\mu}(q^\mu, \dot{q}^\nu, t) = -\dot{p}_\mu \qquad \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\mu}(q^\mu, \dot{q}^\nu, t) = -p_\nu \\
&\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu, p_\nu, t) = -\dot{p}_\mu \qquad \frac{\partial H}{\partial p_\nu}(q^\mu, p_\nu, t) = -\dot{q}^\nu \\
&\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \dot{p}_\mu}(\dot{p}_\mu, \dot{q}^\nu, t) = q^\mu \qquad \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \dot{q}^n u}(\dot{p}_\mu, \dot{q}^\nu, t) = -p_\nu \\
&\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \dot{p}_\mu}(\dot{p}_\mu, p_\nu, t) = q^\mu \qquad \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial p_\nu}(\dot{p}_\mu, p_\nu, t) = \dot{q}^\mu.
\end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку все системы $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка, порождаемые каждым сакральным потенциалом U, H, $\widetilde{H}$, $\widetilde{U}$, эквивалентны, то можно ограничиться системой $2n$ уравнений, порождаемой каким-либо одним сакральным потенциалом.

Если в качестве исходного потенциала взять потенциальную энергию Лагранжа $U(q^\mu, \dot{q}^\nu, t)$, то из уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial q^\mu}(q^\mu, \dot{q}^\nu, t) = -\dot{p}_\mu \qquad \frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\mu}(q^\mu, \dot{q}^\nu, t) = -p_\nu$$

следует система n дифференциальных уравнений второго порядка – уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^\mu}\right) - \frac{\partial U}{\partial q^\mu} = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 0.$$

Но если движение механической системы описывается уравнением Лагранжа, то легко показать, что в этом случае получается как следствие принцип наименьшего действия Гамильтона.

Если в качестве исходной взять функцию Гамильтона $H(q^\mu, p_\nu, t)$, то получим систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка — систему канонических уравнений Гамильтона:

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q^\mu}(q^\mu, p_\mu, t)$$
$$\dot{q}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial p_\mu}(q^\mu, p_\mu, t)$$

