Пример 10. Пространства постоянной кривизны

n -мерные пространства постоянной кривизны являются многообразиями, вложенными в $n+1$ -мерные линейные пространства.

n -мерное пространство постоянной положительной кривизны возникает на основе $n+1$ -мерного линейного пространства ${}^{n+1}\mathbb{R}_{n+1}$ с репрезентатором

$$ {}^{n+1}a_{ik} = x(i)_1 x(k)_1 + \ldots + x(i)_n x(k)_n + x(i)_{n+1} x(k)_{n+1} $$

при наложении дополнительного условия

$$ {}^{n+1}a_{ii} = R^2. $$

Таким образом, n -мерное пространство постоянной положительной кривизны S_n^+ (n -мерная эллиптическая геометрия Римана) реализуется на сфере вещественного радиуса R, вложенной в $n+1$ -мерное линейное пространство ${}^{n+1}\mathbb{R}_{n+1}$ с сигнатурой $(\underbrace{+\ldots++}_{n+1})$,

$$ x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = R^2. $$

В случае пространства постоянной положительной кривизны репрезентатор a_{ik} , равный скалярному произведению двух векторов $\vec{i}$ и $\vec{k}$, очевидным образом связаны с расстоянием ℓ_{ik}^+ между двумя точками i и k , лежащими на сфере радиуса R :

$$ a_{ik} = R^2 \cos\varphi_{ik} = R^2 \cos\frac{\ell_{ik}^+}{R}. $$

Таким образом, в этом случае имеем следующее выражение для расстояния ℓ_{ik}^+ через декартовы координаты точек i и k :

$$ R^2 \cos\frac{\ell_{ik}^+}{R} = x(i)_\mu x^\mu(k) + \sqrt{R^2 - x(i)_\mu x^\mu(k)}\sqrt{R^2 - x(k)_\mu x^\mu(k)}, \qquad (1) $$

где $x(i)_\mu x^\mu(k) = x(i)_1 x(k)_1 + \ldots + x(i)_n x^\mu(k)_n$.
Введём понятие кривизны, как величины обратной квадрату радиуса сферы R ,

$$ K = \frac{1}{R^2} $$

и перепишем соотношение (1) в виде:

$$ \frac{1}{K}\cos\sqrt{K}\ell_{ik}^+ = x(i)_\mu x^\mu(k) + \sqrt{\frac{1}{K} - x(i)_\mu x^\mu(k)}\sqrt{\frac{1}{K} - x(k)_\mu x^\mu(k)}. $$

Чтобы перейти к пространству постоянной отрицательной кривизны, заменим знак кривизны K на обратный $(K \to -K)$. Получим:

$$ \frac{1}{-K}\cos\sqrt{-K}\ell_{ik}^- = x(i)_\mu x^\mu(k) + \sqrt{-\frac{1}{K} - x(i)_\mu x^\mu(i)}\sqrt{-\frac{1}{K} - x(k)_\mu x^\mu(k)} $$

или

$$-\frac{1}{K}\cos i\sqrt{K}\ell^-_{ik} = x(i)_\mu x^\mu(k) - \sqrt{\frac{1}{K}+x(i)_\mu x^\mu(k)}\sqrt{\frac{1}{K}+x(k)_\mu x^\mu(k)}.$$

Замечая, что $\cos i\varphi = \operatorname{ch}\varphi$, и переходя от K к R^2, получим выражение для расстояния ℓ^-_{ik} между двумя точками i и k через их декартовы координаты в случае пространства постоянной отрицательной кривизны:

$$-R^2\operatorname{ch}\frac{\ell^-_{ik}}{R} = x(i)_\mu x^\mu(k) - \sqrt{R^2+x(i)_\mu x^\mu(k)}\sqrt{R^2+x(k)_\mu x^\mu(k)}. \qquad (2)$$

Полагая в (2) $i=k$, получим уравнение сферы мнимого радиуса, вложенной в линейное пространство ${}^n\mathbb{R}_{n+1}$ с сигнатурой $(\underbrace{+\ldots+-}_{n+1})$:

$$-R^2 = x_1^2+\ldots+x_n^2-x_{n+1}^2,$$

на которой реализуется n-мерное пространство постоянной отрицательной кривизны S^-_n (n-мерная гиперболическая геометрия Лобачевского).

Рассмотрим несколько конкретных примеров:

А. Пространства постоянной положительной кривизны (Эллиптические пространства Римана)

1. *Одномерное пространство постоянной положительной кривизны*

Одномерное пространство постоянной положительной кривизны S^+_1 вложено в двумерное линейное пространство $\mathbb{R}^2$ с репрезентатором

$$\overset{2}{a}_{ik} = x_ix_k + y_iy_k$$

и верификатором $\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3;k_1k_2k_3}(a)$. Вложение осуществляется за счёт дополнительного условия:

$$\overset{2}{a}_{ii} = R^2.$$

Таким образом, пространство S^+_1 реализуется на окружности радиуса R

$$x^2+y^2=R^2,$$

вложенной в двумерное линейное пространство $\mathbb{R}^2$.

Итак, при дополнительном условии $\overset{2}{a}_{ii} = R^2$ репрезентатор $\overset{2}{a}_{ik}$ имеет вид:

$$\overset{2}{a}_{ik} = R^2\cos\frac{\ell^+_{ik}}{R} = x_ix_k + \sqrt{R^2-x_i^2}\sqrt{R^2-x_k^2}.$$

Сакральное тождество, связывающее расстояния ℓ^{+}_{ik}, измеренные вдоль окружности, между точками $i_1,\, i_2,\, i_3$ с одной стороны и точками $k_1,\, k_2,\, k_3$ — с другой, имеет следующий вид:

$$\forall i_1, i_2, i_3 \in \underline{\mathfrak{N}} \qquad \forall k_1, k_2, k_3 \in \overline{\mathfrak{N}};$$

$$\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3; k_1 k_2 k_3}(\overset{2}{a}) = R^6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos\frac{\ell_{i_1 k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1 k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1 k_3}}{R} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\ell_{i_2 k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2 k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2 k_3}}{R} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\ell_{i_3 k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3 k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3 k_3}}{R} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= R^6 \begin{vmatrix} \cos\frac{\ell_{i_1 k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1 k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1 k_3}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_2 k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2 k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2 k_3}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_3 k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3 k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3 k_3}}{R} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

и в частности –

$$\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3; i_1 i_2 i_3}(\overset{2}{a}) = R^6 \begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\ell_{i_1 i_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1 i_3}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_2 i_1}}{R} & 1 & \cos\frac{\ell_{i_2 i_3}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_3 i_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3 i_2}}{R} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Сакральная диаграмма, иллюстрирующая отношения между кортами $\langle i_1, i_2, i_3|$ и $|k_1, k_2, k_3\rangle$ приведена на рис. 1

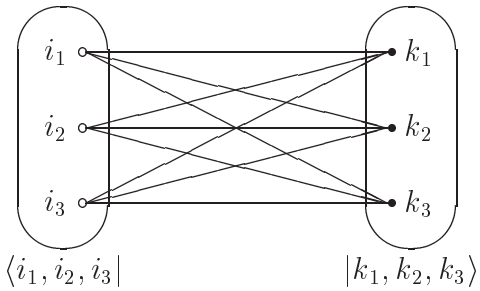


Рис. 1.

Из равенства

$$\cos\frac{\ell^{+}_{ik}}{R} = \frac{1}{R^2}(x_i x_k + \sqrt{R^2 - x_i^2}\sqrt{R^2 - x_k^2}) \tag{3}$$

получаем квадрат расстояния ds^2 между близкими точками, так как

$$\cos\frac{\ell^{+}_{ik}}{R} \approx 1 - \frac{ds^2}{2R^2}$$

то, переписывая соотношение (3) в виде

$$1 - \frac{ds^2}{2R^2} = \frac{1}{R^2}\Big(x(x+dx) + \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{R^2 - (x+dx)^2}\Big),$$

в конце концов получим:

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 - \frac{x^2}{R^2}}. \tag{4}$$

Легко убедиться в том, что

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1 - \frac{x^2}{R^2}} = dx^2 + dy(x)^2 = dx^2 + (d\sqrt{R^2 - x^2})^2$$

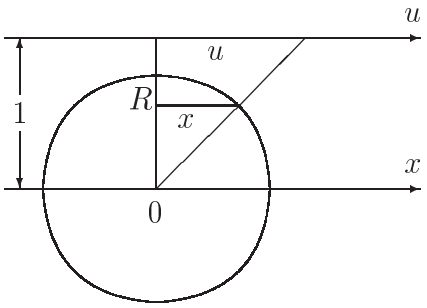


Рис. 2. Модель Кэли.

С помощью центральной проекции перейдём от декартовой координаты x к бельтрамиевой u (см. рис. 2.):

$$u = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

и обратно

$$x = R\frac{u}{1 + u^2}$$

В бельтрамиевых координатах метрика (4) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = R^2 \frac{du^2}{(1 + u^2)^2}}.$$

С помощью стереографической проекции перейдём от декартовой координаты x к координате Пуанкаре ξ (см. рис. 3.):

$$\xi = \frac{x}{R + \sqrt{R^2 - x^2}}$$

и обратно

$$x = R\frac{2\xi}{1 + \xi^2}.$$

В координатах Пуанкаре метрика (4) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = R^2 \frac{4d\xi^2}{(1 + \xi^2)^2}}$$

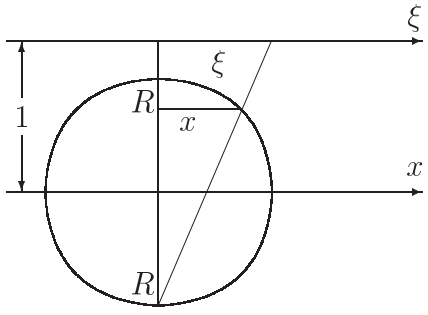


Рис. 3. Модель Пуанкаре.

Итак, имеет место следующая

Сакрально-инвариантная формулировка одномерной эллиптической геометрии Римана

$$\boxed{\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3;\ k_1 k_2 k_3}(\overset{2}{a}) \equiv 0}$$

$$\overset{2}{a}_{ik} = R^2 \cos\frac{\lambda_{ik}}{R} = x_i x_k + \sqrt{R^2 - x_i^2}\,\sqrt{R^2 - x_k^2}\,.$$

2. *Двумерное пространство постоянной положительной кривизны.*

Двумерное пространство постоянной положительной кривизны S_2^+ (двумерная эллиптическая геометрия Римана) вложено в трёхмерное линейное пространство $\mathbb{R}^3$ с репрезентатором

$$\overset{3}{a}_{ik} = x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k$$

и верификатором $\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3 i_4; k_1 k_2 k_3 k_4}(a)$.

Вложение осуществляется за счёт дополнительного условия:

$$\overset{3}{a}_{ii} = R^2.$$

Таким образом, пространство S_2^+ реализуется на сфере радиуса R:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

вложенной в трёхмерное линейное пространство $\mathbb{R}^3$.

Итак, при дополнительном условии $\overset{3}{a}_{ii} = R^2$ репрезентатор $\overset{3}{a}_{ik}$ имеет вид:

$$\overset{3}{a}_{ik} = R^2 \cos\frac{\ell^+_{ik}}{R} = x_i x_k + y_i y_k + \sqrt{R^2 - x_i^2 - y_i^2}\sqrt{R^2 - x_k^2 - y_k^2}. \qquad (5)$$

Сакральное тождество, связывающее расстояния ℓ^+_{ik}, измеренные вдоль сферы между точками $\underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3, \underline{i}_4$, с одной стороны, и точками $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4$ — с другой, имеет следующий вид:

$$\forall \underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3, \underline{i}_4 \in \underline{\mathfrak{N}} \qquad \forall \overline{k}_1, \overline{k}_2, \overline{k}_3, \overline{k}_4 \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3i_4;k_1k_2k_3k_4}(\overset{3}{a}) = R^8 \begin{vmatrix} \cos\frac{\ell_{i_1k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1k_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1k_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_2k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2k_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2k_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_3k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3k_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3k_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_4k_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4k_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4k_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4k_4}}{R} \end{vmatrix} \equiv 0$$

и, в частности,

$$\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3i_4;i_1i_2i_3i_4}(\overset{3}{a}) = R^8 \begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\ell_{i_1i_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1i_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_1i_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_2i_1}}{R} & 1 & \cos\frac{\ell_{i_2i_3}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_2i_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_3i_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_3i_2}}{R} & 1 & \cos\frac{\ell_{i_3i_4}}{R} \\ \cos\frac{\ell_{i_4i_1}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4i_2}}{R} & \cos\frac{\ell_{i_4i_3}}{R} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Сакральная диаграмма, иллюстрирующая отношения между кортами $\langle i_1, i_2, i_3, i_4|$ и $|k_1, k_2, k_3.k_4\rangle$, приведена на рис. 4.

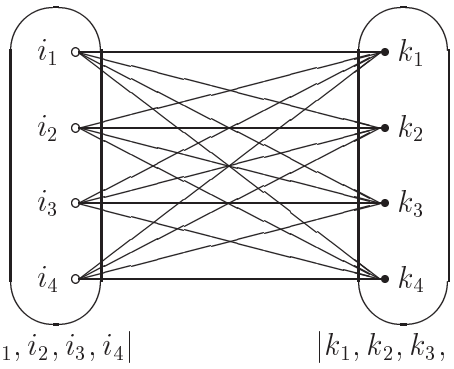


Рис. 4. Сакральная диаграмма отношений между кортами $\langle i_1, i_2, i_3, i_4|$ и $|k_1, k_2, k_3.k_4\rangle$.

Из равенства (5) находим метрику в декартовых координатах x и y :

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2}\Big[(R^2 - y^2)dx^2 + 2xydxdy + (R^2 - x^2)dy^2\Big]}$$

С помощью центральной проекции (см. Рис. 2.) перейдём от декартовых координат x , y к бельтрамиевым u , v :

$$u = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad x = R\frac{u}{1 + u^2 + v^2}$$

и обратно

$$v = \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad y = R\frac{v}{1 + u^2 + v^2}$$

В бельтрамиевых координатах метрика (6) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = \frac{R^2}{(1 + u^2 + v^2)^2}\Big[(1 + v^2)du^2 - 2uvdudv + (1 + u^2)dv^2\Big]}$$

С помощью стереографической проекции (см. рис. 3) перейдём от декартовых координат x, y к изотермическим координатам Пуанкаре ξ, η:

$$\xi = \frac{x}{R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad x = R\frac{2\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}$$

и обратно

$$\eta = \frac{y}{R + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad y = R\frac{2\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2}$$

В изотермических координатах Пуанкаре метрика (6) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = \frac{4R^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2}(d\xi^2 + d\eta^2)}$$

Итак, имеет место следующая

Сакральная формулировка двумерной эллиптической геометрии Римана

$$\boxed{\overset{4}{\boldsymbol{K}}{}^{\boldsymbol{00}}{}_{\boldsymbol{i_1 i_2 i_3 i_4;\ k_1 k_2 k_3 k_4}}(\overset{3}{\boldsymbol{a}}) \equiv \boldsymbol{0}}$$

$$\overset{3}{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{ik}} = \boldsymbol{R^2}\cos\frac{\boldsymbol{\lambda_{ik}}}{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{x_i x_k + y_i y_k + \sqrt{R^2 - x_i^2 - y_i^2}\,\sqrt{R^2 - x_k^2 - y_k^2}}\,.$$

В. Пространства постоянной отрицательной кривизны (Гиперболические геометрии Лобачевского)

1. *Одномерное пространство постоянной отрицательной кривизны*

Одномерное пространство постоянной отрицательной кривизны S_1^- вложено в двумерное линейное пространство ${}^1\mathbb{R}_2$ с репрезентатором

$$\overset{2}{a}_{ik} = x_i x_k - y_i y_k$$

и верификатором $\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3;k_1k_2k_3}(a)$.
Вложение осуществляется за счёт дополнительного условия:

$$\overset{2}{a}_{ii}= -R^2$$

Таким образом, пространство S_1^- реализуется на окружности мнимого радиуса iR :

$$x^2 - y^2 = -R^2,$$

вложенной в двумерное линейное пространство ${}^1\mathbb{R}_2$ с сигнатурой $(+-)$.

Итак, при дополнительном условии $\overset{2}{a}_{ii}= -R^2$, репрезентатор $\overset{2}{a}{}^-_{ik}$ имеет вид:

$$\overset{2}{a}{}^-_{ik} = -R^2 \operatorname{ch}\frac{\ell^-_{ik}}{R} = x_ix_k - \sqrt{R^2+x_i^2}\sqrt{R^2+x_k^2}. \tag{7}$$

Сакральное тождество, связывающее расстояние ℓ^-_{ik} между точками i_1, i_2, i_3 с одной стороны и точками k_1, k_2, k_3 — с другой, имеет вид:

$$\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3;k_1k_2k_3}(\overset{2}{a}) \;=\; (-1)^3R^6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_3}}{R} & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_3}}{R} & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_3}}{R} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \;(-1)^3R^6 \begin{vmatrix} \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_3}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_3}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_3}}{R} \end{vmatrix} \equiv 0$$

и, в частности,

$$\overset{3}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3;k_1k_2k_3}(\overset{2}{a}) == \;(-1)^3R^6 \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_2}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_3}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_1}}{R} & 1 & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_3}}{R} \\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_1}}{R} & \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_2}}{R} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Сакральная диаграмма, иллюстрирующая отношения между кортами $\langle i_1i_2i_3|$ и $k_1k_2k_3\rangle$, приведена на рис. 1.

Из равенства (7) получим квадрат расстояния ds^2 между близкими точками.

Так как $\operatorname{ch}\dfrac{\ell^-_{ik}}{R} \approx 1 + \dfrac{ds^2}{2R^2}$, то, переписывая равенство (7) в виде

$$R^2 + ds^2 = \sqrt{R^2+x^2}\sqrt{R^2+(x+dx)^2} - x(x+dx),$$

в конце концов получим:

$$ds^2 = R^2\frac{dx^2}{R^2+x^2}. \tag{8}$$

Легко убедиться в том, что

$$ds^2 = \frac{dx^2}{1+\frac{x^2}{R^2}} = dx^2 - dy(x)^2 = dx^2 - (d\sqrt{R^2+x^2})^2.$$

Перейдём от декартовой координаты x к бельтрамиевой u:

$$u = \frac{dx^2}{1 + \frac{x^2}{R^2}} \quad \text{и обратно} \quad x = R\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

В бельтрамиевых координатах метрика (8) имеет вид:

$$ds^2 = R^2 \frac{du^2}{(1-u^2)^2}.$$

Перейдём от декартовой координаты x к координате Пуанкаре ξ:

$$\xi = \frac{x}{R - \sqrt{R^2 + x^2}} \quad \text{и обратно} \quad x = R\frac{2\xi}{1-\xi^2}.$$

В координатах Пуанкаре метрика (8) имеет вид:

$$ds^2 = \frac{4R^2 d\xi^2}{(1-\xi^2)^2}.$$

Итак, имеет место следующая

Сакральная формулировка одномерной гиперболической геометрии

$$\boxed{\overset{3}{\boldsymbol{K}}{}^{00}_{i_1 i_2 i_3;\ k_1 k_2 k_3}(\overset{2}{\boldsymbol{a}}) \equiv 0}$$

$$\overset{2}{\boldsymbol{a}}_{ik} = -\boldsymbol{R^2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\boldsymbol{\lambda_{ik}}}{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{x_i x_k} - \sqrt{\boldsymbol{R^2 - x_i^2}}\,\sqrt{\boldsymbol{R^2 - x_k^2}}\,.$$

2. *Двумерное пространство постоянной отрицательной кривизны*

Двумерное пространство постоянной отрицательной кривизны S_2^- (двумерная гиперболическая геометрия Лобачевского) вложено в трёхмерное линейное пространство ${}^2\mathbb{R}_3$ с репрезентатором

$$\overset{3}{a}_{ik} = x_i x_k + y_i y_k - z_i z_k$$

и верификатором $\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3i_4;k_1k_2k_3k_4}(a)$.

Вложение осуществляется за счёт дополнительного условия:

$$\overset{3}{a}_{ii}= -R^2.$$

Таким образом, пространство S_2^+ реализуется на сфере мнимого радиуса iR :

$$x^2+y^2-z^2=-R^2,$$

вложенной в трёхмерное линейное пространство ${}^2\mathbb{R}_3$ с сигнатурой $(++-)$.

Итак, при дополнительном условии $\overset{3}{a}_{ii}= -R^2$ репрезентатор $\overset{3}{a}{}^-_{ik}$ имеет вид:

$$\overset{3}{a}_{ik}= -R^2\operatorname{ch}\frac{\ell^-_{ik}}{R}=x_ix_k+y_iy_k-\sqrt{R^2+x_i^2+y_i^2}\,\sqrt{R^2+x_k^2+y_k^2}. \tag{5}$$

Сакральное тождество, связывающее расстояния ℓ^-_{ik} , измеренные вдоль сферы мнимого радиуса между точками $\underline{i}_1,\underline{i}_2,\underline{i}_3,\underline{i}_4$ с одной стороны и точками $\overline{k}_1,\overline{k}_2,\overline{k}_3,\overline{k}_4$ — с другой, имеет следующий вид:

$$\forall\underline{i}_1,\underline{i}_2,\underline{i}_3,\underline{i}_4\in\underline{\mathfrak{N}}\qquad\forall\overline{k}_1,\overline{k}_2,\overline{k}_3,\overline{k}_4\in\overline{\mathfrak{M}}$$

$$\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3i_4;k_1k_2k_3k_4}\Big(\operatorname{ch}\frac{\ell^-}{R}\Big)=\begin{vmatrix}\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_1}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_2}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_3}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1k_4}}{R}\\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_1}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_2}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_3}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2k_4}}{R}\\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_1}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_2}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_3}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3k_4}}{R}\\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4k_1}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4k_2}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4k_3}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4k_4}}{R}\end{vmatrix}\equiv 0$$

и, в частности,

$$\overset{4}{K}{}^{00}_{i_1i_2i_3i_4;i_1i_2i_3i_4}\Big(\operatorname{ch}\frac{\ell^-}{R}\Big)=\begin{vmatrix}1&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1i_2}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1i_3}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_1i_4}}{R}\\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2i_1}}{R}&1&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2i_3}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_2i_4}}{R}\\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3i_1}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3i_2}}{R}&1&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_3i_4}}{R}\\ \operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4i_1}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4i_2}}{R}&\operatorname{ch}\frac{\ell_{i_4i_3}}{R}&1\end{vmatrix}\equiv 0.$$

Сакральная диаграмма, иллюстрирующая отношения между кортами $\langle i_1,i_2,i_3,i_4|$ и $|k_1,k_2,k_3.k_4\rangle$, приведена на рис. 4

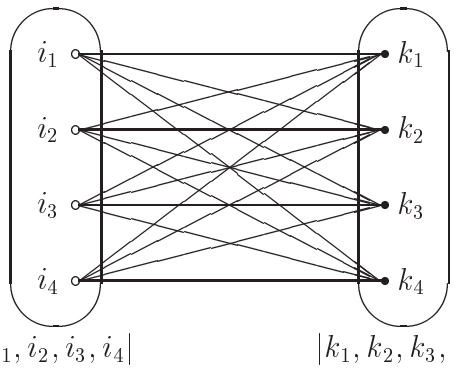


Рис. 4. Сакральная диаграмма отношений между кортами $\langle i_1,i_2,i_3,i_4|$ и $|k_1,k_2,k_3.k_4\rangle$.

Из равенства (5) находим метрику в декартовых координатах x и y:

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{R^2+x^2+y^2}\Big[(R^2+y^2)dx^2 - 2xydxdy + (R^2+x^2)dy^2\Big]}$$

С помощью центральной проекции (см. Рис. 2.) перейдём от декартовых координат x, y к бельтрамиевым u, v:

$$u = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2+y^2}} \qquad x = R\frac{u}{1-u^2-v^2}$$

и обратно

$$v = \frac{y}{\sqrt{R^2+x^2+y^2}} \qquad y = R\frac{v}{1-u^2-v^2}$$

В бельтрамиевых координатах метрика (6) имеет вид:

$$\boxed{ds^2 = \frac{R^2}{(1-u^2-v^2)^2}\Big[(1-v^2)du^2 + 2uvdudv + (1-u^2)dv^2\Big]}$$

С помощью стереографической проекции (см. рис. 3) перейдём от декартовых координат x, y к изотермическим координатам Пуанкаре ξ, η:

$$\xi = \frac{x}{R+\sqrt{R^2+x^2+y^2}} \qquad x = R\frac{2\xi}{1-\xi^2-\eta^2}$$

и обратно

$$\eta = \frac{y}{R+\sqrt{R^2+x^2+y^2}} \qquad y = R\frac{2\eta}{1-\xi^2-\eta^2}$$

В изотермических координатах Пуанкаре метрика (6) имеет вид:

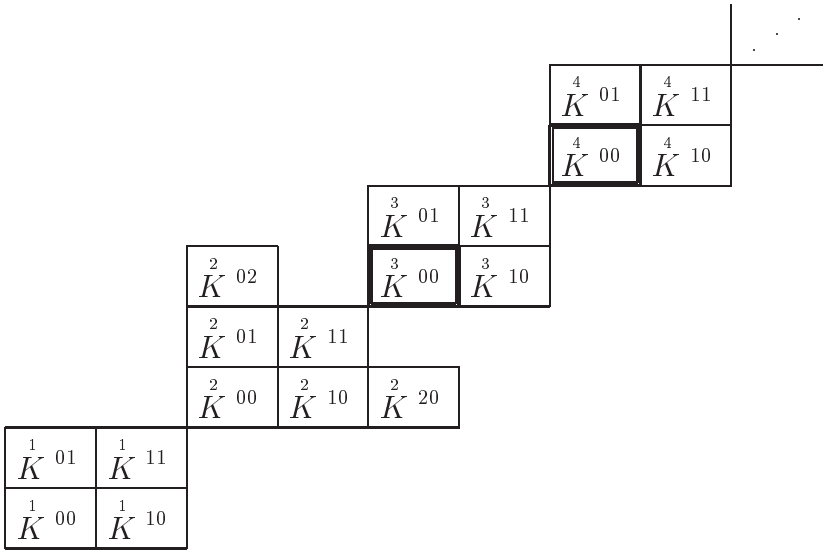
$$\boxed{ds^2 = \frac{4R^2}{(1-\xi^2-\eta^2)^2}(d\xi^2+d\eta^2)}$$

Итак, имеет место следующая

Сакральная формулировка двумерной геометрии Лобачевского

$$\boxed{\boldsymbol{K}^{\overset{4}{00}}_{i_1 i_2 i_3 i_4;\ k_1 k_2 k_3 k_4}(\overset{3}{\boldsymbol{a}}) \equiv 0}$$

$$\overset{3}{a}_{ik} = -\operatorname{ch}\frac{\lambda_{ik}}{R} = x_i x_k + y_i y_k - \sqrt{R^2 + x_i^2 + y_i^2}\,\sqrt{R^2 + x_k^2 + y_k^2}\ ) \ .$$



Места четырёх физических структур, выражающих сущность двух одномерных и двух двумерных пространств постоянной положительной и отрицательной кривизны, среди всех возможных физических структур.

Итак, мы видим, что геометрии n-мерных пространств постоянной кривизны (эллиптическая геометрия Римана и гиперболическая геометрия Лобачевского) могут быть последовательно и строго получены из Теории физических структур по следующей схеме:

1. Исходим из физической структуры ранга (r, r).

Исходное сакральное тождество имеет вид:

$$\forall i_1 \dots i_n \in \underline{\mathfrak{N}} \quad \forall k_1 \dots k_n \in \overline{\mathfrak{M}}$$

$$\Phi(\varphi_{i_1 k_1}, \dots, \varphi_{i_1 k_r}, \ \dots\dots\dots\dots\dots \ = 0 \ \varphi_{i_r k_1}, \dots, \varphi_{i_r k_r})$$

1. У этого сакрального уравнения имеется два, и только два, решения – мультипликативное

$$\varphi_{ik}^{(1)} = \overset{r-1}{a}{}_{ik} = \varepsilon_1 x(i)_1 x^1(k) + \dots + \varepsilon_{r-1} x(i)_{r-1} x^{r-1}(k)$$

$$\overset{r}{K}{}^{00}_{i_1 \dots i_r; k_1 \dots k_r}(a) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & a_{i_1 k_1} & \dots & a_{i_1 k_r} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i_r k_1} & \dots & a_{i_r k_r} & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r}{K}{}^{00}_{i_1\ldots i_r;k_1\ldots k_r}(\overset{r-1}{a}) \equiv 0$$

и аддитивное

$$\varphi^{(2)}_{ik} = \overset{r-2}{w}_{ik} = x^0(k) + \varepsilon_1 x(i)_1 x^1(k) + \cdots + \varepsilon_{r-2} x(i)_{r-2} x^{r-2}(k) + x(i)_0$$

$$\overset{r-1}{K}{}^{11}_{i_1\ldots i_r;k_1\ldots k_r}(w) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ -1 & w_{i_1k_1} & \ldots & w_{i_1k_{r-1}} & w_{i_1k_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & w_{i_{r-1}k_1} & \ldots & w_{i_{r-1}k_r} & 0 \\ -1 & w_{i_rk_1} & \ldots & w_{i_rk_{r-1}} & w_{i_rk_r} \end{vmatrix}$$

$$\overset{r-1}{K}{}^{11}_{i_1\ldots i_r;k_1\ldots k_r}(\overset{r-2}{w}) \equiv 0$$

$$\varepsilon = \pm 1$$

3. Выбирая мультипликативное решение $(r-1=n)$ и накладывая дополнительное условие,

$$\overset{n}{a}_{ik} = \overset{n}{a}_{ki},$$

получаем линейную алгебру (геометрию n-мерного линейного пространства) со скалярным произведением

$$\overset{n}{a}_{ik} = g_{\mu\nu} x^\mu(i) x^\nu(k),$$

4. Накладывая на скалярное произведение ещё одно дополнительное условие,

$$\overset{n}{a}_{ii} = \varepsilon R^2,$$

получим в случае $\varepsilon = 1$ геометрию n-мерного пространства постоянной положительной кривизны, а в случае $\varepsilon = -1$ — геометрию n-мерного пространства постоянной отрицательной кривизны.