

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

Г. Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

(Представлено академиком А. Д. Александровым 23 IX 1970)

В работе ⁽¹⁾ Ю. И. Кулаковым была дана математическая формулировка теории физических структур. Там же рассмотрен простейший случай с использованием метода параметризации. В настоящей работе дается более естественная формулировка аксиом физической структуры и приводится решение функциональных уравнений, возникающих в данной теории.

Пусть имеются два множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, элементы которых обозначаются латинскими и греческими буквами соответственно, и вещественная функция $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \rightarrow R$, сопоставляющая каждой паре $\langle i, \alpha \rangle \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ некоторое число $a_{i\alpha} = (i, \alpha) \in R$. Два элемента $i, j \in \mathfrak{M}$ будем считать различными, $i \neq j$, если во множестве $\mathfrak{N}$ найдется хотя бы один такой элемент α , что $(i, \alpha) \neq (j, \alpha)$. Если же для любого $\alpha \in \mathfrak{N}$ имеет место $(i, \alpha) = (j, \alpha)$, то элементы i, j будем считать совпадающими, $i = j$. Аналогично определяется различие или совпадение элементов α, β из множества $\mathfrak{N}$. Будем предполагать, что в обоих множествах отождествлены все совпадающие элементы.

На множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ введем топологию, определив фундаментальные системы окрестностей. Пусть $i_0 \in \mathfrak{M}$ — некоторый фиксированный элемент и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $A\{i_0, \varepsilon\}$ совокупность всех тех элементов $i \in \mathfrak{M}$, для которых выполняется неравенство $|(i, \alpha) - (i_0, \alpha)| < \varepsilon$. Семейство всех множеств $A\{i_0, \varepsilon\}$ для всевозможных значений положительного числа ε образует фундаментальную систему окрестностей точки i_0 . Аналогично определяется окрестность $A\{a_0, \delta\}$ и фундаментальная система окрестностей точки $a_0 \in \mathfrak{N}$. Топология на прямом произведении $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ вводится через топологии сомножителей обычным образом.

Пусть $m \geq n \geq 2$ и $\mathfrak{M}^m$ и $\mathfrak{N}^n$ соответственно m -кратное и n -кратное прямое произведение множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ на себя. С помощью функции $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \rightarrow R$, построим отображение $\mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n \rightarrow R^{mn}$, сопоставляя каждому кортежу $\langle ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau \rangle \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n$ длины $m+n$ числовую матрицу размера $m \times n$

$$(ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau) = \begin{pmatrix} (i, \alpha) & (j, \alpha) & \dots & (v, \alpha) \\ (i, \beta) & (j, \beta) & \dots & (v, \beta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (i, \tau) & (j, \tau) & \dots & (v, \tau) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

которую можно рассматривать как точку пространства R^{mn} .

Множество значений функции $\mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n \rightarrow R^{mn}$ обозначим через N .

Говорят, что на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задана бинарная физическая структура ранга (m, n) , если выполнены следующие условия:

А) Отображение $a[\beta\gamma \dots \tau]: \mathfrak{M} \rightarrow R^{n-1}$, задаваемое функцией $i \rightarrow (i, \beta\gamma \dots \tau)$, открыто для любого недиагонального кортежа $\langle \beta\gamma \dots \tau \rangle \in \mathfrak{N}^{n-1}$, где $\beta \neq \gamma \neq \dots \neq \tau$; отображение $a[jk \dots v]: \mathfrak{N} \rightarrow R^{m-1}$, задаваемое функцией $\alpha \rightarrow (jk \dots v, \alpha)$, открыто для любого недиагонального кортежа $\langle jk \dots v \rangle \in \mathfrak{M}^{m-1}$, где $j \neq k \neq \dots \neq v$.

Б) Существует аналитическая функция $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_{mn})$, определенная в области $\mathcal{E} \subset R^{mn}$, такая, что множество $M \subset \mathcal{E}$, определяемое уравнением $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_{mn}) = 0$, есть непустое связное множество.

В) Градиент Φ отличен от нуля всюду на M , за исключением, может быть, множества поверхностной меры нуль.

Г) Совокупность N всех точек $(ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau) \in R^{mn}$ образует открытое относительно M подмножество множества M , так что

$$\Phi[(ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau)] = 0 \quad (2)$$

для любого кортежа $\langle ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau \rangle \in \mathbb{M}^m \times \mathbb{N}^n$.

Теорема. Если тройка $\langle \mathbb{M}, \mathbb{N}, a: \mathbb{M} \times \mathbb{N} \rightarrow R \rangle$ образует бинарную физическую структуру ранга (m, n) , то в любых окрестностях $A\{i_0, \varepsilon\}$ и $A\{\alpha_0, \delta\}$ произвольных точек $i_0 \in \mathbb{M}$ и $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ найдутся элементы $i_1 \in A\{i_0, \varepsilon\}$ и $\alpha_1 \in A\{\alpha_0, \delta\}$, в некоторых окрестностях $P \subset A\{i_0, \varepsilon\}$ и $Q \subset A\{\alpha_0, \delta\}$ которых функция $a: P \times Q \rightarrow R$ и аналитическое множество $N_1 \subset N$ значений функции $P^m \times Q^n \rightarrow R^{mn}$ могут быть представлены в виде:

а) для $m = n = 2$

$$(i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i + \xi_\alpha),$$

$$\Psi[(i, \alpha)] - \Psi[(i, \beta)] - \Psi[(j, \alpha)] + \Psi[(j, \beta)] = 0; \quad (3)$$

б) для $m = 4, n = 2$

$$(i, \alpha) = \Psi^{-1}[(x_i \xi_\alpha^4 + \xi_\alpha^2) / (x_i + \xi_\alpha^3)],$$

$$\begin{vmatrix} \Psi[(i, \alpha)] & \Psi[(i, \beta)] & \Psi[(i, \alpha)] \times \Psi[(i, \beta)] & 1 \\ \Psi[(j, \alpha)] & \Psi[(j, \beta)] & \Psi[(j, \alpha)] \times \Psi[(j, \beta)] & 1 \\ \Psi[(k, \alpha)] & \Psi[(k, \beta)] & \Psi[(k, \alpha)] \times \Psi[(k, \beta)] & 1 \\ \Psi[(l, \alpha)] & \Psi[(l, \beta)] & \Psi[(l, \alpha)] \times \Psi[(l, \beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad (4)$$

в) для $m = n \geq 3$

$$(i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i^1 \xi_\alpha^1 + \dots + x_i^{m-2} \xi_\alpha^{m-2} + x_i^{m-1} \xi_\alpha^{m-1}),$$

$$\begin{vmatrix} \Psi[(i, \alpha)] & \Psi[(i, \beta)] & \dots & \Psi[(i, \tau)] \\ \Psi[(j, \alpha)] & \Psi[(j, \beta)] & \dots & \Psi[(j, \tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi[(v, \alpha)] & \Psi[(v, \beta)] & \dots & \Psi[(v, \tau)] \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

а также

$$(i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i^1 \xi_\alpha^1 + \dots + x_i^{m-2} \xi_\alpha^{m-2} + x_i^{m-1} + \xi_\alpha^{m-1}),$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \Psi[(i, \alpha)] & \Psi[(i, \beta)] & \dots & \Psi[(i, \tau)] \\ 1 & \Psi[(j, \alpha)] & \Psi[(j, \beta)] & \dots & \Psi[(j, \tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \Psi[(v, \alpha)] & \Psi[(v, \beta)] & \dots & \Psi[(v, \tau)] \end{vmatrix} = 0; \quad (6)$$

г) для $m = n + 1 \geq 3$

$$(i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i^1 \xi_\alpha^1 + \dots + x_i^{m-2} \xi_\alpha^{m-2} + \xi_\alpha^{m-1}),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \Psi[(i, \alpha)] & \Psi[(i, \beta)] & \dots & \Psi[(i, \tau)] \\ 1 & \Psi[(j, \alpha)] & \Psi[(j, \beta)] & \dots & \Psi[(j, \tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \Psi[(v, \alpha)] & \Psi[(v, \beta)] & \dots & \Psi[(v, \tau)] \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

где Ψ — строго монотонная, аналитическая в окрестности точки $(i_1, \alpha_1) \in R$ функция одной переменной, Ψ^{-1} — обратная функция, x_i, ξ_α — независимые параметры;

д) для $m - n \geq 2$, кроме случая $m = 4, n = 2$, бинарные физические структуры не существуют.

Заметим, что полученный результат сформулирован в локальном смысле. Возможности аналитического продолжения результата на все множество N еще не выяснены. Ограничение $m \geq n$, очевидно, несущественно. Легко переписать теорему для случая $m \leq n$. Существование решений (5), (7) предположил Ю. И. Кулаков ⁽²⁾. Решения (4) и (6) впервые были обнаружены автором ⁽³⁾.

По аналогичной схеме можно ввести тернарные физические структуры ранга (m, n, p) на трех множествах $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{Z}$. Однако предварительные исследования показывают, что тернарные структуры существуют только в простейшем случае $m = n = p = 2$, в отличие от бинарных структур, рассмотренных в данной работе. Возможно, в этом состоит причина несодержательности теории трехмерных определителей. С другой стороны, заметим, что определители (5) и (6) имеют строение определителей Кэли — Менгера и Грама.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. Г. Решетняку за многочисленные полезные замечания и обсуждения, способствовавшие более четкой формулировке исходных аксиом физической структуры.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
11 IX 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. И. Кулаков, Сиб. матем. журн., 12, № 5, 1142 (1971). ² Ю. И. Кулаков, Элементы теории физических структур, Новосибирск, 1968. ³ Г. Г. Михайличенко, Математическое дополнение к ⁽²⁾.