Пример 2. Закон Ома для участка цепи.

Из некоторых экспериментов, о которых я собираюсь доложить Королевскому обществу, вытекает, что медная проволока проводит примерно в четыреста миллионов раз лучше, чем дождевая или дистилированная вода (1775) [1].

— Кавендиш

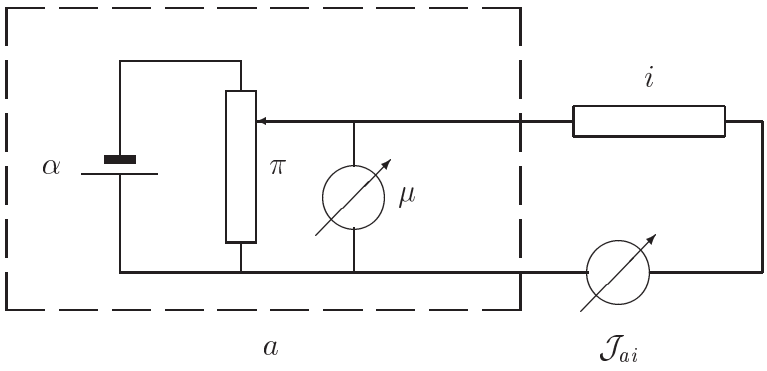
Задача состоит в том, чтобы перейти с хорошо известного языка электродинамики постоянных токов на универсальный язык Теории физических структур.

Рассмотрим два множества:

$\mathfrak{A} = \{a, b, \ldots\}$ – множество источников постоянного напряжения и

$\mathfrak{B} = \{i, k, \ldots\}$ – множество проводников.

Под источником постоянного напряжения a мы будем понимать источник постоянного тока α, снабжённый потенциометром π (См. схему).



Схема, поясняющая устройство источника постоянного напряжения.

При подключении источника напряжения a к проводнику i напряжение на выходе источника a падает, но с помощью потенциометра π доводится до некоторого, раз и навсегда заданного для данного источника, значения $\pi(a)$.

Утверждается, что если взять два произвольных проводника i и k и два произвольных источника напряжения a и b и измерить четыре значения сил токов $\mathcal{J}_{ai}$, $\mathcal{J}_{ak}$, $\mathcal{J}_{bi}$, $\mathcal{J}_{bk}$, то соответствующие значения сил токов

$$\mathcal{J} = \frac{U}{R}$$

или значения величин, им обратных,

$$I = \mathcal{J}^{-1} = \frac{R}{U},$$

оказываются связанными между собой следующими соотношениями:

$$\overset{2}{K}{}^{oo}_{ab;ik}(\mathcal{J}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathcal{J}_{ai} & \mathcal{J}_{ak} & 0 \\ 0 & \mathcal{J}_{bi} & \mathcal{J}_{bk} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathcal{J}_{ai} & \mathcal{J}_{ak} \\ \mathcal{J}_{bi} & \mathcal{J}_{bk} \end{vmatrix} \equiv 0$$

и соответственно:

$$\overset{2}{K}{}^{oo}_{ab;ik}(I) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_{ai} & I_{ak} & 0 \\ 0 & I_{bi} & I_{bk} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{ai} & I_{ak} \\ I_{bi} & I_{bk} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Мы выбираем в качестве репрезентатора, характеризующего отношения между множеством источников напряжения $\underline{\mathfrak{A}}$ и множеством проводников $\overline{\mathfrak{B}}$, не силу тока $\mathcal{J}_{ai}$, а величину ей обратную – $I_{ai} = \frac{1}{\mathcal{J}_{ai}}$, чтобы сохранить эти обозначения при сакрально-инвариантной формулировке закона Ома для всей цепи, где этот выбор определяется однозначно.

Итак,

1. В случае закона Ома для участка цепи *репрезентатором* является

$$I_{ai} = \frac{1}{\mathcal{J}_{ai}}$$

– величина, обратная силе тока $\mathcal{J}_{ai}$, протекающего через проводник i при подключении к нему источника напряжения a.

2. Каждый источник постоянного напряжения – левый субэйдос $\overset{\leftarrow}{a}$ – характеризуется одномерным ковариантным вектором-строкой:

$$\overset{\leftarrow}{a} \longleftrightarrow \left(0 \ ; \ \xi_1(\overset{\leftarrow}{a}) \ ; \ 0 \right) = \left(0 \ ; \ \frac{1}{U(\overset{\leftarrow}{a})} \ ; \ 0 \right) .$$

Каждый проводник – правый субэйдос $\vec{i}$ – характеризуется одномерным контравариантным вектором-столбцом:

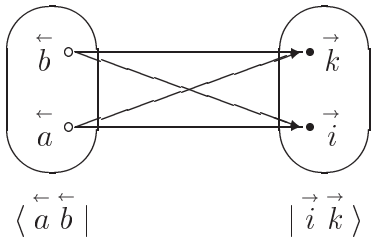
$$\vec{i} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot, \\ x^1(\vec{i}) \\ \cdot, \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot, \\ R(\vec{i}) \\ \cdot, \\ 0 \end{pmatrix} .$$

3. Таким образом, обратное значение тока $I_{\underset{a}{\leftarrow}\underset{i}{\rightarrow}}$ представляет собой скалярное произведение двух одномерных векторов, один из которых (ковариантный) характеризует источник напряжения $\overset{\leftarrow}{a}$, а другой (контравариантный) – проводник $\vec{i}$:

$$I_{\substack{\leftarrow\\ a}\ \substack{\rightarrow\\ i}} = \Big(0;\ \xi_1(\overleftarrow{a});\ 0\Big)\cdot\begin{pmatrix} 0\\ \cdot,\\ x^1(\overrightarrow{i})\\ \cdot,\\ 0\end{pmatrix} = \Big(0;\ \frac{1}{U(\overleftarrow{a})};\ 0\Big)\cdot\begin{pmatrix} 0\\ \cdot,\\ R(\overrightarrow{i})\\ \cdot,\\ 0\end{pmatrix} =$$

$$= \xi_1(\overleftarrow{a})\, x^1(\overrightarrow{i}) = \frac{1}{U(\overleftarrow{a})}\ R(\overrightarrow{i}).$$

4. Закон Ома для участка цепи как **сакральное отношение** между двухвекторным кортом источников напряжения $\langle\ \overleftarrow{a}\ \overleftarrow{b}\ |$ и двухвекторным кортом проводников $|\ \overrightarrow{i}\ \overrightarrow{k}\ \rangle$ описывается следующей сакральной диаграммой:



5. Закон Ома для участка цепи в сакрально-инвариантной форме формулируется следующим образом:

для любых двух источников напряжения $\overleftarrow{a},\ \overleftarrow{b} \in \underline{\mathfrak{A}}$ и любых двух проводников $\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k} \in \overline{\mathfrak{B}}$ имеет место следующее сакральное тождество:

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\substack{\leftarrow\ \leftarrow\\ a\ b\,;\,\rightarrow\ \rightarrow\\ i\ k}}(\overset{1}{I}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & I_{\substack{\leftarrow\\ a}\ \substack{\rightarrow\\ i}} & I_{\substack{\leftarrow\\ a}\ \substack{\rightarrow\\ k}} & 0\\ 0 & I_{\substack{\leftarrow\\ b}\ \substack{\rightarrow\\ i}} & I_{\substack{\leftarrow\\ b}\ \substack{\rightarrow\\ k}} & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix} \equiv 0$$

6. Разложение фундаментальной матрицы на матричные множители:

$$\overset{2}{\mathbb{K}}{}^{00}_{\substack{\leftarrow\ \leftarrow\\ a\ b\,;\,\rightarrow\ \rightarrow\\ i\ k}}(\overset{1}{a}) = \mathbb{X}(\overleftarrow{a}, \overleftarrow{b})_{1;\,0}\cdot \mathbb{X}^{1;\,0}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$$

7. Координатная матрица ковариантного двухвекторного корта источников напряжения $\langle\ \overleftarrow{a}\ \overleftarrow{b}\ |$

$$\mathbb{X}(\overleftarrow{a}, \overleftarrow{b})_{1;\,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \xi_1(\overleftarrow{a}) & 0 & 0\\ 0 & \xi_1(\overleftarrow{b}) & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{U(\overleftarrow{a})} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{U(\overleftarrow{b})} & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

8. Ковариантный объём одновекторного корта источника напряжения $\langle \overleftarrow{a} |$

$$V(\overleftarrow{a})_1 = \left| \ \xi_1(\overleftarrow{a}) \ \right| = \left| \ \frac{1}{U(\overleftarrow{a})} \ \right|$$

9. Ковариантный объём двухвекторного корта источников напряжения $\langle \overleftarrow{a} \ \overleftarrow{b} \ |$

$$V(\overleftarrow{a}, \overleftarrow{b})_{1;\,0} = \left| \begin{array}{cc} \xi_1(\overleftarrow{a}) & 0 \\ \xi_1(\overleftarrow{b}) & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{U(\overleftarrow{a})} & 0 \\ \frac{1}{U(\overleftarrow{b})} & 0 \end{array} \right| \equiv 0$$

10. Координатная матрица контравариантного двухвекторного корта проводников $| \ \overrightarrow{i} \ \overrightarrow{k} \ \rangle$

$$\mathbb{X}^{1;\,0}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^1(\overrightarrow{i}) & x^1(\overrightarrow{k}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R(\overrightarrow{i}) & R(\overrightarrow{k}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

11. Контравариантный объём одновекторного корта проводника $| \ \overrightarrow{i} \ \rangle$

$$V^1(\overrightarrow{i}) = \left| \ x^1(\overrightarrow{i}) \ \right| = \left| \ R(\overrightarrow{i}) \ \right|$$

12. Контравариантный объём двухвекторного корта проводников $| \ \overrightarrow{i} \ \overrightarrow{k} \ \rangle$

$$V^{1;\,0}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) = \left| \begin{array}{cc} x^1(\overrightarrow{i}) & x^1(\overrightarrow{k}) \\ 0 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} R(\overrightarrow{i}) & R(\overrightarrow{k}) \\ 0 & 0 \end{array} \right| \equiv 0$$

13. Разделение нечисловых переменных

$$\overset{1}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{a}\,;\,\overrightarrow{i}}(\overset{1}{I}) = V(\overleftarrow{a})_1 \ V^1(\overrightarrow{i})$$

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\overleftarrow{a}\ \overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{i}\ \overrightarrow{k}}(\overset{1}{I}) = V(\overleftarrow{a}, \overleftarrow{b})_{1;\,0} \ V^{1;\,0}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) \equiv 0$$

Итак, на множестве проводников $\overline{\mathfrak{B}}$ и множестве источников напряжения $\underline{\mathfrak{A}}$ обнаруживается физическая структура рода $\overset{2}{K}{}^{oo}_{\overleftarrow{a}\ \overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{i}\ \overrightarrow{k}}(\overset{1}{I}) \equiv 0$ (мультипликативная физическая структура ранга (2,2)), если в качестве репрезентатора $I_{\overleftarrow{a}\ \overrightarrow{i}}$ взять измеряемую на опыте обратную величину силы тока $I_{\overleftarrow{a}\ \overrightarrow{i}}$, проходящего через проводник i при подключении к нему источника напряжения a.

Можно сказать, что закон Ома, записанный в хорошо известной традиционной форме

$$\mathcal{J} = \frac{U}{R},$$

представляет собой внешнюю сторону электродинамики постоянных токов (её "явление"). Что же касается её глубинного содержания (её "сущности"), то оно заключено в её структуре – в существовании репрезентатора

$$\overset{1}{I}{}_{\overleftarrow{a}\ \overrightarrow{i}} = \xi_{\overleftarrow{a}} \ x_{\overrightarrow{i}} = \frac{1}{U_{\overleftarrow{a}}} R_{\overrightarrow{i}},$$

верификатора

$$\overset{2}{K}{}^{oo}_{\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,;\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}}(\overset{1}{I}) = V(\overleftarrow{a},\overleftarrow{b})_{1;0}\cdot V^{1;0}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}) = 0$$

и двух объёмов $V(\overleftarrow{a},\overleftarrow{b})_{1;0}$ и $V^{1;0}(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k})$ двухвекторых кортов $\langle\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,|$ и $|\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\rangle$, тождественно обращающихся в ноль.

Подведём итоги:

Из всего сказанного следует, что хорошо известный ещё из средней школы **закон Ома для участка цепи – это фундаментальный закон сакральной одномерной векторной геометрии на двух множествах существенно различной природы с репрезентатором**

$$I_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{i}} = \xi_1(\overleftarrow{a})\,x^1(\overrightarrow{i}) = \frac{1}{U(\overleftarrow{a})}\,R(\overrightarrow{i}),$$

допускающей следующую физическую интерпретацию:

$\underline{\mathfrak{A}}$ – множество источников постоянного напряжения;

$\overline{\mathfrak{B}}$ – множество проводников;

1. Источник постоянного напряжения $\overleftarrow{a}$ представляет собой левый субэйдос из множества $\underline{\mathfrak{A}}$

Проводник $\overrightarrow{i}$ представляет собой правый субэйдос из множества проводников $\overline{\mathfrak{B}}$ [76].

2. Источник постоянного напряжения – левый субэйдос – является одномерным ковариантным субвектором $\overleftarrow{a}$. Его единственная ковариантная координата имеет простой физический смысл величины, обратной напряжению:

$$\xi_1(\overleftarrow{a}) = 1/U(\overleftarrow{a}).$$

Проводник – правый субэйдос – является одномерным контравариантным субвектором $\overrightarrow{i}$. Его единственная контравариантная координата имеет физический смысл сопротивления:

$$x^1(\overrightarrow{i}) = R(\overrightarrow{i}).$$

3. Репрезентатором, характеризуюшим отношения между источником постоянного напряжения $\overleftarrow{a}$ и проводником $\overrightarrow{i}$, является величина, обратная силе тока $I_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{i}} = 1/\mathcal{J}_{\overleftarrow{a}\,\overrightarrow{i}}$, протекающего через проводник $\overrightarrow{i}$ при подключении к нему источника постоянного напряжения $\overleftarrow{a}$.

4. Фундаментальный закон электродинамики постоянных токов – закон Ома для участка цепи – определяется отношением между двумя кортами – левым 2-векторным кортом $\langle\overleftarrow{a}\,\overleftarrow{b}\,|$ и правым 2-векторным кортом $|\,\overrightarrow{i}\,\overrightarrow{k}\rangle$.

[76] Ситуация симметрична: можно было бы взять в качестве источника постоянного напряжения $\overrightarrow{\alpha}$ правый субъэйдос из множества $\underline{\mathfrak{A}}$, но тогда прищлось бы взять в качестве проводника $\overleftarrow{i}$ левый субъэйдос из множества $\overline{\mathfrak{B}}$.

5. Скалярное произведение этих кортов $\langle \overset{\leftarrow}{a}\ \overset{\leftarrow}{b} |$ и $| \vec{i}\ \vec{k} \rangle$ равно верификатору, тождественно равному нулю –

$$\langle \overset{\leftarrow}{a}\ \overset{\leftarrow}{b} | \vec{i}\ \vec{k} \rangle = \overset{2}{K}{}^{00}_{\substack{\leftarrow\leftarrow\\ a\ b}}{}^{\rightarrow\rightarrow}_{i\ k;}(\overset{1}{a}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & I^{\leftarrow\rightarrow}_{a\ i} & I^{\leftarrow\rightarrow}_{a\ k} & 0 \\ 0 & I^{\leftarrow\rightarrow}_{b\ i} & I^{\leftarrow\rightarrow}_{b\ k} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 - -$$

и определяющему сакрально-инвариантную форму закона Ома для участка цепи.

6. Поскольку верификатор $\overset{2}{K}{}^{00}_{\substack{\leftarrow\leftarrow\\ a\ b}}{}^{\rightarrow\rightarrow}_{i\ k;}(\overset{1}{a})$ расщепляется на произведение двух объёмов:

$$\overset{2}{K}{}^{00}_{\substack{\leftarrow\leftarrow\\ a\ b}}{}^{\rightarrow\rightarrow}_{i\ k;}(\overset{1}{a}) = V(\overset{\leftarrow}{a}, \overset{\leftarrow}{b})_{1;\,0}\ V^{1;\,0}(\vec{i}, \vec{k}) \equiv 0,$$

то в конечном итоге фундаментальный закон, лежащий в основании электродинамики постоянных токов – закон Ома для участка цепи – сводится к равенству нулю ковариантного объёма 2-векторного корта источников постоянного напряжения

$$V(\overset{\leftarrow}{a}, \overset{\leftarrow}{b})_{1;\,0} \equiv 0$$

и контравариантного объёма 2-векторного корта проводников

$$V^{1;\,0}(\vec{i}, \vec{k}) \equiv 0.$$

Заметки на полях

Заметим, что из равенства

$$\overset{1}{K}{}^{00}_{\substack{\leftarrow\\ a}}{}^{\rightarrow}_{i;}(\overset{1}{I}) = V(\overset{\leftarrow}{a})_1\ V^1(\vec{i})$$

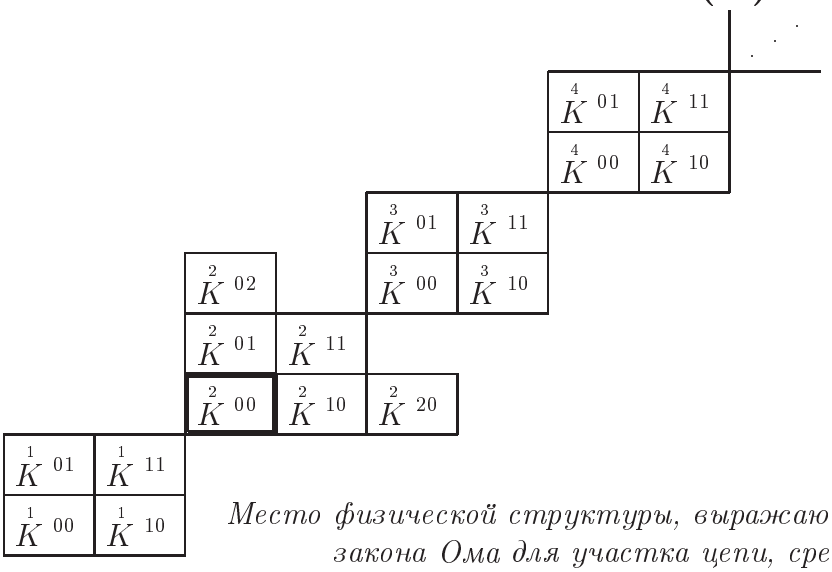
вытекает следующее важное сакральное тождество:

$$\overset{1}{K}{}^{00}_{\substack{\leftarrow\\ a}}{}^{\rightarrow}_{i;}(\overset{1}{I}) = \overset{1}{K}{}^{00}_{\substack{\leftarrow\\ a}}{}^{\rightarrow}_{k;}(\overset{1}{I}) \cdot \overset{1}{K}{}^{00}_{\substack{\leftarrow\\ b}}{}^{\rightarrow}_{k;}(\overset{1}{I})^{-1} \cdot \overset{1}{K}{}^{00}_{\substack{\leftarrow\\ b}}{}^{\rightarrow}_{i;}(\overset{1}{I}).$$

Сакральная формулировка закона Ома для участка цепи

$$\overset{2}{\boldsymbol{K}}{}^{00}_{\substack{\leftarrow\leftarrow\ \rightarrow\rightarrow\\ a\ b\,;\,i\ k}}(\overset{1}{\boldsymbol{I}}) \equiv 0$$

$$\overset{1}{\boldsymbol{I}}{}_{\substack{\leftarrow\rightarrow\\ \alpha\ i}} = \boldsymbol{\xi}(\overset{\leftarrow}{\alpha})_1\, \boldsymbol{x}^1(\vec{i}) = \frac{\boldsymbol{R}(i)}{\boldsymbol{U}(\alpha)}$$



Место физической структуры, выражающей сущность закона Ома для участка цепи, среди всех возможных физических структур.

Итак, сущность электродинамики постоянных токов для участка цепи состоит в существовании сакральных отношений между множеством источников постоянного напряжения $\underline{\mathfrak{A}}$ и множеством проводников $\overline{\mathfrak{B}}$. При этом каждый источник постоянного напряжения $\overset{\leftarrow}{a}$ является **вектором** сакрального одномерного векторного пространства, а каждый проводник $\vec{i}$ является **вектором** другого сакрального одномерного векторного пространства.

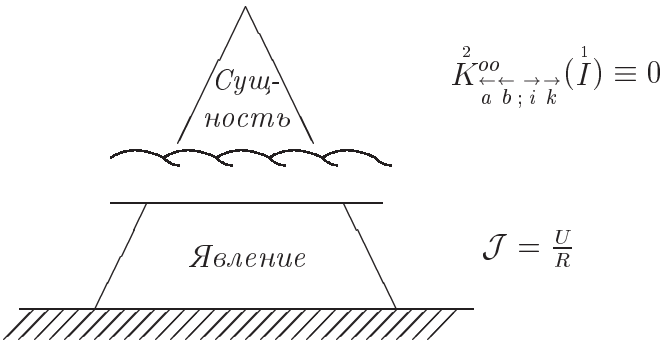
Другими словами, электродинамика постоянных токов для участка цепи является сакральной вектор-векторной геометрией на двух множествах различной природы, дополненной соответствующей физической интерпретацией.

Сущность закона Ома для участка цепи состоит в равенстве нулю скалярного произведения двухвекторного корта источников постоянного напряжения

$\langle \overset{\leftarrow}{a}\, \overset{\leftarrow}{b} |$ на двухвекторный корт проводников $| \vec{i}\, \vec{k} \rangle$, объёмы каждого из которых тождественно равны нулю.

Другими словами, **сущность закона Ома для участка цепи состоит в наличии таких отношений между 2-векторным кортом источников постоянного напряжения $\langle \overset{\leftarrow}{a}\, \overset{\leftarrow}{b} |$ и 2-векторным кортом проводников $| \vec{i}\, \vec{k} \rangle$, при которых имеет место физическая структура рода:**

$$\overset{2}{K}{}^{\overset{\leftarrow}{a}\,\overset{\leftarrow}{b}\,;\,\vec{i}\,\vec{k}}_{00}(\overset{1}{I}) = V(\overset{\leftarrow}{a}, \overset{\leftarrow}{b})_{1;\,0}\; V^{1;\,0}(\vec{i}, \vec{k}) \equiv 0,$$



Явление и сущность закона Ома для участка цепи.

Литература к Примеру 2

[1]. *H. Cavendish* The Electrical Researches of H. Cavendish, ed. by C. Maxwell, London, 1879.