Пример 11. Малые колебания

Уверенность в том, что явление природы с необходимостью следует закону причинности, в конечном счете основывается лишь на скромных успехах, достигнутых в результате попыток человеческого разума установить взаимосвязь между явлениями природы.

— Альберт Эйнштейн.

Из приведенных выше примеров может сложиться впечатление, что связь между расстояниями, пройденными различными телами за одни и те же промежутки времени, представляет собой достаточно частное явление и имеет место только в простых "школьных" примерах. Чтобы рассеять это впечатление, рассмотрим еще два примера:

1. Малые колебания математического маятника

Рассмотрим множество одинаковых маятников $\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\}$, приведенных в движение с произвольными начальными отклонениями и скоростями в какой-то общий момент времени t_i, где $i \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} = \{i, k, \ldots\}$ – множество произвольных событий.

Закон движения маятника хорошо известен:

$$\theta_\alpha(i) = a_\alpha \sin(\omega t_i + \varphi_\alpha) = a_\alpha \cos\varphi_\alpha \sin\omega t_i + a_\alpha \sin\varphi_\alpha \cos\omega t_i.$$

И в этом случае можно воспользоваться тем же самым приёмом, с помощью которого мы доказывали существование нужных соотношений в предыдущих примерах. А именно, легко показать, что определитель третьего порядка, составленный из измеряемых на опыте углов отклонений трех произвольных маятников в три произвольные, но общие для всех маятников, моменты времени, представляет собой произведение двух определителей, каждый из которых тождественно равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \theta_\alpha(i) & \theta_\alpha(k) & \theta_\alpha(m) \\ \theta_\beta(i) & \theta_\beta(k) & \theta_\beta(m) \\ \theta_\gamma(i) & \theta_\gamma(k) & \theta_\gamma(m) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_\alpha\cos\varphi_\alpha & a_\alpha\sin\varphi_\alpha & 0 \\ a_\beta\cos\varphi_\beta & a_\beta\sin\varphi_\beta & 0 \\ a_\gamma\cos\varphi_\gamma & a_\gamma\sin\varphi_\gamma & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sin\omega t_i & \sin\omega t_k & \sin\omega t_m \\ \cos\omega t_i & \cos\omega t_k & \cos\omega t_m \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0$$

Итак, мы можем утверждать, что между малыми углами отклонения одинаковых маятников, приведенных в движение в один общий момент времени с произвольными начальными отклонениями и скоростями, существует следующая связь:

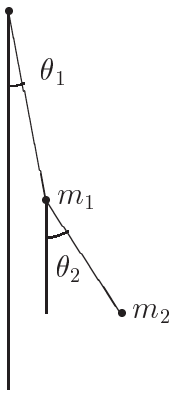
$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{N}, \qquad \forall i, k, m \in \mathfrak{M}$$

$$\overset{3}{\boldsymbol{K}}{}^{00}_{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma;ikm}}(\overset{2}{\boldsymbol{\theta}}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\theta_\alpha(i)} & \boldsymbol{\theta_\alpha(k)} & \boldsymbol{\theta_\alpha(m)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\theta_\beta(i)} & \boldsymbol{\theta_\beta(k)} & \boldsymbol{\theta_\beta(m)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\theta_\gamma(i)} & \boldsymbol{\theta_\gamma(k)} & \boldsymbol{\theta_\gamma(m)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} \equiv \boldsymbol{0}$$

2. Малые колебания двойного маятника

В качестве следующего примера рассмотрим колебательную систему α, обладающую двумя степенями свободы, например, двойной маятник [1].



Как известно, движение каждой точки этой системы представляет собой определенную суперпозицию двух нормальных колебаний с собственными частотами ω_1 и ω_2, т. е. малое отклонение какой-либо точки этой системы (от положения равновесия) может быть записано в виде:

$$\theta^1_\alpha(i) = a^1_\alpha \sin(\omega_1 t_i + \varphi^1_\alpha) + b^1_\alpha \sin(\omega_2 t_i + \psi^1_\alpha)$$

$$\theta^2_\alpha(i) = a^2_\alpha \sin(\omega_1 t_i + \varphi^2_\alpha) + b^2_\alpha \sin(\omega_2 t_i + \psi^2_\alpha)$$

или

$$\theta^\mu_\alpha(i) = a^\mu_\alpha \cos\varphi^\mu_\alpha \sin\omega_1 t_i + a^\mu_\alpha \sin\varphi^\mu_\alpha \cos\omega_1 t_i + b^\mu_\alpha \cos\psi^\mu_\alpha \sin\omega_2 t_i + b^\mu_\alpha \sin\psi^\mu_\alpha \cos\omega_2 t_i,$$

где $\mu = 1, 2.$

Тогда можно снова воспользоваться тождеством,

$$\begin{vmatrix} \theta_\alpha(i) & \theta_\alpha(k) & \theta_\alpha(m) & \theta_\alpha(n) & \theta_\alpha(p) \\ \theta_\beta(i) & \theta_\beta(k) & \theta_\beta(m) & \theta_\beta(n) & \theta_\beta(p) \\ \theta_\gamma(i) & \theta_\gamma(k) & \theta_\gamma(m) & \theta_\gamma(n) & \theta_\gamma(p) \\ \theta_\delta(i) & \theta_\delta(k) & \theta_\delta(m) & \theta_\delta(n) & \theta_\delta(p) \\ \theta_\varepsilon(i) & \theta_\varepsilon(k) & \theta_\varepsilon(m) & \theta_\varepsilon(n) & \theta_\varepsilon(p) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_\alpha \cos\varphi_\alpha & a_\alpha \sin\varphi_\alpha & b_\alpha \cos\psi_\alpha & b_\alpha \sin\psi_\alpha & 0 \\ a_\beta \cos\varphi_\beta & a_\beta \sin\varphi_\beta & b_\beta \cos\psi_\beta & b_\beta \sin\psi_\beta & 0 \\ a_\gamma \cos\varphi_\gamma & a_\gamma \sin\varphi_\gamma & b_\gamma \cos\psi_\gamma & b_\gamma \sin\psi_\gamma & 0 \\ a_\delta \cos\varphi_\delta & a_\delta \sin\varphi_\delta & b_\delta \cos\psi_\delta & b_\delta \sin\psi_\delta & 0 \\ a_\varepsilon \cos\varphi_\varepsilon & a_\varepsilon \sin\varphi_\varepsilon & b_\varepsilon \cos\psi_\varepsilon & b_\varepsilon \sin\psi_\varepsilon & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \sin\omega_1 t_i & \sin\omega_1 t_k & \sin\omega_1 t_m & \sin\omega_1 t_n & \sin\omega_1 t_p \\ \cos\omega_1 t_i & \cos\omega_1 t_k & \cos\omega_1 t_m & \cos\omega_1 t_n & \cos\omega_1 t_p \\ \sin\omega_2 t_i & \sin\omega_2 t_k & \sin\omega_2 t_m & \sin\omega_2 t_n & \sin\omega_2 t_p \\ \cos\omega_2 t_i & \cos\omega_2 t_k & \cos\omega_2 t_m & \cos\omega_2 t_n & \cos\omega_2 t_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

и записать соотношение, связывающее между собой отклонения от положения равновесия какой-либо одной точки у различных систем $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, взятых в различные моменты времени i, k, m, n, p в виде:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathfrak{N}, \qquad \forall i, k, m, n, p \in \mathfrak{M}, \qquad \mu = 1, 2$$

$$\overset{5}{\boldsymbol{K}}{}^{00}_{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon;ikmnp}}(\overset{4}{\boldsymbol{\theta}}{}^{\boldsymbol{\mu}}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\theta^\mu_\alpha(i)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\alpha(k)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\alpha(m)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\alpha(n)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\alpha(p)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\theta^\mu_\beta(i)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\beta(k)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\beta(m)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\beta(n)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\beta(p)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\theta^\mu_\gamma(i)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\gamma(k)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\gamma(m)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\gamma(n)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\gamma(p)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\theta^\mu_\delta(i)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\delta(k)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\delta(m)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\delta(n)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\delta(p)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\theta^\mu_\varepsilon(i)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\varepsilon(k)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\varepsilon(m)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\varepsilon(n)} & \boldsymbol{\theta^\mu_\varepsilon(p)} & \boldsymbol{)0} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} \boldsymbol{= 0.}$$

Легко обобщить этот результат на случай колебательных систем с k степенями свободы:

Для множества

$$\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \ldots\},$$

состоящего из одинаковых колебательных систем с k степенями свободы, приведенных в движение в какой-то общий для всех момент времени с произвольными начальными координатами $\theta^{\mu}_{\alpha}(0)$ и скоростями $\dot{\theta}^{\mu}_{\alpha}(0)$, существует следующее соотношение, связывающее значение одной и той же μ-й координаты θ^{μ} для различных систем в разные моменты времени

Сакральная формулировка теории колебаний

$$\forall \alpha_1 \ldots \alpha_{2k+1} \in \mathfrak{N}, \qquad \forall i_1 \ldots i_{2k+1} \in \mathfrak{M}$$

$$\boldsymbol{K^{2k+1}_{00\ \alpha_1 \ldots \alpha_{2k+1}; i_1 \ldots i_{2k+1}}(\theta^{2k}_{\mu}) = 0.}$$

Литература к Примеру 11

[1]. *Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М.* Механика, том I, Наука, М.: 1973, С. 21.