Пример 18. Механика Гамильтона–Якоби

Начнём с традиционного изложения. Обычно действие S определяется как интеграл от функции Лагранжа [1]

$$S = \int\limits_{t_0}^{t} L d\tau \tag{1}$$

или

$$\frac{dS}{dt} = \overline{L} \quad \text{и} \quad \frac{dS}{dt_0} = -L_0.$$

Но что скрывается за этими формулами?

Рассмотрим это определение более подробно. Начнём с интеграла

$$\widetilde{S} = \int\limits_{t_0}^{t} \overline{L}\big(q(q_0, v_0, \tau), v(q_0, v_0, \tau), \tau\big) d\tau = \widetilde{S}(q_0, v_0, t, \tau_0). \tag{2}$$

Из $q^\mu = q^\mu(q_0^\mu, v_0^\mu; t)$ находим

$$v_0^\mu = v_0^\mu(q^\mu, q_0^\mu, t). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2) получим окончательное выражение для действия как функции $q,\ q_0,\ t,\ t_0$:

$$S = \widetilde{S}\big(q_0, v_0(q, q_0, t), t, t_0\big) = S(q^\mu, t; q_0^\mu, t_0).$$

Чтобы найти частные производные $\frac{\partial S}{\partial q^\mu}$ и $\frac{\partial S}{\partial q_0^\mu}$ рассмотрим вариацию:

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t} \delta L d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial L}{\partial q^\mu} \delta q^\mu + \frac{\partial L}{\partial v^\mu} \delta v^\mu \right) d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} (\dot{p}_\mu \delta q^\mu + p_\mu \delta \dot{q}^\mu) d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau} (p_\mu \delta q^\mu) d\tau = p_\mu \delta q^\mu \Big|_{t_0}^{t} =$$

$$= p_\mu \delta q^\mu - p_\mu(0) \delta q^\mu(0).$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial S}{\partial q^\mu}\big(q^\mu, t; q^n(0), t_0\big) = p_\mu, \qquad \frac{\partial S}{\partial q^\mu(0)}\big(q^\mu, t; q^n(0), t_0\big) = -\,p_\mu(0).$$

С другой стороны, имеем:

$$\frac{dS}{dt} = L \quad \text{и} \qquad \frac{dS}{dt_0} = -\,L_0.$$

Итак, имеем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q^\mu} \cdot \dot{q}^\mu = \frac{\partial S}{\partial t} + p_\mu \dot{q}^\mu = L = p_\mu \dot{q}^\mu - H$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H.$$

Аналогично,

$$\frac{dS}{dt_0} = \frac{\partial S}{\partial t_0} + \frac{\partial S}{\partial q^\mu(0)} \cdot \dot{q}^\mu(0) = \frac{\partial S}{\partial t_0} - p_\mu(0)\dot{q}^\mu(0) = -L_0 = -p_\mu(0)\dot{q}^\mu(0) + H_0$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t_0} = H_0.$$

Таким образом, получаем

$$dS = p_\mu dq^\mu - H dt - p_\mu(0) dq^\mu(0) + H_0 dt_0.$$

В итоге имеем четыре функции действия:

$$dS_1(q, q_0.t, t_0) = p_\mu dq^\mu - p_\mu(0) dq^\mu(0) - H dt + H_0 dt_0$$

$$dS_2(q, q_0.t, t_0) = p_\mu dq^\mu + q^\mu(0) dp_\mu(0) - H dt + H_0 dt_0$$

$$dS_3(q, q_0.t, t_0) = -q^\mu dp_\mu - p_\mu(0) dq^\mu(0) - H dt + H_0 dt_0$$

$$dS_4(q, q_0.t, t_0) = -q^\mu dp_\mu + q^\mu(0) dp_\mu(0) - H dt + H_0 dt_0,$$

где четыре функции действия S_1, S_2, S_3, S_4 связаны между собой следующими соотношениями:

$$S_1(q, t; q_0, t_0) = S_1(q, t; q_0, t_0),$$

$$S_2(q, t; q_0, t_0) = S_1(q, t; q_0, t_0) + p_\mu(0) q^\mu(0),$$

$$S_3(q, t; q_0, t_0) = S_1(q, t; q_0, t_0) - p_\mu q^\mu,$$

$$S_4(q, t; q_0, t_0) = S_1(q, t; q_0, t_0) - p_\mu q^\mu + p_\mu(0) q^\mu(0).$$

Используя равенства

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, p, t) \quad \text{и} \qquad \frac{\partial S}{\partial q^\mu} = p_\mu,$$

получаем уравнение Гамильтона–Якоби

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^\mu, \frac{\partial S}{\partial q^\nu}, t\right) = 0.}$$

Итак, введение функции действия

$$S = \int\limits_{t_0}^{t} L d\tau$$

позволяет свести механику Лагранжа–Гамильтона, в основании которой лежит n уравнений второго порядка — уравнений Лагранжа,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\mu} = 0$$

или $2n$ уравнений первого порядка — система канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q^\mu} \qquad \text{и} \qquad \dot{q}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu}$$

к механике Гамильтона–Якоби, основании которой лежит одно уравнение в частных производных — уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^\mu, \frac{\partial S}{\partial q^\nu}, t\right) = 0.$$

Получим это уравнение независимым путём как следствие существования на двух множествах $\underline{\mathfrak{M}}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$ аддитивной физической структуры ранга $(2n+4, 2n+4)$.

Согласно theorema egregium Михайличенко в этом случае имеется единственное решение:
верификатор и репрезентатор этого решения имеют следующий вид:

$$\overset{2(n+1)+1}{K}{}^{11}_{\underline{i}_1 \ldots \underline{i}_{2n+4}; \overline{k}_1 \ldots \overline{k}_{2n+4}} (\overset{2(n+1)}{w}) = 0$$

$$\overset{2(n+1)}{w}{}_{\underline{i}\overline{k}} = \overline{s}(k) + x_\mu(i)x^\mu(k) + x_{n+1}(i)x^{n+1}(k) + \xi_\nu(i)\xi^\nu(k) + \xi_{n+1}(i)\xi^{n+1}(k) + \underline{s}(i).$$

Наложим первое дополнительное условие — будем считать скрытый параметр $\overline{s}$ произвольной функцией контравариантных координат:

$$x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \xi^1, \ldots, \xi^n, \xi^{n+1},$$

а скрытый параметр $\underline{s}$ – произвольной функцией ковариантных координат:

то есть

$$x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1},$$
$$\overline{s} = A^{00}(x^\mu, x^{n+1}, \xi^\nu, \xi^{n+1})$$
$$\underline{s} = -A^{11}(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}).$$

Итак, имеем следующее выражение для репрезентатора: $\overset{2(n+1)}{w}{}_{\underline{i}\overline{k}}$

$$\overset{2(n+1)}{w}{}_{\underline{i}\overline{k}} = A^{00}\left(x^\mu(k), x^{n+1}(k), \xi^\nu(k), \xi^{n+1}(k)\right) + x_\mu(i)x^\mu(k) + x_{n+1}(i)x^{n+1}(k) +$$
$$+ \xi_\nu(i)\xi^\nu(k) + \xi_{n+1}(i)\xi^{n+1}(k) - A^{11}\left(x_\mu(k), x_{n+1}(k), \xi_\nu(k), \xi_{n+1}(k)\right).$$

Наложим второе дополнительное условие — условие рефлексии:

$$\overset{2(n+1)}{w}_{\underline{i}\,\overline{i}} = 0.$$

В результате получим следующее соотношение, связывающее между собой два дуально сопряжённых сакральных потенциала A^{00} и A^{11}:

$$A^{00}(x^\mu, x^{n+1}, \xi^\nu, \xi^{n+1}) + x_\mu x^\mu + x_{n+1}x^{n+1} + \xi_\nu \xi^\nu + \xi_{n+1}\xi^{n+1} - \\ - A^{11}(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}) = 0. \quad (4)$$

После дифференцирования этого равенства получаем:

$$\left(\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu} + x_\mu\right) dx^\mu + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu} + \xi_\nu\right) d\xi^\nu + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial x^{n+1}} + x_{n+1}\right) dx^{n+1} + \\ + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^{n+1}} + \xi_{n+1}\right) d\xi^{n+1} + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu} + x^\mu\right) dx_\mu + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\nu} + \xi^\nu\right) d\xi_\nu + \\ + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial x_{n+1}} + x^{n+1}\right) dx_{n+1} + \left(-\frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_{n+1}} + \xi^{n+1}\right) d\xi_{n+1} = 0. \quad (5)$$

Чтобы соотношение (4) имело какой-либо смысл и представляло собой тождество относительно всех переменных, необходимо положить:

$$\begin{aligned} x^\nu &= x^\mu(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}) \\ \xi^\nu &= \xi^\mu(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}) \\ x^{n+1} &= x^{n+1}(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}) \\ \xi^{n+1} &= \xi^{n+1}(x_\mu, x_{n+1}, \xi_\nu, \xi_{n+1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Если в качестве функций (5) принять

$$x^\mu = \frac{\partial A^{11}}{\partial x_\mu}(x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1}, \quad \xi^\mu = \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_\mu}(x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1},$$

$$x^{n+1} = \frac{\partial A^{11}}{\partial x_{n+1}}(x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1}, \quad \xi^{n+1} = \frac{\partial A^{11}}{\partial \xi_{n+1}}(x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1},$$

то равенство (5) примет вид:

$$\left(\frac{\partial A^{00}}{\partial x^\mu} + x_\mu\right) dx^\mu + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^\nu} + \xi_\nu\right) d\xi^\nu + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial x^{n+1}} + x_{n+1}\right) dx^{n+1} + \\ + \left(\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^{n+1}} + \xi_{n+1}\right) d\xi^{n+1} = 0.$$

Так как $dx^\mu, d\xi^n, dx^{n+1}, d\xi^{n+1}$ независимы, то имеют место следующие $2(n+1)$ соотношений, связывающих между собой $4(n+1)$ переменных:

$$x^\mu, x^{n+1}; \xi^\nu, \xi^{n+1}; x_\mu, x_{n+1}; \xi_\nu, \xi_{n+1}$$

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial x^{\mu}}(x^{\mu}, x^{n+1}; \xi^{\nu}, \xi^{n+1}) = -x_{\mu}$$

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^{\nu}}(x^{\mu}, x^{n+1}; \xi^{\nu}, \xi^{n+1}) = -\xi_{\nu}$$

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial x^{n+1}}(x^{\mu}, x^{n+1}; \xi^{\nu}, \xi^{n+1}) = -x_{n+1}$$

$$\frac{\partial A^{00}}{\partial \xi^{n+1}}(x^{\mu}, x^{n+1}; \xi^{\nu}, \xi^{n+1}) = -\xi_{n+1}.$$

Механика Гамильтона–Якоби возникает в Теории физических структур как результат существования сакральной симметрии, если придать переменным

$$x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}; \quad \xi^1, \ldots, \xi^n \xi^{n+1};$$
$$x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}; \quad \xi_1, \ldots, \xi_n \xi_{n+1}$$

и сакральному потенциалу $A^{00}(x^{\mu}, x^{n+1}; \xi^{\nu}, \xi^{n+1})$ следующую физическую интерпретацию:

$x^1, \ldots, x^n = q^1, \ldots, q^n$ — обобщённые координаты,
$x^{n+1} = t$ — текущее время,
$-x_1, \ldots, -x_n = p_1, \ldots, p_n$ — обобщённые импульсы,
$x_{n+1} = H(q, p, t)$ — функция Гамильтона;

$\xi^1, \ldots, \xi^n = q^1(0), \ldots, q^n(0)$ — начальные значения обобщённых координат,
$\xi^{n+1} = t_0$ — начальный момент времени,
$\xi_1, \ldots, \xi_n = p_1(0), \ldots, p_n(0)$ — начальные значения обобщённых импульсов,
$-\xi_{n+1} = H(q_0, p_0, t)$ — функция Гамильтона в начальный момент времени.

$$A^{00}(x^{\mu}, x^{n+1}, \xi^{\nu}, \xi^{n+1}) = S_1\big(q^{\mu}, q^{\nu}(0), t, t_0\big).$$

Заметим, что существенным третьим дополнительным условием является требование

$$x_{n+1} = H = H(q^{\mu}, p_{\nu}, t)$$
$$-\xi_{n+1} = H_0 = H(q^{\mu}(0), p_{\nu}(0), t).$$

В новых обозначениях система $2(n+1)$ уравнений, связывающих между собой $4(n+1)$ переменных,

$$q^1, \ldots, q^n, t; \quad q^1(0), \ldots, q^n(0), t_0$$
$$p_1, \ldots, p_n, H; \quad p_1(0), \ldots, p_n(0), H(0),$$

имеет следующий вид:

$$\frac{\partial S_1}{\partial q^\mu}(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0) = p_\mu, \tag{7}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial q^\mu(0)}(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0) = -p_\mu(0), \tag{8}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0) = -H(q^\mu, p_\nu, t), \tag{9}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t_0}(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0) = H\big(q^\mu(0), p_\nu(0), t_0\big). \tag{10}$$

Если известна функция $S_1(q^\mu, q^\nu(0), t, t_0)$, то из n уравнений (8) находим

$$q^\mu = q^\mu\big(t, t_0, q(0), p(0)\big),$$

а затем из n уравнений (8) находим:

$$p_\mu = p_\mu\big(t, t_0, q(0), p(0)\big).$$

Перепишем равенства (7) и (8) в виде:

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial q^\mu}(q, t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q^\mu, p_\nu, t) = 0$$

и, в конце концов, получаем уравнение Гамильтона–Якоби относительно неизвестной функции $S(q^1, \ldots, q^\nu, t)$:

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t}(q^1, \ldots, q^n, t) + H\left(q^1, \ldots, q^n, \frac{\partial S}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q^n}, t\right)} \tag{11}$$

В данной ситуации основную роль играет не общий интеграл уравнения (11), а так называемый полный интеграл; так называется решение уравнения (1), содержащее столько независимых произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных

$$S = S(t, q^1, \ldots, q^n; \alpha_1 \ldots, \alpha_n) + \alpha_0.$$

Литература к Примеру 18

[1]. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика. (Серия “теоретическая физика” том. 1), М., 1973 г., С. 173.



Новосибирский государственный университет, где создавалась Теория физических структур