НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.Г.Михайличенко

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Диссертация на соискание
учёной степени кандидата
физико-математических наук
Научный руководитель
к.ф.-м.н. Ю.И.Кулаков

Новосибирск 1970

ОГЛАВЛЕНИЕ

I.ВВЕДЕНИЕ

§ I.Простейшие примеры. 4

§ 2.Принцип феноменологической симметрии. 9

П.ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

§ I.Формулировка задачи и краткая сводка результатов. 15

§ 2.Решение задачи для $m=n=2$ и $m=n+1=3$ 24

§ 3.Общие преобразования: $m \geqslant n \geqslant 2$ 35

§ 4.Продолжение: $m \geqslant 3$ 43

§ 5.Частный случай: $m > n = 2$ 63

§ 6.Общие преобразования: $m \geqslant n \geqslant 3$ 70

§ 7.Продолжение: $m \geqslant 4$ 88

§ 8.Метод индукции: $m \geqslant n \geqslant n' \geqslant 3$ 101

§ 9.Варианты: $m > n = n'$, $m = n > n' = n-1$ 121

Ш.ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Некоторые следствия и замечания. 128

Введение

§ I. Простейшие примеры.

Прежде, чем приступить к подробному обсуждению темы настоящей работы, рассмотрим несколько простейших примеров из области элементарной геометрии и физики.

Пусть i, j, k - точки эвклидовой прямой; каждой паре точек $\langle ij \rangle$ ставится в соответствие некоторое число (ij) - расстояние между этими точками. Предположим, что на прямой выделено направление и расстоянию (ij) приписывается определенный знак в зависимости от взаимного расположения точек i, j, так что $(ji) = -(ij)$. Трем произвольно выбранным точкам i, j, k будут при этом соответствовать три числа: (ij), (ik), (jk), которые удовлетворяют уравнению

$$(ij) - (ik) + (jk) = 0. \qquad \text{(B.I)}$$

Можно также сказать, что уравнение (B.I) задает связь между тремя расстояниями. Особенностью связи (B.I) является ее универсальность, то есть эта связь имеет место для любых трех точек на прямой и не зависит от их взаимного расположения.

Если же перейти к эвклидовой прямой без выделенного направления с симметричным расстоянием (ij), то универсальная связь между тремя расстояниями (ij), (ik), (jk) будет задаваться с помощью определителя Кэли - Менгера четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & [(ij)]^2 & [(ik)]^2 & 1 \\ [(ij)]^2 & 0 & [(jk)]^2 & 1 \\ [(ik)]^2 & [(jk)]^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(B.2)}$$

Рассмотрим далее эвклидовую плоскость, на которой любой паре точек $\langle ij \rangle$ ставится в соответствие симметричное расстояние (ij). Произвольно взятым четырем точкам i, j, k, ℓ будут при этом соответствовать шесть расстояний (ij), (ik), $(i\ell)$, (jk), $(j\ell)$, $(k\ell)$, связь между которыми задается с помощью определителя Кэли - Менгера пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & [(ij)]^2 & [(ik)]^2 & [(i\ell)]^2 & 1 \\ [(ij)]^2 & 0 & [(jk)]^2 & [(j\ell)]^2 & 1 \\ [(ik)]^2 & [(jk)]^2 & 0 & [(k\ell)]^2 & 1 \\ [(i\ell)]^2 & [(j\ell)]^2 & [(k\ell)]^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 . \qquad \text{(В.3)}$$

Связь (В.3) также носит универсальный характер. Если никакие три точки из четырех i, j, k, ℓ не лежат на одной прямой, то между шестью расстояниями никакой другой связи, кроме (В.3), нет.

Естественным обобщением определителей (В.2) и (В.3) является определитель Кэли - Менгера порядка $n+3$ ($n \geq 1$), с помощью которого задается связь между всеми взаимными расстояниями для $n+2$ точек в n - мерном эвклидовом пространстве. Свойства различных метрических пространств, расстояния между точками которых удовлетворяют соотношениям типа (В.2) и (В.3) подробно изучал L.M. Blumenthal [1] в своей монографии.

Перейдем теперь к рассмотрению линейных векторных пространств, в которых определено скалярное произведение, сопоставляющее каждой

паре векторов $\langle ij \rangle$ некоторое число (ij), причем имеет смысл скалярное произведение вектора i на себя: (ii) .

В одномерном пространстве любые два вектора i, j линейно зависимы, что приводит к обращению в нуль определителя Грама второго порядка:

$$\begin{vmatrix} (ii) & (ij) \\ (ji) & (jj) \end{vmatrix} = 0 . \qquad \text{(В.4)}$$

В двумерном пространстве любые три вектора i, j, k линейно зависимы, поэтому определитель Грама третьего порядка обращается в нуль.

$$\begin{vmatrix} (ii) & (ij) & (ik) \\ (ji) & (jj) & (jk) \\ (ki) & (kj) & (kk) \end{vmatrix} = 0 . \qquad \text{(В.5)}$$

Соотношения (В.4) и (В.5) представляют собой универсальные связи между всеми скалярными произведениями для любых двух и трех векторов соответственно. Обобщение на случай n -мерного линейного пространства, очевидно, не представляет затруднения. Обращение в нуль определителя Грама $n+1$ порядка является следствием линейной зависимости любых $n+1$ векторов.

Скалярное произведение (ij) есть, как известно, билинейная форма, соответствующая положительно определенной квадратичной форме. Соотношения (В.4) и (В.5), однако, будут иметь место и в том случае, когда (ij) есть произвольная билинейная форма [2] .

На эвклидовой плоскости можно рассмотреть еще одну простую

связь между площадями треугольников. Пусть каждой тройке $\langle ijk\rangle$ точек плоскости ставится в соответствие площадь (ijk) треугольника, вершинами которого являются точки i,j,k .Площади (ijk) будем приписывать знак плюс или минус в зависимости от направления обхода точек i,j,k (по часовой стрелке или против). Четырем произвольно взятым точкам i,j,k,ℓ будут при этом соответствовать четыре значения площадей (ijk) ,$(ij\ell)$,$(ik\ell)$,$(jk\ell)$, между которыми существует связь, задаваемая уравнением:

$$(ijk)-(ij\ell)+(ik\ell)-(jk\ell)=0. \qquad \text{(B.6)}$$

Связь (B.6) выражает свойство аддитивности площадей на плоскости, что легко понять из геометрических построений.

Во всех примерах , приведенных выше, точки i,j,k,ℓ принадлежали одному и тому же множеству: либо прямой и плоскости, либо линейному пространству. Ю.И.Кулаков [3] впервые обратил внимание на возможность рассматривать отношения между точками различных множеств. Следующие физические примеры могут проиллюстрировать это обстоятельство.

Пусть i,j - материальные тела, а α,β ускоряющие системы Каждой паре $\langle i,\alpha\rangle$ ставится в соответствие ускорение (i,α), которое сообщает телу i ускоряющая система α . Двум телам i,j и двум системам α,β будут при этом соответствовать четыре значения ускорения (i,α), (i,β), (j,α), (j,β) , между которыми существует связь, задаваемая уравнением:

$$\begin{vmatrix} (i,\alpha) & (i,\beta) \\ (j,\alpha) & (j,\beta) \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(B.7)}$$

Соотношение (B.7) выполняется для любых двух тел и любых двух

ускоряющих систем и в этом смысле носит универсальный характер.

Другой пример можно привести из области электродинамики постоянных токов. Пусть i,j,k - проводники, а α,β - источники тока. Каждой паре $\langle i,\alpha\rangle$ ставится в соответствие величина (i,α), обратная току, текущему в цепи, состоящей из проводника i и источника α. Трем проводникам i,j,k и двум источникам тока α,β будут при этом соответствовать шесть значений величины, обратной току: (i,α), $(i,\beta),(j,\alpha),(j,\beta),(k,\alpha),(k,\beta)$, между которыми существует связь, задаваемая уравнением:

$$\begin{vmatrix} (i,\alpha) & (i,\beta) & 1 \\ (j,\alpha) & (j,\beta) & 1 \\ (k,\alpha) & (k,\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad \text{(B.8)}$$

Соотношение (B.8) выполняется для любых трех проводников и любых двух источников тока.

Заметим, что если в первом примере (B.7) из каждого множества бралось равное число элементов, то во втором примере эти числа были разными (три и два). Здесь сразу же обнаруживаются новые возможности обобщения соотношений (B.7) и (B.8), отличные от схем обобщения определителей Кэли - Менгера (B.3) и Грама (B.5) при переходе к пространствам большей размерности.

§ 2.Принцип феноменологической симметрии.

Все примеры, рассмотренные в первом параграфе вступления, достаточно элементарны и взятые сами по себе не представляют особого математического интереса.

Одно из основных предположений Ю.И.Кулакова [3] состоит в том, что выражения для связей являются следствием универсальности этих связей в том смысле, что соотношения (В.I)-(В.8) должны иметь место для любых наборов элементов (точек прямой, плоскости, материальных тел, проводников и т.д.).Требование универсальности связей составляет содержание принципа феноменологической симметрии [3] .

Сформулируем некоторые простейшие задачи, руководствуясь принципом феноменологической симметрии. Предположим , что между тремя расстояниями (ij) , (ik) , (jk) для трех точек на прямой существует какая-то связь.

$$\varphi[(ij),(ik),(jk)] = 0 , \qquad \text{(В.9)}$$

которая имеет универсальный характер. Задача заключается в нахождении всех возможных типов связи (В.9).При некоторых дополнительных условиях на свойства функции φ (однозначная разрешимость,дифференцируемость и т.д.) эта задача приводится к простому функциональному уравнению

$$f(x,y) = f[f(z,x), f(z,y)] .$$

Наиболее общее решение задачи (В.9) имеет вид [4] :

$$\psi[(ij)] - \psi[(ik)] + \psi[(jk)] = 0 , \qquad \text{(В.IO)}$$

где $\psi(x)$ некоторая строго монотонная функция одной переменной. Сравнивая результат (В.IO) и соотношение (В.I), замечаем, что для их

совпадения достаточно положить $\psi(x) = x$. Таким образом, принцип феноменологической симметрии приводит к более широкому классу связей.

Для плоскости задача формулируется следующим образом. Пусть между шестью взаимными расстояниями для четырех точек i, j, k, ℓ существует связь:

$$\varphi[(ij),(ik),(i\ell),(jk),(j\ell),(k\ell)] = 0. \qquad \text{(В.II)}$$

Требуется найти все возможные виды связей (В.II).Очевидно, что соотношение (В.3) является одним из решений поставленной задачи,однако, наиболее общий вид связи (В.II) еще не найден.

Формулировка задач, соответствующих соотношениям (В.4) и (В.5) также не представляет затруднения. Требуется найти все возможные вид связей

$$\varphi[(ii),(jj),(ij),(ji)] = 0, \qquad \text{(В.I2)}$$

$$\varphi[(ii),(jj),(kk),(ij),(ji),(ik),(ki),(jk),(kj)] = 0, \qquad \text{(В.I3)}$$

которые обладают тем свойством, что выполняются для любых двух или трех точек,т.е. свойством универсальности.

При некоторых дополнительных условиях решена также задача, соответствующая соотношению (В.6) [4] . Предполагая существование связи между значениями четырех площадей треугольников

$$\varphi[(ijk),(ij\ell),(ik\ell),(jk\ell)] = 0, \qquad \text{(В.I4)}$$

удовлетворяющей принципу феноменологической симметрии, приходим к

обычному функциональному уравнению

$$f(x,y,z) = f[f(s,t,x), f(s,u,y), f(t,u,z)].$$

Наиболее общий вид связи (В.I4) задается соотношением

$$\psi[(ijk)] - \psi[(ij\ell)] + \psi[(ik\ell)] - \psi[(jk\ell)] = 0, \qquad (B.I5)$$

в котором монотонная функция $\psi(x)$ выступает как градуировка шкалы измерений. Соотношение (В.6) является частным случаем наиболее общей связи (В.I5).

Задачи, сформулированные для отношений между элементами одного множества, решены только в самых простых случаях. Иная ситуация возникает при переходе к изучению связей и отношений между элементами различных множеств. В этом случае наиболее полно разработана методика решения, предложенная автором в работе [4], и получены результаты не только для простейших вариантов, но и для самой общей постановки.

Для частного соотношения (В.7) задача формулируется следующим образом. Предположим, что между четырьмя значениями ускорений, соответствующих двум телам i,j и двум ускоряющим системам α,β, существует некоторая связь

$$\Phi[(i,\alpha),(i,\beta),(j,\alpha),(j,\beta)] = 0, \qquad (B.I6)$$

удовлетворяющая принципу феноменологической симметрии. Нужно найти наиболее общий вид связи (В.I6).

Эта задача была решена Ю.И.Кулаковым [5] с помощью введенного им метода параметризации. Доказано, что самый общий вид связи (В.I6) задается соотношением

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] \end{vmatrix} = 0, \qquad (B.I7)$$

причем остается,как и раньше, произвол в выборе функции $\psi(x)$. Соотношение (В.7) для классической механики является частным случаем связи типа (В.I7).

Задача (В.I6) решена автором и другим методом. Принцип феноменологической симметрии приводит к функциональному уравнению

$$f(x,y,z) = f[f(x,y,s),s,z],$$

которое может быть решено достаточно простыми методами .

И, наконец, сформулируем задачу, соответствующую соотношению (В.8). Необходимо найти наиболее общий вид связи

$$\varphi[(i,\alpha),(i,\beta),(j,\alpha),(j,\beta),(k,\alpha),(k,\beta)] = 0 \qquad (В.I8)$$

между значениями шести обратных токов, обладающей свойством универсальности,то есть имеющей место для любых трех проводников и любых двух источников тока.

Эта задача решена автором [4] , [7] с использованием метода параметризации, предложенного Ю.И.Кулаковым [5] .Показано, что наиболее общий вид связи (В.I8) задается соотношением,

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & 1 \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & 1 \\ \psi[(k,\alpha)] & \psi[(k,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (В.I9)$$

причем попрежнему остается произвол в выборе функции $\psi(x)$. Замечаем, что соотношение (В.8) является частным случаем связи (В.I9)

Задачи (В.I6) и (В.I8) допускают естественное обобщение,которое было предложено Ю.И.Кулаковым [5] . В общих чертах формулировка задачи будет следующей.Имеются два различных множества $\mathcal{M} = \{i,j,k,\ldots,v,\ldots\}$, $\mathcal{N} = \{\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\varkappa,\ldots\}$ произвольной природы. На

прямом произведении этих множеств $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ задана числовая функция, ставящая в соответствие каждой паре $\langle i, \alpha \rangle \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ некоторое число $(i, \alpha) \in R$. При этом кортежу $\langle ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau \rangle \in$ $\in \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n$,где m , n целые числа, будет соответствовать числовая матрица $\|(ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau)\|$ размерности $m \times n$. Необходимо найти наиболее общий вид связи

$$\Phi[(ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau)] = 0 \qquad \text{(B.20)}$$

между компонентами этой матрицы, удовлетворяющей принципу феноменологической симметрии,то есть имеющей место для любых кортежей $\langle ijk \ldots v \rangle \in \mathcal{M}^m$ и $\langle \alpha\beta\gamma \ldots \tau \rangle \in \mathcal{N}^n$ длины m и n соответственно .

Основным содержанием настоящей работы является разработка методов решения задачи (B.20) для произвольных значений целых чисел m и n .Более точная формулировка задачи (B.20) будет дана в первом параграфе основной части.

В заключение выражаю благодарность моему руководителю Ю.И.Кулакову за постановку задачи и многочисленные дискуссии по теме настоящей работы.

Основная часть

§ I. Формулировка задачи и краткая сводка результатов .

Ю.И. Кулаковым в работе [5] была предложена математическая модель феноменологической симметрии, названная физической структурой. Эта модель приводит к особым функциональным уравнениям с двухиндексными переменными, методы решения которых рассматриваются в данной работе.

Имеются два множества произвольной природы $\mathcal{M}=\{i,j,k,\dots,v,g,\dots\}$ и $\mathcal{N}=\{\alpha,\beta,\gamma,\dots,\tau,\rho,\dots\}$, а также некоторая функция $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_{mn})$, определенная в R^{mn} , где $m\geqslant n\geqslant 2$ целые числа. Пусть на прямом произведении этих множеств задана числовая функция $\mathcal{M}\times\mathcal{N}\to R$, ставящая в соответствие каждой паре $\langle i,\alpha\rangle\in\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ действительное число $(i,\alpha)\in R$.При этом кортежу $\langle ijk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle\in\mathcal{M}^m\times\mathcal{N}^n$ длины $m+n$ будет соответствовать числовая матрица размера $m\times n$

$$\left\|\begin{array}{ccccc}(i,\alpha) & (i,\beta) & (i,\gamma) & \dots & (i,\tau)\\ (j,\alpha) & (j,\beta) & (j,\gamma) & \dots & (j,\tau)\\ (k,\alpha) & (k,\beta) & (k,\gamma) & \dots & (k,\tau)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ (v,\alpha) & (v,\beta) & (v,\gamma) & \dots & (v,\tau)\end{array}\right\| . \qquad \text{(I.I)}$$

Матрицу (I.I.) можно рассматривать как точку mn-мерного арифметического пространства R^{mn} [5]. Преобразования R^{mn}, соответствующие перестановкам строк и столбцов матрицы (I.I), называются каноническими перестановками R^{mn} . Точка R^{mn} , полученная из данной с помощью некоторой канонической перестановки , называет-

ся канонически сопряженной к данной.

Матрицу (I.I) в целях сокращения записи будем выписывать в одну строчку: $\|(ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau)\|$.

Введем основные условия, которым удовлетворяют множества $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ и функции $\mathcal{M}\times\mathcal{N}\to R$, $\varphi: R^{mn}\to R$:

I. для любого фиксированного набора различных элементов $\langle jk\dots v\rangle \in \mathcal{M}^{m-1}$ ($\langle\beta\gamma\dots\tau\rangle\in\mathcal{N}^{n-1}$) объединение $U_{\alpha\in\mathcal{N}}(jk\dots v,\alpha)$ ($U_{i\in\mathcal{M}}(i,\beta\gamma\dots\tau)$) образует открытое множество в $R^{m-1}(R^{n-1})$;

2. существуют такие два подмножества $\{i_0,j_0,k_0,\dots,v_0,g_0\}\subset\mathcal{M}$ и $\{\alpha_0,\beta_0,\gamma_0,\dots,\tau_0,\rho_0\}\subset\mathcal{N}$, содержащие $m+1$ и $n+1$ элементов соответственно, что в числовой матрице размера $(m+1)\times(n+1)$

$$\|(i_0j_0k_0\dots v_0g_0, \alpha_0\beta_0\gamma_0\dots\tau_0\rho_0)\| \qquad (1.2)$$

все компоненты различны;

3. для любой матрицы (I.I.)

$$\varphi[(ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau)] = 0; \qquad (I.3)$$

4. Функция φ от mn переменных достаточно гладкая и имеет не равнУю нулю производную по первому аргументу во всех $(m+1)!(n+1)!$ точках R^{mn}, канонически сопряженных к точкам, задаваемым произвольной подматрицей размера $m\times n$ матрицы (I.2).

Третье условие составляет основное содержание принципа феноменологической симметрии. Связь (I.3) универсальна в том смысле, что выполняется для любой матрицы (I.I.) .Это означает, что в уравнении (I.3) можно свободно переставлять элементы из одного множества и заменять один элемент на другой.

Из первого условия следует, что элементы множества $\mathcal{N}(\mathcal{M})$ могут быть заданы (возможно, неоднозначно) с помощью, по крайней мере, $m-1$ (или $n-1$) независимых и существенных параметров. Обращаясь к примерам (В.7)и (В.8) ,рассмотренным в первом параграфе вступления, замечаем , что материальные тела характеризуются одним параметром - массой, ускоряющие системы силой, проводники - сопро -

тивлением, а источники тока двумя параметрами - электродвижущей силой и внутренним сопротивлением. С другой стороны, примеры (В.7) и (В.8) входят в схему феноменологической симметрии с $m = n = 2$ и $m = n+1 = 3$, соответственно.

Второе и четвертое условие в значительной степени носят технический характер, позволяя применять теорему о неявных функциях.

Уравнение (I.3) в соответствии с четвертым условием можно представить в виде, однозначно разрешенном относительно (i,α):

$$(i,\alpha) = \Gamma[(jk\ldots v,\beta\gamma\ldots\varkappa),(i,\beta\gamma\ldots\varkappa),(jk\ldots v,\alpha)] \qquad (I.4)$$

в окрестности всех канонически сопряженных точек, где выполняется четвертое условие. Функция Γ от $mn-1$ переменных также будет достаточно гладкой. Связь (I.4) удовлетворяет принципу феноменологической симметрии только в некоторой окрестности сопряженных точек.

Легко можно показать, что в некоторой окрестности сопряженных точек все первые частные производные функций φ и Γ не равны нулю. Переставим в уравнении (I.4.) элементы α,β:

$$(i,\beta) = \Gamma[(jk\ldots v,\alpha\gamma\ldots\varkappa),(i,\alpha\gamma\ldots\varkappa),(jk\ldots v,\beta)] \qquad (I.4')$$

и продифференцируем уравнение (I.3) по переменной (i,α), рассматривая (i,β) как функцию (i,α), задаваемую соотношением (I.4'):

$$\varphi_{(i,\alpha)}[(ijk\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa)] + \varphi_{(i,\beta)}[(ijk\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\varkappa)]\times$$

$$\times\,\Gamma_{(i,\alpha)}[(jk\ldots v,\alpha\gamma\ldots\varkappa),(i,\alpha\gamma\ldots\varkappa),(jk\ldots v,\beta)] = 0.$$

Поскольку $\varphi_{(i,\alpha)} \neq 0$ в соответствии с четвертым условием во всех канонически сопряженных точках, а следовательно и в некоторой их окрестности, то отлично от нуля произведение $\varphi_{(i,\beta)} \times \Gamma_{(i,\alpha)}$.С другой стороны , функции φ и Γ достаточно гладкие ,то есть $\varphi_{(i,\beta)} \neq \infty$, $\Gamma_{(i,\alpha)} \neq \infty$,и потому необходимо должно быть $\varphi_{(i,\beta)} \neq 0$, $\Gamma_{(i,\alpha)} \neq 0$, Аналогично можно показать, что не равны нулю производные первого порядка и по всем другим переменным.

Предположим, что кроме функции φ существует еще одна функция φ_1 , удовлетворяющая четвертому условию, и такая, что

$$\varphi_1 [(ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)] = 0 \qquad (1.3')$$

или в виде, разрешенном относительно

$$(i,\alpha) = \Gamma_1 [(jk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau), (i, \beta\gamma\ldots\tau), (jk\ldots v, \alpha)] .$$

Сравнивая этот результат с соотношением (I.4) получаем тождество

$$\Gamma_1 [(jk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau), (i, \beta\gamma\ldots\tau), (jk\ldots v, \alpha)] \equiv$$

$$\equiv \Gamma [(jk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau), (i, \beta\gamma\ldots\tau), (jk\ldots v, \alpha)] ,$$

поскольку из первого условия следует независимость переменных $(jk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau)$, $(i, \beta\gamma\ldots\tau)$, $(jk\ldots v, \alpha)$.

Таким образом, уравнения (I.3) и (I.3') эквивалентны в том смысле, что они определяют одну и ту же связь между компонентами матрицы (I.I). Эта связь задается однозначно соотношением (I.4). В частности, если в уравнении (I.3) переставлять элементы из одного множества, то все $m!\,n!$ полученных при этом новых уравнений должны быть эквивалентны.

Основная задача состоит в том, чтобы найти все возможные формы

связи (I.3) в пределах эквивалентности.

Предлагаемый метод позволяет найти функцию Γ , а следовательно и φ с точностью до эквивалентности , в некоторой окрестности сопряженных точек, где выполняется четвертое условие.

Легко убедиться в том, что не всякая функция φ является решением поставленной задачи.Следующий простой пример убеждает нас в этом. Предположим, что для $m = n = 2$ связь между компонентами матрицы $\|(ij,\alpha\beta)\|$ задается соотношением

$$(i,\alpha) + (i,\beta) + (j,\alpha) + (j,\beta) = 0,$$

удовлетворяющим принципу феноменологической симметрии. В этом случае можно выписать еще два соотношения

$$(i,\alpha) + (i,\beta) + (k,\alpha) + (k,\beta) = 0,$$

$$(j,\alpha) + (j,\beta) + (k,\alpha) + (k,\beta) = 0,$$

откуда следует дополнительная связь

$$(i,\alpha) + (i,\beta) - (j,\alpha) - (j,\beta) = 0$$

между компонентами матрицы $\|(ij,\alpha\beta)\|$.Существование же двух связей приводит в данном случае к вырождению: $(i,\alpha) = -(i,\beta)$,что противоречит первому условию.

Универсальную связь(I.3) ,таким образом, можно рассматривать как особое функциональное уравнение, для которого существенен двухиндексный характер переменных в связи с возможностью переставлять индексы.Основной метод решения состоит в сведении специального функционального уравнения (I.3) с двухиндексными переменными к обычным функциональным и функционально-дифференциальным уравнениям. При ре-

шении последних широко используется методика Эйзенхарта [8] , применяемая им для исследования непрерывных групп преобразований, а также Я.Ацелем [9] при решении простых функциональных уравнений. Методика эта состоит во временном фиксированнии некоторых независимых переменных.

Приведем краткую сводку результатов. В случае $m = n = 2$ уравнение $\Phi[(ij,\alpha\beta)]$ имеет единственное решение

$$\Psi[(i,\alpha)] - \Psi[(i,\beta)] - \Psi[(j,\alpha)] + \Psi[(j,\beta)] = 0 , \qquad (I.5)$$

где $\Psi(x)$ некоторая достаточно гладкая функция одной переменной, имеющая отличную от нуля первую производную $\Psi'(x)$. Есть очень своеобразное единственное решение уравнения $\Phi[(ijk\ell,\alpha\beta)]$ для случая $m = n+2 = 4$:

$$\begin{vmatrix} \Psi[(i,\alpha)] & \Psi[(i,\beta)] & \Psi[(i,\alpha)]\,\Psi[(i,\beta)] & 1 \\ \Psi[(j,\alpha)] & \Psi[(j,\beta)] & \Psi[(j,\alpha)]\,\Psi[(j,\beta)] & 1 \\ \Psi[(k,\alpha)] & \Psi[(k,\beta)] & \Psi[(k,\alpha)]\,\Psi[(k,\beta)] & 1 \\ \Psi[(\ell,\alpha)] & \Psi[(\ell,\beta)] & \Psi[(\ell,\alpha)]\,\Psi[(\ell,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (I.6)$$

В случае $m = n+1 \geq 3$ функциональное уравнение $\Phi[(ijk\ldots v,\alpha\beta\ldots\tau)] = 0$ также имеет всего одно решение:

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & \dots & \psi[(i,\varkappa)] & 1 \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & \dots & \psi[(j,\varkappa)] & 1 \\ \psi[(k,\alpha)] & \psi[(k,\beta)] & \dots & \psi[(k,\varkappa)] & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi[(v,\alpha)] & \psi[(v,\beta)] & \dots & \psi[(v,\varkappa)] & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (I.7)$$

в то время как уравнение $\Phi[(ijk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\varkappa)]=0$ для $m=n\geqslant 3$ имеет два решения, не сводимых друг к другу никаким преобразованием Первое из этих решений записывается в виде определителя, внешнее строение которого совпадает со строением определителя Кейли-Менгера $n+1$ порядка:

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & \psi[(i,\gamma)] & \dots & \psi[(i,\varkappa)] & 1 \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & \psi[(j,\gamma)] & \dots & \psi[(j,\varkappa)] & 1 \\ \psi[(k,\alpha)] & \psi[(k,\beta)] & \psi[(k,\gamma)] & \dots & \psi[(k,\varkappa)] & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi[(v,\alpha)] & \psi[(v,\beta)] & \psi[(v,\gamma)] & \dots & \psi[(v,\varkappa)] & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (I.8)$$

Второе же решение имеет внешнее строение определителя Грама порядка n :

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & \psi[(i,\gamma)] & \dots & \psi[(i,\tau)] \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & \psi[(j,\gamma)] & \dots & \psi[(j,\tau)] \\ \psi[(k,\alpha)] & \psi[(k,\beta)] & \psi[(k,\gamma)] & \dots & \psi[(k,\tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi[(v,\alpha)] & \psi[(v,\beta)] & \psi[(v,\gamma)] & \dots & \psi[(v,\tau)] \end{vmatrix} = 0. \quad (I.9)$$

Для всех других возможных пар значений целых чисел m и n , то есть для $m \geqslant n+3 = 5$ и $m \geqslant n+2 \geqslant 5$ функциональное уравнение (I.3) решения не имеет.Это означает, что для $m \geqslant n+3 = 5$ и $m \geqslant n+2 \geqslant 5$ условия задачи оказываются несовместными. Действительно,как показывает дальнейшее изложение, требование существования универсальной связи для любой матрицы переменных размерности $m \times n$ приводит в последнем случае к наличию связи также и между компонентами некоторых подматриц данной матрицы, что, очевидно, противоречит первому условию задачи.

Заметим, что все имеющиеся решения (I.5) -(I.9) уравнения (I.3) обладают свойством антисимметрии по перестановкам индексов из одного набора. Введем оператор альтернирования R , действие которого состоит в антисимметризации выражений , стоящих справа от оператора:

$$R(ij)\,\psi[(i,\alpha)] = \psi[(i,\alpha)] - \psi[(j,\alpha)] .$$

Решения (I.5) - (I.9), соответственно, можно записать более кратко,

используя введенный оператор альтернирования :

$$R(ij)\,R(\alpha\beta)\;\Psi[(i,\alpha)]=0, \tag{I.5}$$

$$R(ijkl)\,R(\alpha\beta)\;\Psi[(i,\alpha)]\;\Psi[(j,\beta)]\;\Psi[(k,\alpha)]\;\Psi[(k,\beta)]=0, \tag{I.6}$$

$$R(ijk\ldots v)\,R(\alpha\beta\ldots x)\;\Psi[(j,\alpha)]\;\Psi[(k,\beta)]\ldots\Psi[(v,x)]=0, \tag{I.7}$$

$$R(ijk\ldots v)\,R(\alpha\beta\gamma\ldots x)\;\Psi[(j,\beta)]\;\Psi[(k,\gamma)]\ldots\Psi[(v,x)]=0, \tag{I.8}$$

$$R(ijk\ldots v)\,R(\alpha\beta\gamma\ldots x)\;\Psi[(i,\alpha)]\;\Psi[(j,\beta)]\;\Psi[(k,\gamma)]\ldots\Psi[(v,x)]=0. \tag{I.9}$$

Приведенные результаты были доложены автором на конференции по алгебре, математической логике и вычислительной математике, проходившей в г.Иванове (июнь, 1970).Опубликованы тезисы доклада [6] .

§ 2. Решение задачи для $m=n=2$ и $m=n+1=3$.

Прежде всего рассмотрим в отдельном параграфе наиболее простые задачи (В.I6) и (В.I8), представляющие частный случай общей задачи (I.3.) для $m=n=2$ и $m=n+1=3$.

Итак, предположим, что между компонентами любой матрицы существует связь, задаваемая уравнением (В.I6)

$$\Phi[(ij,\alpha\beta)]=0\,, \tag{2.I}$$

и что выполнены все четыре условия, сформулированные в первом параграфе.

Уравнение (2.I) разрешим в окрестности канонически сопряженных точек относительно переменной (i,α) :

$$(i,\alpha)=\Gamma[(j,\beta),(i,\beta),(j,\alpha)]\,. \tag{2.2.}$$

Запишем уравнение (2.2.) для $\langle ki,\alpha\beta\rangle$, $\langle kj,\alpha\beta\rangle\in\mathcal{M}^2\times\mathcal{M}^2$:

$$(k,\alpha)=\Gamma[(i,\beta),(k,\beta),(i,\alpha)]\,,$$

$$(k,\alpha)=\Gamma[(j,\beta),(k,\beta),(j,\alpha)]\,.$$

Приравняем правые части выписанных выражений

$$\Gamma[(i,\beta),(k,\beta),(i,\alpha)]=\Gamma[(j,\beta),(k,\beta),(j,\alpha)]\,.$$

Согласно первому условию можно положить $(k,\beta)=a$, не налагая никаких дополнительных ограничений на выбор элемента $\beta\in\mathcal{M}$. Вводя также новое обозначение

$$\Omega[(i,\alpha\beta)]=\Gamma[(i,\beta),(k,\beta),(i,\alpha)]\,|_{(k,\beta)=a}\,,$$

получаем уравнение

$$\Omega[(i,\alpha\beta)] = \Omega[(j,\alpha\beta)] . \qquad (2.3)$$

Совершенно аналогично, используя третий элемент $\gamma \in \mathcal{N}$, можно получить другое уравнение

$$\Xi[(ij,\alpha)] = \Xi[(ij,\beta)] . \qquad (2.4)$$

Разрешим уравнения (2.3) и (2.4) относительно переменной :

$$(i,\alpha) = \chi\{\Omega[(j,\alpha\beta)], (i,\beta)\}, \qquad (2.5)$$

$$(i,\alpha) = \chi_1\{\Xi[(ij,\beta)], (j,\alpha)\}, \qquad (2.6)$$

откуда приходим к обычному функциональному уравнению

$$\chi\{\Omega[(j,\alpha\beta)], (i,\beta)\} = \chi_1\{\Xi[(ij,\beta)], (j,\alpha)\} \qquad (2.7)$$

Продифференцируем уравнение (2.7) по переменным (j,β) и (i,β) и разделим один результат на другой:

$$\chi_\lambda\{\Omega[(j,\alpha\beta)], (i,\beta)\}\,\Omega_{(j,\beta)}[(j,\alpha\beta)] =$$

$$= \chi_{(i,\beta)}\{\Omega[(j,\alpha\beta)], (i,\beta)\}\,\Xi_{(j,\beta)}[(ij,\beta)] / \Xi_{(i,\beta)}[(ij,\beta)] , \qquad (2.8)$$

где χ_λ частная производная функции χ по первому аргументу.

Вводим новую переменную

$$\lambda = \Omega[(j,\alpha\beta)] , \qquad (2.9)$$

откуда, в соответствии с выражением (2.5)

$$(j,\alpha) = \chi[\lambda, (j,\beta)] .$$

Подставляя обозначение (2,9) и (2.I0) в равенство (2.8) и полагая

$(j,\beta) = b$, получаем однородное уравнение в частных производных для функции $\chi[\lambda,(i,\beta)]$:

$$\chi_\lambda[\lambda,(i,\beta)]A_1(\lambda) + \chi_{(i,\beta)}[\lambda,(i,\beta)]B_1[(i,\beta)] = 0,$$

которое может быть проинтегрировано методом характеристик :

$$\chi[\lambda,(i,\beta)] = \chi_2\{A(\lambda) + B[(i,\beta)]\}. \qquad (2.11)$$

Подставим решение (2.11) в уравнение (2.5):

$$(i,\alpha) = \chi_2\{\Omega_1[(j,\alpha\beta)] + B[(i,\beta)]\},$$

где $\Omega_1[(j,\alpha\beta)] = A\{\Omega[(j,\alpha\beta)]\}$, и разрешим результат относительно суммы $\Omega_1 + B$:

$$\Omega_1[(j,\alpha\beta)] = -B[(i,\beta)] + \Psi[(i,\alpha)]. \qquad (2.12)$$

Запишем уравнение (2.12) для $\langle ik,\alpha\beta\rangle$, $\langle jk,\alpha\beta\rangle \in \mathcal{M}^2 \times \mathcal{M}^2$:

$$\Omega_1[(k,\alpha\beta)] = -B[(i,\beta)] + \Psi[(i,\alpha)],$$

$$\Omega_1[(k,\alpha\beta)] = -B[(j,\beta)] + \Psi[(j,\alpha)],$$

откуда следует

$$\Psi[(i,\alpha)] - \Psi[(j,\alpha)] = B[(i,\beta)] - B[(j,\beta)]. \qquad (2.13)$$

Если теперь результат (2.13) записать для $\langle ij,\alpha\gamma\rangle$, $\langle ij,\beta\gamma\rangle \in \mathcal{M}^2 \times \mathcal{M}^2$, то легко приходим к уравнению

$$\Psi[(i,\alpha)] - \Psi[(j,\alpha)] - \Psi[(i,\beta)] + \Psi[(j,\beta)] = 0. \qquad (2.14)$$

Связь (2.14) и представляет решение функционального уравнения (2.1). Функция $\Psi(x)$ достаточно гладкая и должна иметь отличную от нуля производную по крайней мере в девяти точках, задаваемых компонентами матрицы $\|(i_0 j_0 k_0, \alpha_0 \beta_0 \gamma_0)\|$. Задача решена, таким образом,

только локально.

Решение (2.I4) имеет аддитивный характер.Переход к мультипликативной форме (В.I7) можно совершить посредством потенциирования.

Решение (2.I4) единственно в смысле эквивалентности. это означает, что любая связь, задаваемая уравнением (2.I) и удовлетворяющая принципу феноменологической симметрии, может быть приведена к виду (2.I4). Схема решения уравнения (2.I) дает алгоритм такого приведения.

Перейдем теперь к решению уравнения

$$\Phi[(ijk,\alpha\beta)]=0 \qquad (2.I5)$$

для случая $m=n+1=3$. Предположим, что для этого частного случая выполнены все четыре условия, сформулированные в первом параграфе основной части.

Уравнение (2.I5) в окрестности канонически сопряженных точек в соответствии с четвертым условием можно однозначно разрешить относительно переменной (i,α) :

$$(i,\alpha)=\Gamma[(jk,\beta),(i,\beta),(jk,\alpha)]. \qquad (2.I4)$$

Заметим, что функции Φ и Γ имеют отличные от нуля частные производные первого порядка по всем аргументам в некоторой окрестности сопряженных точек.

Запишем уравнение (2.I4) для $<lik,\alpha\beta>$, $<ljk,\alpha\beta>$:

$$(l,\alpha)=\Gamma[(ik,\beta),(l,\beta),(ik,\alpha)],$$

$$(l,\alpha)=\Gamma[(jk,\beta),(l,\beta),(jk,\alpha)].$$

Приравняем правые части выписанных выражений:

$$\Gamma[(ik,\beta),(\ell,\beta),(ik,\alpha)] = \Gamma[(jk,\beta),(\ell,\beta),(jk,\alpha)] .$$

Согласно первому условию можно положить $(\ell,\beta) = a$, не налагая никаких дополнительных ограничений на выбор элемента $\beta \in \mathcal{N}$.Вводя также новое обозначение

$$\Omega[(ik,\alpha\beta)] = \Gamma[(ik,\beta),(\ell,\beta),(ik,\alpha)]\big|_{(\ell,\beta)=a} ,$$

получаем уравнение

$$\Omega[(ik,\alpha\beta)] = \Omega[(jk,\alpha\beta)] . \qquad (2.15)$$

Легко убедиться в том, что уравнение (2.15) удовлетворяет третьему и четвертому условию .Кроме того, функция Ω не имеет особенностей.

Далее запишем уравнение (2.14) для $\langle ijk,\gamma\alpha\rangle, \langle ijk,\gamma\beta\rangle$:

$$(i,\gamma) = \Gamma[(jk,\alpha),(i,\alpha),(jk,\gamma)] ,$$

$$(i,\gamma) = \Gamma[(jk,\beta),(i,\beta),(jk,\gamma)] .$$

Приравняем правые части выписанных выражений :

$$\Gamma[(jk,\alpha),(i,\alpha),(jk,\gamma)] = \Gamma[(jk,\beta),(i,\beta),(jk,\gamma)] .$$

Согласно первому условию можно положить $(jk,\gamma) = (b_1, b_2)$, не налагая никаких дополнительных ограничений на выбор элементов $j,k \in \mathcal{N}$. . Вводя также новое обозначение

$$\Xi[(ijk,\alpha)] = \Gamma[(jk,\alpha),(i,\alpha),(jk,\gamma)]\big|_{(jk,\gamma)=(b_1,b_2)} ,$$

получаем уравнение

$$\Xi[(ijk,\alpha)] = \Xi[(ijk,\beta)], \tag{2.I6}$$

которое также удовлетворяет третьему и четвертому условию.

Разрешим уравнения (2.I5) и (2.I6) относительно переменной (i,α):

$$(i,\alpha) = \chi\{\Omega[(jk,\alpha\beta)], (k,\alpha\beta), (i,\beta)\}, \tag{2.I7}$$

$$(i,\alpha) = \chi_1\{\Xi[(ijk,\beta)], (jk,\alpha)\}, \tag{2.I8}$$

откуда получаем обычное функциональное уравнение

$$\chi\{\Omega[(jk,\alpha\beta)], (k,\alpha\beta), (i,\beta)\} = \chi_1\{\Xi[(ijk,\beta)], (jk,\alpha)\}, \tag{2.I9}$$

поскольку все переменные, входящие в равенство (2.I9), в соответствии с первым условием ,независимы:

Продифференцируем уравнение (2.I9) по переменным (j,β) и (i,β) и разделим один результат на другой

$$\chi_\lambda\{\Omega[(jk,\alpha\beta), (k,\alpha\beta), (i,\beta)\}\Omega_{(j,\beta)}[(jk,\alpha\beta)] =$$

$$= \chi_{(i,\beta)}\{\Omega[(jk,\alpha\beta)], (k,\alpha\beta), (i,\beta)\}\Xi_{(j,\beta)}[(ijk,\beta)] / \Xi_{(i,\beta)}[(ijk,\beta)], \tag{2.20}$$

где χ_λ частная производная функции χ по первому аргументу.

Введем новую переменную

$$\lambda = \Omega[(jk,\alpha\beta)], \tag{2.2I}$$

откуда, в соответствии с выражением (2.I7) ,

$$(j,\alpha) = \chi[\lambda, (k,\alpha\beta), (j,\beta)]. \qquad (2.22)$$

Подставляя обозначения (2.2I), (2.22) в равенство (2.20) и полагая $(j,\beta) = b$, получаем однородное уравнение в частных производных для функции $\chi[\lambda,(k,\alpha\beta),(i,\beta)]$:

$$\chi_\lambda[\lambda,(k,\alpha\beta),(i,\beta)]\, A_1[\lambda,(k,\alpha\beta)] +$$

$$+\chi_{(i,\beta)}[\lambda,(k,\alpha\beta),(i,\beta)]\, B_1[(ik,\beta)] = 0,$$

решение которого может быть найдено методом характеристик:

$$\chi[\lambda,(k,\alpha\beta),(i,\beta)] =$$

$$= \chi_2\{A[\lambda,(k,\alpha\beta)] + B[(ik,\beta)],(k,\alpha\beta)\}, \qquad (2.23)$$

где χ_2 некоторая функция трех переменных. Подставим решение (2.23) в уравнение (2.I7):

$$(i,\alpha) = \chi_2\{\Omega_1[(jk,\alpha\beta)] + B[(ik,\beta)],(k,\alpha\beta)\},$$

где $\Omega_1[(jk,\alpha\beta)] = A\{\Omega[(jk,\alpha\beta)],(k,\alpha\beta)\}$, и разрешим результат подстановки относительно суммы $\Omega_1 + B$:

$$\Omega_1[(jk,\alpha\beta)] = -B[(ik,\beta)] + \Theta_1[(ik,\alpha),(k,\beta)]. \qquad (2.24)$$

Запишем уравнение (2.24) для $\langle i\ell k,\alpha\beta\rangle$, $\langle j\ell k,\alpha\beta\rangle$:

$$\Omega_1[(\ell k,\alpha\beta)] = -B[(ik,\beta)] + \Theta_1[(ik,\alpha),(k,\beta)],$$

$$\Omega_1[(\ell k,\alpha\beta)] = -B[(jk,\beta)] + \Theta_1[(jk,\alpha),(k,\beta)]$$

откуда следует

$$B[(ik,\beta)] - B[(jk,\beta)] =$$

$$= \Theta_1[(ik,\alpha),(k,\beta)] - \Theta_1[(jk,\alpha),(k,\beta)] . \qquad (2.25)$$

Если теперь результат (2.25) записать для $\langle ijk,\alpha\gamma\rangle$, $\langle ijk,\beta\gamma\rangle \in \mathcal{M}^3 \times \mathcal{M}^2$, то легко приходим к уравнению

$$\Theta_1[(ik,\alpha),(k,\gamma)] - \Theta_1[(jk,\alpha),(k,\gamma)] =$$

$$= \Theta_1[(ik,\beta),(k,\gamma)] - \Theta_1[(jk,\beta),(k,\gamma)] .$$

Полагая , наконец , $(k,\gamma) = a_1$ и вводя новое обозначение

$$\Theta[(ik,\alpha)] = \Theta_1[(ik,\alpha),(k,\gamma)]\big|_{(k,\gamma)=a_1} ,$$

получаем следствие эквивалентности уравнений (2.I5) и (2.I6) :

$$\Theta[(ik,\alpha)] - \Theta[(jk,\alpha)] = \Theta[(ik,\beta)] - \Theta[(jk,\beta)] . \qquad (2.26)$$

Переставим в уравнении (2.26) элементы j,k :

$$\Theta[(ij,\alpha)] - \Theta[(kj,\alpha)] = \Theta[(ij,\beta)] - \Theta[(kj,\beta)] . \qquad (2.27)$$

Уравнения (2.26)и (2.27) в силу эквивалентности определяют неявно, например, (j,β) как одну и ту же функцию переменной (i,β) .Сравнивая частные производные , выраженные по обычным правилам из неяв-

ных заданий (2.26) и (2.27) получаем следующее равенство

$$\Theta_{(j,\beta)}[(kj,\beta)] / \Theta_{(j,\beta)}[(jk,\beta)] =$$

$$= \frac{\Theta_{(i,\beta)}[(ij,\beta)]}{\Theta_{(i,\beta)}[(ik,\beta)]} + \frac{\Theta_{(j,\beta)}[(ij,\beta)]}{\Theta_{(j,\beta)}[(jk,\beta)]}, \qquad (2.28)$$

которое представляет собой функционально- дифференциальное уравнение для Θ . Полагая в равенстве (2.28) $(k,\beta) = a_2$, приходим к неоднородному уравнению в частных производных для функции $\Theta[(ij,\beta)]$ по переменным (ij,β) :

$$\Theta_{(i,\beta)}[(ij,\beta)]\, A_1[(i,\beta)] + \Theta_{(j,\beta)}[(ij,\beta)]\, A_1[(j,\beta)] = B_1[(j,\beta)],$$

решение которого можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$\Theta[(ij,\beta)] = P\{A[(i,\beta)] - A[(j,\beta)]\} + B[(j,\beta)]. \qquad (2.29)$$

Поскольку $\Theta_{(i,\beta)}[(ij,\beta)] \neq 0$, $A_{(i,\beta)}[(i,\beta)] \neq 0$, из выражения (2.29) следует, что производная P' не равна нулю.

Подставим решение (2.29) в исходное уравнение (2.28):

$$-P'\{A[(k,\beta)] - A[(j,\beta)]\} / P'\{A[(j,\beta)] - A[(k,\beta)]\} =$$

$$\frac{P'\{A[(i,\beta)] - A[(j,\beta)]\}}{P'\{A[(i,\beta)] - A[(k,\beta)]\}} - \frac{P'\{A[(i,\beta)] - A[(j,\beta)]\}}{P'\{A[(j,\beta)] - A[(k,\beta)]\}}. \qquad (2.30)$$

Положим в равенстве (2.30) $(k,\beta) = a_2$ и введем обозначение $x = A[(i,\beta)]$, $y = A[(j,\beta)]$:

$$\rho'(x-y) = E(y)/[F(x) - F(y)]. \qquad (2.31)$$

Из исходного равенства (2.30) заключаем, что $E(y) \neq 0$, $F(x) - F(y) \neq 0$.

Продифференцируем выражение (2.31) по переменным x, y и сложим результаты:

$$\frac{E'(y)}{E(y)} = \frac{F'(x) - F'(y)}{F(x) - F(y)}. \qquad (2.32)$$

Переставим в равенстве (2.32) переменные x, y. Правая часть при такой перестановке не изменится. Сравнивая левые части получаем уравнение для функции E:

$$E'(x) = C E(x), \qquad (2.33)$$

где C - некоторая постоянная.

Уравнение для функции F легко получить из равенства (2.32):

$$F'(x) = C F(x) + C_1. \qquad (2.34)$$

Проинтегрируем уравнения (2.33) и (2.34):

$$E(x) = K \exp C(x), \qquad (2.35)$$

$$F(x) = L \exp Cx - C_1/C =$$

$$= [L_1 + C_1/C] \exp Cx - C_1/C. \qquad (2.36)$$

Подставим общие решения (2.35) и (2.36) в выражение (2.31)

$$\rho'(x-y) = K[L \exp C(x-y) - L]^{-1}. \qquad (2.37)$$

Легко убедиться в том, что решение (2.37) удовлетворяет исходному

уравнению (2.30). Проинтегрируем решение (2.37) по переменной $x-y$:

$$\rho(x-y) = K C^{-1} L^{-1} \ln\{L \exp C(y-x) - L\} + C_2 .$$

В соответствии с формулой (2.29) можно выписать наиболее общий вид для функции Θ :

$$\Theta[(i,j,\beta)] = C_2 + B[(j,\beta)] + K C^{-1} L^{-1} \ln\{L \exp CA[(j,\beta)] / \exp CA[(i,\beta)] - L\}. \qquad (2.38)$$

Из свойств функций F и E вытекает, что $CL \neq 0$, $K \neq 0$. Подставим выражение (2.38) для функции Θ в уравнение (2.27), введя обозначение

$$\psi[(i,\alpha)] = 1/C^2 L \exp CA[(i,\alpha)] - C^{-1} C_1^{-1} ,$$

где C_1 постоянная, входящая в уравнение (2.34):

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & 1 \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & 1 \\ \psi[(k,\alpha)] & \psi[(k,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (2.39)$$

Результат (2.39) и представляет (в эквивалентном смысле) единственное решение уравнения (2.15).

В рассмотренных задачах были показаны основные приемы решения. В последующих параграфах этих приемы будут использованы при решении более сложной задачи (I.3) для произвольных значений чисел m и n.

§ 3. Общие преобразования : $m \geq n \geq 2$.

Приступим теперь к решению уравнения (I.3) в общем случае $m \geq n \geq 2$. Возьмем некоторый элемент $g \in \mathfrak{M}$ и запишем уравнение (I.4) для двух кортежей $\langle gik\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$, $\langle gjk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{M}^n$:

$$(g,\alpha) = \Gamma[(ik\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(g,\beta\gamma\dots\tau),(ik\dots v,\alpha)] ,$$

$$(g,\alpha) = \Gamma[(jk\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(g,\beta\gamma\dots\tau),(jk\dots v,\alpha)] .$$

Приравнивая правые части выписанных выражений, приходим к соотношениям

$$R(ij)\,\Gamma[(ik\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(g,\beta\gamma\dots\tau),(ik\dots v,\alpha)] = 0 , \qquad (3.1)$$

где для сокращения записи был использован оператор альтернирования R , введенный в конце первого параграфа.

Согласно первому условию задачи в соотношении (3.I) можно положить переменные $(g,\beta\gamma\dots\tau) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, не налагая никаких дополнительных ограничений на выбор элементов $\alpha,\beta,\gamma,\dots,\tau \in \mathfrak{M}$. Мы будем также записывать $(g,\beta\gamma\dots\tau) = const$ для краткости. Вводя новое обозначение

$$\Omega[(ik\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)] =$$

$$= \Gamma[(ik\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(g,\beta\gamma\dots\tau),(ik\dots v,\alpha)]\big|_{(g,\beta\gamma\dots\tau)=const} ,$$

получаем уравнение

$$R(ij)\,\Omega[(ik\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)] = 0 , \qquad (3.2)$$

которое эквивалентно уравнению (I.3).

Поскольку частные производные функции Γ отличны от нуля,

также отличны от нуля и все частные производные функции Ω и кроме того, Ω достаточно гладкая функция, не имеющая никаких особенностей.

Покажем также, что производная левой части уравнения (3.2) по любому аргументу отлична от нуля, то есть выполняется четвертое условие задачи. Сказанное очевидно при дифференцировании по каждой из переменных $(ij, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)$, поскольку эти переменные входят либо в функцию $\Omega[(ik\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)]$, либо $\Omega[(jk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)]$. Любая же из переменных $(k\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)$ входит в обе функции и потому выполнение четвертого условия не столь очевидно. Продифференцируем уравнение (3.2) по переменной (k,α), например, рассматривая (i,α) как функцию (I.4) остальных переменных:

$$R(ij)\,\Omega_{(k,\alpha)}[(ik\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)] + \Omega_{(i,\alpha)}[(ik\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)] \times$$

$$\times \Gamma_{(k,\alpha)}[(jk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau), (i, \beta\gamma\ldots\tau), (jk\ldots v, \alpha)] = 0.$$

Поскольку, как показано выше, $\Omega_{(i,\alpha)}[\ldots] \neq 0$, $\Gamma_{(k,\alpha)}[\ldots] \neq 0$, отлично от нуля также и выражение $R(ij)\Omega_{(k,\alpha)}[(ik\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)]$, которое представляет собой первую частную производную левой части уравнения (3.2) по переменной (k,α). Аналогично доказывается неравенство нулю производной и по всем остальным переменным из $(k\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)$.

Таким образом, в отношении уравнения (3.2) выполняются третье и четвертое условия задачи, определяющие свойства функции Φ. Заметим, что перестановка элементов i, j оставляет без изменения уравнение (3.2)

Возъмем далее элемент $\rho \in \mathcal{M}$ и запишем уравнение (I.4) для $\langle ijk\ldots v, \rho\alpha\gamma\ldots\tau\rangle, \langle ijk\ldots v, \rho\beta\gamma\ldots\tau\rangle \in \mathcal{M}^m \times \mathcal{M}^n$:

$$(i,\rho) = \Gamma[(jk\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\alpha\gamma\ldots\tau),(jk\ldots v,\rho)],$$

$$(i,\rho) = \Gamma[(jk\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(i,\beta\gamma\ldots\tau),(jk\ldots v,\rho)].$$

Приравняем правые части выписанных выражений, полагая $(jk\ldots v,\rho) = const$:

$$R(\alpha\beta)\,\Xi[(ijk\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)] = 0, \qquad (3.3)$$

где введено обозначение

$$\Xi[(ijk\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)] =$$

$$= \Gamma[(jk\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\alpha\gamma\ldots\tau),(jk\ldots v,\rho)]\,|\,(jk\ldots v,\rho) = const\ .$$

Уравнение (3.3) задает связь между компонентами матрицы (I.I) и эквивалентно уравнениям (I.3) и (3.2).

В силу введенного обозначения, Ξ достаточно гладкая функция, имеющая отличную от нуля частную производную по каждой переменной. Легко показать, как это было сделано в отношении связи (3.2), что уравнение (3.3) также удовлетворяет третьему и четвертому условиям задачи. Заметим, что перестановка элементов α,β не изменяет уравнения (3.3).

Эквивалентность уравнений (3.2) и (3.3), задающих связь (I.3), означает, что они должны совпадать, если их представить в виде, разрешенном относительно какого-либо аргумента. Эквивалентность приводит к дополнительным ограничениям на вид функций Ω и Ξ.

Разрешим уравнения (3.2) и (3.3) относительно переменной (i,α):

$$(i,\alpha) = \chi\{\Omega[(jk\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\tau)],(k\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\tau),(i,\beta\gamma\ldots\tau)\}, \qquad (3.4.)$$

$$(i,\alpha) = \chi_1\{\Xi[(ijk\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)],(ijk\ldots v,\gamma\ldots\tau),(jk\ldots v,\alpha)\}. \qquad (3.5.)$$

Если приравнять правые части выражений (3.4), (3.5), то получим равенство

$$\chi\{\Omega[(jk\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\tau)],(k\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\tau),(i,\beta\gamma\ldots\tau)\} =$$

$$= \chi_1\{\Xi[(ijk\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)],(ijk\ldots v,\gamma\ldots\tau),(jk\ldots v,\alpha)\}, \qquad (3.6)$$

в котором все переменные независимы, так как они не составляют полной матрицы (I.I) из-за отсутствия компоненты (i,α). Равенство (3.6), поэтому, представляет собой обычное функциональное уравнение для функций χ и χ_1.

Продифференцируем уравнение (3.6) по переменным (j,β) и (i,β):

$$\chi_\lambda\{\ldots\}\Omega_{(j,\beta)}[(jk\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\tau)] =$$

$$= \chi_1\{\ldots\}\,\Xi_{(j,\beta)}[(ijk\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)], \qquad (3.7)$$

$$\chi_{(i,\beta)}\{\ldots\} = \chi_{1\eta}\{\ldots\}\,\Xi_{(i,\beta)}[(ijk\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)], \qquad (3.8)$$

где χ_λ, $\chi_{1\eta}$ есть частные производные функций χ, χ_1 по первому аргументу, а $\Omega_{(j,\beta)}$ есть частная производная функции $\Omega[(jk\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\tau)]$ по переменной (j,β). Заметим, что все первые частные производные, входящие в равенство (3.7),(3.8) не обращаются в нуль.

От равенств (3.7),(3.8) легко приходим к соотношению, в котором отсутствует производная $\chi_{1\eta}$:

$$\chi_\lambda\{\ldots\}\,\Omega_{(j,\beta)}[(jk\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\tau)]\,\Xi_{(i,\beta)}[(ijk\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)] =$$

$$= \chi_{(i,\beta)}\{\ldots\}\,\Xi_{(j,\beta)}[(ijk\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]. \qquad (3.9)$$

Введем в соотношение (3.9) обозначение

$$\lambda = \Omega[(jk\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\tau)], \qquad (3.10)$$

откуда после разрешения относительно переменной (j,α) , в полном соответствии с формулой (3.4.),получаем

$$(j,\alpha) = \chi[\lambda,(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau),(j,\beta\gamma\dots\tau)]. \qquad (3.11)$$

Подставим обозначения (3.10),(3.11) в соотношение (3.9):

$$\chi_\lambda[\lambda,(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau),(i,\beta\gamma\dots\tau)]\,\Xi_{(i,\beta)}[(ijk\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]\times$$

$$\times\Omega_{(j,\beta)}[(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau),(j,\beta\gamma\dots\tau),\chi[\lambda,(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau),(j,\beta\gamma\dots\tau)]\} =$$

$$=\chi_{(i,\beta)}[\lambda,(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau),(i,\beta\gamma\dots\tau)]\,\Xi_{(j,\beta)}[(ijk\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]. \qquad (3.12)$$

Равенство (3.12) относительно переменных λ и (i,β) представляет собой однородное уравнение в частных производных для функции $\chi[\lambda,(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau),(i,\beta\gamma\dots\tau)]$. Все другие переменные,как входящие в функцию χ , так и не входящие в нее,могут рассматриваться как независимые параметры. Уравнение (3.12) будем решать методом характеристик.Уравнение характеристик в данном случае следующее:

$$d\lambda/d(i,\beta) = \Xi_{(i,\beta)}[(ijk\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]/\Xi_{(j,\beta)}[(ijk\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]\times$$

$$\times\Omega_{(j,\beta)}\{(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau),(j,\beta\gamma\dots\tau),\chi[\lambda,(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau),(j,\beta\gamma\dots\tau)]\}. \qquad (3.13)$$

Легко видеть, что уравнение характеристик (3.13) удовлетворяет условия м теоремы Коши о существовании и единственности общего решения.В самом деле,правая часть уравнения (3.13) непрерывна и ограничена. Кроме того, непрерывна и ограничена также и производная правой части уравнения (3.13) по переменной λ , поскольку эта производная представляется в виде произведения трех сомножителей

$$\Xi_{(i,\beta)}[\dots]/\Xi_{(j,\beta)}[\dots],\ \Omega_{(j,\alpha\beta)}\{\dots\},\ \chi_\lambda[\dots],$$

каждое из которых непрерывно и ограничено.Ограниченность и непрерывность множителя $\Omega_{(j,\alpha\beta)}\{\dots\}$, например, есть следствие достаточной гладкости функции Ω .

Поскольку функция χ в уравнении (3.12) не содержит переменных $(j,\beta\gamma\dots\tau)$, полагаем $(j,\beta\gamma\dots\tau)=const$, что очевидно, не приводит к связыванию остальных переменных и ограничению на выбор элементов множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Уравнение характеристик легко интегрируется ,

так как разделяются переменные λ и (i,β). Общее решение исходного уравнения (3.I2) можно выписать в следующем виде

$$\chi[\lambda,(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau),(i,\beta\gamma\dots\tau)] =$$

$$= \chi_2\{A[\lambda,(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)] + B[(ik\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]\}, \quad (3.I4)$$

причем функция χ_2 произвольна в пределах ограничений, налагаемых условиями задачи. Поскольку χ достаточно гладкая функция, а A и B не имеют особенностей как интегралы гладких функций, $\chi_2[\eta,(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]$ также достаточно гладкая функция по всем своим переменным.

Подставим решение (3.I4) в уравнение (3.4):

$$(i,\alpha) = \chi_2\{\Omega_1[(jk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)] +$$

$$+ B[(ik\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]\}, \quad (3.I5)$$

где введено переобозначение

$$\Omega_1[(jk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)] = A\{\Omega[(jk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)],(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)\},$$

и разрешим результат подстановки относительно суммы $\Omega_1 + B$:

$$\Omega_1[(jk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)] = -B[(ik\dots v,\beta\gamma\dots\tau)] + \quad (3.I6)$$

$$+ \Theta_1[(ik\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(k\dots v,\beta)] .$$

Функция $\Omega_1[(jk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)]$, также как и $\Omega[(jk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)]$, достаточно гладкая, однако, не всякая первая частная производная функции Ω_1 отлична от нуля, что легко видеть из формы обозначения. В частности можно утверждать, что первая частная производная по любой из переменных $(j,\alpha\beta\gamma\dots\tau)$ отлична от нуля, поскольку

$A\lambda[\lambda,(k\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)] \neq 0$.

Запишем уравнение (3.16) для $\langle igk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle, \langle jgk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$:

$$\Omega_1[(gk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)] = -B[(ik\dots v,\beta\gamma\dots\tau)] + \\ + \Theta_1[(ik\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(k\dots v,\beta)],$$

$$\Omega_1[(gk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)] = -B[(jk\dots v,\beta\gamma\dots\tau)] + \\ + \Theta_1[(jk\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(k\dots v,\beta)]$$

и приравняем правые части, поскольку левые совпадают:

$$R(ij)\,B[(ik\dots v,\beta\gamma\dots\tau)] = \\ = R(ij)\,\Theta_1[(ik\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(k\dots v,\beta)]. \qquad (3.17)$$

Если теперь результат (3.17) записать для $\langle ijk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$ и $\langle ijk\dots v,\beta\beta\gamma\dots\tau\rangle$, то легко приходим к соотношению

$$R(ij)\,R(\alpha\beta)\,\Theta_1[(ik\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(k\dots v,\rho)] = 0.$$

Полагая $(k\dots v,\rho) = const$, находим следствие эквивалентности двух форм связи (3.2),(3.3):

$$R(ij)\,R(\alpha\beta)\,\Theta[(ikl\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)] = 0, \qquad (3.18)$$

где введено новое обозначение

$$\Theta[(ikl\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)] = \Theta_1[(ikl\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(k\dots v,\rho)]\,(k\dots v,\rho) = const.$$

Уравнение (3.18) не изменяется при перестановке элементов i,j и α,β.

Покажем, что связь (3.18) удовлетворяет третьему и четвертому условиям задачи. Поскольку при получении уравнения (3.18) никаких ограничений на выбор элементов из множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ не возникало, эта связь сохраняет универсальный характер. $\Theta[(ik\dots v,\alpha\chi\dots\tau)]$ – достаточно гладкая функция, так как $\Theta_1[(ik\dots v,\alpha\chi\dots\tau),(k\dots v,\rho)]$ по построению не имеет никаких особенностей. Продифференцируем затем уравнение (3.16) по переменной (j,α), рассматривая (i,α) как функцию (1.4) остальных переменных:

$$\Omega_{1(j,\alpha)}[\dots] - \Theta_{1(i,\alpha)}[\dots]\,\Gamma_{(j,\alpha)}[\dots] = 0,$$

откуда вытекает $\Theta_{1(i,\omega)}[\dots] \neq 0$, а следовательно и $\Theta_{(i,\omega)}[(ik\dots v,\alpha\chi\dots\tau)] \neq 0$, поскольку $\Gamma_{(j,\alpha)}[\dots] \neq 0$ и $\Omega_{1(j,\alpha)}[\dots] \neq 0$. В силу универсальности в соотношении (3.16) возможна любая перестановка элементов и потому производная функции Θ по первому аргументу отлична от нуля при любой перестановке элементов. Например: $\Theta_{(j,\beta)}[(jk\dots v,\beta\chi\dots\tau)] \neq 0$. Подставляя функцию (1.4) в уравнение (3.18) и дифференцируя по всем остальным переменным убеждаемся в том, что частная производная левой части по любой переменной отлична от нуля. Заметим, однако, что из этого заключения отнюдь не следует неравенство нулю производной функции Θ по любому аргументу, кроме первого.

В частном случае $m = n = 2$ результат (3.18) представляет собой единственное решение (1.5) функционального уравнения $\Phi[(ij,\alpha\beta)] \neq 0$:

$$\Psi[(i,\alpha)] - \Psi[(i,\beta)] - \Psi[(j,\alpha)] + \Psi[(j,\beta)] = 0\,.$$

§ 4. Продолжение: $m \geqslant 3$.

При последующем преобразовании результата (3.I8) будем предполагать ,что $m \geqslant 3$.Переставим в уравнении (3.I8) элементы j,k :

$$R(ik)\,R(\alpha\beta)\,\Theta[(ij\ell\ldots v,\alpha\chi\ldots\tau)] = 0 . \qquad (4.I)$$

Уравнения (3.I8) и (4.I) по условию эквивалентны. Это означает, в частности, что они неявно определяют (j,β) как одну и ту же функцию переменной (i,β) .Выразим из неявных заданий (3.I8) и(4.I) частную производную функции (j,β) по переменной (i,β) :

$$\partial(j,\beta)/\partial(i,\beta) = \Theta_{(i,\beta)}[(ik\ell\ldots v,\beta\chi\ldots\tau)] / \Theta_{(j,\beta)}[(jk\ell\ldots v,\beta\chi\ldots\tau)],$$

$$\frac{\partial(j,\beta)}{\partial(i,\beta)} = -\frac{\Theta_{(i,\beta)}[(ij\ell\ldots v,\beta\chi\ldots\tau)]}{\Theta_{(j,\beta)}[(ij\ell\ldots v,\beta\chi\ldots\tau)] - \Theta_{(j,\beta)}[(kj\ell\ldots v,\beta\chi\ldots\tau)]} .$$

Приравнивая правые части выписанных выражений , получаем равенство

$$\Theta_{(j,\beta)}[(ij\ell\ldots v,\beta\chi\ldots\tau)] / \Theta_{(j,\beta)}[(jk\ell\ldots v,\beta\chi\ldots\tau)] =$$

$$= \frac{\Theta_{(i,\beta)}[(ij\ell\ldots v,\beta\chi\ldots\tau)]}{\Theta_{(i,\beta)}[(ik\ell\ldots v,\beta\chi\ldots\tau)]} + \frac{\Theta_{(j,\beta)}[(ij\ell\ldots v,\beta\chi\ldots\tau)]}{\Theta_{(j,\beta)}[(jk\ell\ldots v,\beta\chi\ldots\tau)]} , \qquad (4.2)$$

которое представляет собой функционально-дифференциальное уравнение для Θ , поскольку

все переменные , входящие в равенство (4.2) не образуют полной матрицы (I.I.) и потому независимы.

В равенстве (4.2) никаких особенностей не возникает ,так как производная функции Θ по первому аргументу отлична от нуля,

а именно такие производные стоят в знаменателях. Полагая независимые переменные $(k,\beta\gamma\dots\tau) = const$, проходим к неоднородному уравнению в частных производных для функции $\Theta[(ij\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]$ по переменным (ij,β) :

$$\Theta_{(i,\beta)}[(ij\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]\,A_1[(i\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)] +$$

$$+\,\Theta_{(j,\beta)}[(ij\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]\,A_1[(j\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)] = B[(j\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]\,. \qquad (4.3)$$

Решение уравнения (4.3) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного. Заметим, что однородная часть уравнения (4.3) легко решается методом характеристик и соответствующее уравнение характеристик удовлетворяет необходимым условиям теоремы Коши о существовании и единственности общего решения, поскольку функция $A_1 \neq 0$ и не имеет особенностей. Если частное решение неоднородного уравнения взять не зависящим от переменных $(i,\beta\gamma\dots\tau)$ и достаточно гладким, то общее решение исходного уравнения (4.3) можно записать в следующем виде:

$$\Theta[(ij\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)] = B[(j\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)] +$$

$$+\,P\{A[(i\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)] - A[(j\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)],(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(ij,\gamma\dots\tau)\}. \qquad (4.4)$$

Функция A в формуле (4.4) не имеет особенностей и $A_{(i,\beta)}[(i\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)] \neq 0$. Поскольку $\Theta[(ij\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]$, как было установлено, достаточно гладкая функция, не имеет никаких особенностей и функция P. Продифференцируем выражение (4.4) по переменной (i,β) :

$$\Theta_{(i,\beta)}[(ij\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)] = P'\{\dots\}\,A_{(i,\beta)}[(i\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]\,,$$

где P' означает частную производную функции P по первому аргументу. Из условия $\Theta_{(i,\beta)} \neq 0$, $A_{(i,\beta)} \neq 0$ как следствие вытекает и $P'\{\dots\} \neq 0$. Это следствие, разумеется, выполняется и для любых других наборов элементов.

Подставим найденное решение (4.4) в исходное функционально-дифференциальное уравнение (4.2) , учитывая только что отмеченное следствие:

$$\frac{P'\{A[(i\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)]-A[(j\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)],(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(ij,\gamma\dots z)\}}{P'\{A[(i\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)]-A[(k\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)],(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(ij,\gamma\dots z)\}} -$$

$$-\frac{P'\{A[(i\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)]-A[(j\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)],(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(ij,\gamma\dots z)\}}{P'\{A[(j\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)]-A[(k\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)],(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(ij,\gamma\dots z)\}} = \qquad (4.5)$$

$$=-\frac{P'\{A[(k\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)]-A[(j\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)],(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(kj,\gamma\dots z)\}}{P'\{A[(j\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)]-A[(k\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)],(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(jk,\gamma\dots z)\}} .$$

Положим в равенстве (4.5) $(k,\beta\gamma\dots z)=const$ и введем обозначение $x=A[(i\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)]$, $y=A[(j\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)]$:

$$P'[x-y,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(ij,\gamma\dots z)] = \qquad (4.6)$$

$$=\frac{E[y,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(j,\gamma\dots z)]}{F[x,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(i,\gamma\dots z)]-F[y,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(j,\gamma\dots z)]} .$$

Заметим, что введение независимых переменных x и y возможно, так как $A_{(i,\beta)}[(i\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)] \neq 0$, $A_{(j,\beta)}[(j\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)] \neq 0$.

Свойства функций E и F легко вывести из исходного равенства (4.5) и из условия $P'[\dots] \neq 0$. В силу обозначения E и F достаточно гладкие функции , причем $E \neq 0$ и не равна тожде нулю разность $F[x,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(i,\gamma\dots z)] - F[y,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(j,\gamma\dots z)]$, стоящая в знаменателе выражения (4.6) .

Продифференцируем выражение (4.6) по переменным x , y и сложим результаты:

$$E'[y,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(j,\gamma\dots z)]/E[y,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(j,\gamma\dots z)] =$$

$$= \frac{F'[x,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(i,\gamma\dots z)] - F'[y,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(j,\gamma\dots z)]}{F[x,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(i,\gamma\dots z)] - F[y,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(j,\gamma\dots z)]} \qquad (4.7.)$$

Переставим в равенстве (4.7) элементы i,j , учитывая , что при этом должны переставляться также и переменные x,y .Правая часть равенства (4.7) при такой перестановке не изменится. Сравнивая левые части , приходим к следующему уравнению для функции E :

$$\frac{E'[x,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(i,\gamma\dots z)]}{E[x,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(i,\gamma\dots z)]} = C[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)] . \qquad (4.8)$$

Уравнение для функции F легко получить, подставляя в равенство (4.7) уравнение (4.8):

$$F'[x,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(i,\gamma\dots z)] = C_1[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)] +$$

$$+ C[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z)]\, F[x,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots z),(i,\gamma\dots z)] , \qquad (4.9.)$$

где C и C_1 достаточно гладкие функции. Проинтегрируем уравнения (4.8) и (4.9):

$$E[x,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)] = \tag{4.10}$$
$$= K[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]\exp C[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]\,x,$$

$$F[x,(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)] = -C_1[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]/C[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)] + \tag{4.11}$$
$$+ L[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]\exp C[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]\,x,$$

где

$$L[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)] = L_1[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)] +$$
$$+ C_1[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]/C[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)].$$

Ограничения на коэффициенты K, L следуют из основных свойств функций E и F. Поскольку $E \neq 0$, не равен нулю также и коэффициент K. В области переменных, где произведение $CL = 0$, должна быть отлична от нуля и не иметь особенностей разность $L[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)] - L[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]$. Производная функции F, в соответствии с выражением (4.11) имеет вид: $F' = CL\exp Cx$, откуда следует, что предэкспоненциальный коэффициент CL представляет собой достаточно гладкую функцию. В области переменных $(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)$, где $C = 0$ функция L_1 должна быть достаточно гладкой и, кроме того, должен быть предельный переход

$$\lim C[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]L[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)] = \tag{4.12}$$
$$= C_1[(\ell\dots v,\beta\gamma\dots\tau)],$$

так как решение (4.11) в этом случае становится линейным.

Подставим общие решения (4.I0) и (4.II) для функций E и F в формулу (4.6):

$$\rho'[x-y,(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(ij,\gamma\dots\tau)] =$$

$$= K[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)] \times$$

$$\times\{L[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]\exp C[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau)](x-y) -$$

$$- L[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]\}^{-1}. \qquad (4.I3)$$

Легко убедиться в том, что решение (4.I3) удовлетворяет исходному уравнению (4.5).

Проинтегрируем решение (4.I3) по переменной $(x-y)$:

$$\rho[x-y,(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(ij,\gamma\dots\tau)] =$$

$$= \frac{K[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]}{C[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]\,L[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]} \times$$

$$\times \ln\{L[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]\exp C[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau)](y-x) -$$

$$- L[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]\} + C_2[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(ij,\gamma\dots\tau)].$$

(4.I4)

Используя выражение (4.I4) можно выписать наиболее общий вид для функции $\Theta[(ijl\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]$ в соответствии с формулой (4.4):

$$\Theta[(ij\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)] = B[(j\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)] +$$

$$+\frac{K[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]}{C[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]\,L[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]}\times \tag{4.I5}$$

$$\times\ln\left\{L[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]\frac{\exp C[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]\,A[(j\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]}{\exp C[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]\,A[(i\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]}-\right.$$

$$\left.-L[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]\right\}+C_2[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(ij,\gamma\ldots\tau)].$$

Выражение (4.I5) имеет смысл во всей области изменения переменных $(ij\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)$, в частности и там где произведение $C[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]L[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]$ могло бы обращаться в нуль. В этом случае предельный переход в формуле (4.I5) даст следующее выражение для функции $\Theta[(ij\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]$:

$$\Theta[(ij\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)] = B[(j\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)] + C_3[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(ij,\gamma\ldots\tau)] +$$

$$\frac{K[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]\{A[(j\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]-A[(i\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]\}}{L[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]-L[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]}. \tag{4.I6}$$

Разность коэффициентов $L[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]-L[(\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]$, являющаяся предельным переходом для выражения под логарифмом в формуле (3.I5), не обращается в нуль и не имеет особенностей.

Подствим выражение (4.I5) для функции Θ в уравнение (4.I):

$$R(ik)R(\alpha\beta)\frac{K[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]}{C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]}\times \tag{4.I7}$$

$$\times \ln\{L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]\exp C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]A[(jl\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]/$$

$$\exp C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]A[(il\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]-L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]\}+$$

$$+R(ik)R(\alpha\beta)C_2[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(ij,\gamma\dots\tau)]=0.$$

В уравнении (4.I7) переставим элементы j,k :

$$R(ij)R(\alpha\beta)\frac{K[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(k,\gamma\dots\tau)]}{C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(k,\gamma\dots\tau)]}\times$$

$$\times \ln\{L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(k,\gamma\dots\tau)]\exp C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]A[(kl\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]/$$

$$\exp C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]A[(il\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]-L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]\}+ \tag{4.I8}$$

$$+R(ij)R(\alpha\beta)C_2[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(ik,\gamma\dots\tau)]=0.$$

Уравнения (4.I7) и (4.I8) эквивалентны. Это означает, что они определяют неявно (i,α) как одну и ту же функцию переменной (i,β). Сравнивая частные производные функции (i,α) по переменной (i,β), выраженные по известным правилам из неявных заданий (4.I7) и (4.I8), получаем соотношение

$$R(jk)\,R(\alpha\beta)\,\ln\Big\{L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)] - L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]\,\frac{\exp C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,A[(il\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]}{\exp C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,A[(jl\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]}\Big\} -$$

$$- R(jk)\,R(\alpha\beta)\,\ln K[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)] = 0 \,. \qquad (4.19)$$

В соотношении (4.I9) переставим элементы i,j :

$$R(ik)\,R(\alpha\beta)\,\ln\Big\{L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)] - L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]\,\frac{\exp C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,A[(jl\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]}{\exp C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,A[(il\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]}\Big\} -$$

$$- R(ik)\,R(\alpha\beta)\,\ln K[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)] = 0 \,. \qquad (4.20)$$

Заметим, что выражения под логарифмом в уравнении (4.I7) и в соотношении (4.20) совпадают (с точностью до знака). Используя это обстоятельство, преобразуем уравнение (4.I7) с помощью соотношения (4.20) к следующему равенству:

$$R(ik)\,\frac{K[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]}{C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]}\times$$

$$\times\ln\{L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]\exp C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,A[(jl\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]/$$

$$\exp C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,A[(il\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)] - L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]\} +$$

$$+R(ik)R(\alpha\beta)C_2[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(ij,\gamma\dots\tau)]=$$

$$=R(ik)\frac{K[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]}{C[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]L[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]}\times$$

$$\times\ln\{L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]\exp C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]A[(ijl\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]/$$

$$\exp C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]A[(il\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]-L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]\}- \quad (4.21)$$

$$-\frac{K[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]\,R(ik)R(\alpha\beta)K[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]}{C[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]L[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]}.$$

Равенство (4.21) представляет собой тождество, так как в нем отсутствуют переменные (ijk,β) .Продифференцируем равенство (4.21) по переменной (i,α) и произведем в полученном результате сокращение на все множители , не обращающиеся в нуль:

$$K[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]/K[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]=$$

$$=\frac{C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]}{C[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]L[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]} \quad (4.22)$$

Соотношение (4.22) является универсальным, то есть в него вместо элемента j можно подставить элементы i,k . Поскольку функция $K\neq 0$, произведения $C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]$, $C[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau)]\times L[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]$ могут обращаться в нуль только одновременно.

Покажем теперь , что на самом деле произведение CL не может обращаться в нуль, поскольку обращение в нуль хотя бы одного из этих произведений приводит к противоречию с исходными условиями задачи.

Предположим, что

$$C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]=0\ , \quad (4.23)$$

$$C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]\neq 0\,, \qquad (4.24)$$

$$C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]\neq 0\,. \qquad (4.25)$$

В соответствии с соотношением (4.22), условия (4.23),(4.25) не изменятся , если вместо элемента α , подставить β :

$$C[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]=0\,,$$

$$C[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]\neq 0\,,$$

$$C[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]\neq 0\,.$$

Универсальное соотношение (4.20) в этом случае принимает форму

$$R(ik)R(\alpha\beta)\ln\frac{L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]-L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]}{K[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]}=0$$

или, в развернутом виде,

$$\frac{L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]-L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]}{L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]-L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]}\times$$

$$\times\frac{K[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]}{K[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]}=\frac{K[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]}{K[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]}\times \qquad (4.26)$$

$$\frac{L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]-L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]}{L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]-L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]}\,.$$

Будем преобразовывать правую часть равенства (4.26), используя соотношение (4.22) для раскрытия дроби $K[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]\,/\,K[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]$:

$$\frac{C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]}{C[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]}\times$$

$$\times\frac{L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]-L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]}{L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]-L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]}=$$

$$=\frac{C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]}{C[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]}=$$

$$=\frac{L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]\,K[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]}{L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]\,K[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]}, \qquad (4.27)$$

причем были использованы также условия (4.23)-(4.25) и соотношение (4.22) в обратную сторону . Воспользуемся преобразованной правой частью (4.27) и перепишем равенство (4.26) в более кратком виде:

$$\frac{L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]-L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]}{L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]-L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]}=$$

$$=L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]\,/\,L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]\ . \qquad (4.28)$$

Напомним , что в равенстве (4.26) ни одна из разностей коэффициентов, стоящих в числителе и знаменателе не обращается в нуль и не имеет особенностей. Поэтому и правая часть полученного равенства (4.28) не обращается в нуль и не имеет особенностей. Из равенства (4.28) следует, что коэффициенты $L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]$ и $L[(l\ldots v,\beta\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]$ либо одновременно обращаются в нуль, либо одновременно не равны нулю.

Рассмотрим отдельно эти две возможности в случае, задаваемом условиями (4.23),(4.24),(4.25).

I. $$L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]\neq 0\ . \qquad (4.29)$$

Из условия (4.23) следует , что $C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]=0$ и, в соответствии с предельным переходом (4.I2), $C_1[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]=0$. Но функция $C_1[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]$ является предельной для всех произведений стоящих в условиях (4.23),(4.24),(4.25),поэтому все эти произведения должны обращаться в нуль одновременно, что противоречит , естественно, исходным условиям (4.23) - (4.25).

2. $$L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]=0\ . \qquad (4.30)$$

Если $C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]=0$, то из условия (4.23) и предельного перехода (4.I2) следует $C_1[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]=0$. Как и в предыдущем подслучае это автоматически приводит к нарушению условий (4.24),(4.25).Поэтому возможно только $C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\neq 0$. Из условий (4.24),(4.25) вытекает достаточная гладкость коэффициентов $L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]$, $L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]$ и необращение их в нуль.

С учетом отмеченных обстоятельств выпишем уравнение (4.I7) при условии (4.30) ,используя предельное выражение (4.I6) для функции Θ , в котором надо положить $L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]=0$:

$$R(ik)R(\alpha\beta)\frac{K[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]}{L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]}\times$$

$$\times\{A[(jl\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]-A[(il\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\}- \qquad (4.3I)$$

$$-R(ik)R(\alpha\beta)C_3[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(ij,\gamma\ldots\tau)]=0.$$

При тех же условиях выпишем соотношение (4.I9):

$$-R(jk)R(\alpha\beta)\ln K[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]+$$

$$+R(\alpha\beta)\ln\frac{L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]}{\exp C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]A[(jl\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]}-$$

$$-R(\alpha\beta)\ln\left\{\frac{L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]}{\exp C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]A[(kl\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]}-\right.$$

$$\left.-\frac{L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(k,\gamma\dots\tau)]}{\exp C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]A[(il\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]}\right\}=0. \qquad (4.32)$$

Заметим, что условие (4.23) не накладывает никаких ограничений на изменение переменных $(ijk,\alpha\beta)$. Легко видеть также, что частные производные уравнения (4.31) и соотношения (4.32) по этим переменным отличны от нуля. Это означает, что как уравнение (4.31), так и соотношение (4.32) задают одну и туже универсальную связь между компонентами матрицы (I.I) в области, где выполняются условия (4.23), (4.24), (4.25), то есть уравнение (4.31) и соотношение (4.32) определяют, например, (i,α) как одну и ту же функцию переменной (i,β). Выражая обычным образом частную производную функцию (i,α) по переменной (i,β) и сравнивая их, получаем следующее равенство:

$$R(\alpha\beta)\ln\left\{L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(k,\gamma\dots\tau)]-\right.$$

$$\left.-L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]\frac{\exp C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]A[(il\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]}{\exp C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]A[(kl\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]}\right\}+$$

$$+R(\alpha\beta)\ln\frac{K[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]L[(l\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]}{C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(k,\gamma\dots\tau)]}=0 \qquad (4.33)$$

В равенстве (4.33) отсутствует зависимость от переменных $(j,\alpha\beta)$ поэтому по переменным $(ik,\alpha\beta)$, на которые условие (4.23) не налагает никакого ограничения, равенство (4.33) должно быть тождеством. Продифференцируем равенство (4.33) по переменной (i,α) и произведем сокращение на все множители, не равные нулю:

$$C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]=0,$$

что, очевидно, противоречит исходному условию (4.24) .Перестановка элементов i,k в равенстве (4.33) , не нарушающая условия (4.23), аналогичным образом приводит к обращению в нуль произведения $C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]$,что в свою очередь противоречит условию (4.25).

Таким образом, было показано, что обращение в нуль хотя бы одного из произведений ,входящих в условия (4.23)- (4.25), влечет за собой обращение в нуль и всех других произведений. Однако, обращение в нуль всех произведений одновременно в свою очередь противоречит основным условиям задачи.

Действительно , предположим ,что

$$C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]=0, \qquad (4.34)$$

$$C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]=0, \qquad (4.35)$$

$$C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\,L[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(k,\gamma\ldots\tau)]=0 \qquad (4.36)$$

и аналогично при замене элемента α элементом β . Возможны следующие два случая, при которых могут выполняться условия (4.34) - (4.36

I. $$C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]=0 .$$

В соответствии с предельным переходом (4.I2) в этом случае все три условия (4.34)- (4.36) эквивалентны единственному условию

$$C_1[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]=0 ,$$

которое не налагает никаких ограничений на переменные $(ijk,\gamma\ldots\tau)$. Равенство (4.26) по этим независимым переменным представляет со-

бой тождество .Продифференцируем это равенство по переменной (j,β) и произведем сокращение на неравные нулю множители:

$$L_{(j,\beta)}[(\alpha\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)] = 0,$$

то есть коэффициент $L[(\alpha\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)]$ не зависит от переменной (j,β) . Точно также можно показать, что этот коэффициент не зависит ни от одной из переменных $(j,\gamma\ldots\tau)$:

$$L[(\alpha\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)] = L_2[(\alpha\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau)].$$

Поскольку в равенстве (4.26) возможны перестановки элементов i,j,k , то можем , кроме того, записать

$$L[(\alpha\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)] = L_2[(\alpha\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau)].$$

Однако, тогда обращается в нуль разность

$$L[(\alpha\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau),(j,\gamma\ldots\tau)] - L[(\alpha\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)] , \qquad (4.37)$$

стоящая в знаменателе выражения (4.16) для функции Θ . Необращение в нуль этой разности требует достаточная гладкость функции Θ , которая в свою очередь является следствием исходных условий задачи.

2. $$C[(\alpha\ldots\nu,\alpha\gamma\ldots\tau)] \neq 0$$

В этом случае, согласно условиям (4.34) - (4.36) все три коэффициента L одновременно равны нулю и, следовательно, разность коэффициентов (4.37) обращается в нуль, в противоречие с основными условиями задачи.

Итак, мы показали , что принципиально возможен и удовлетворяет всем условиям задачи только тот единственный случай ,когда ни одно из произведений CL не обращается в нуль :

$$C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]\,L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]\neq 0,$$

$$C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]\,L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(j,\gamma\dots\tau)]\neq 0,$$

$$C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]\,L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(k,\gamma\dots\tau)]\neq 0$$

и аналогично при перестановке элементов α,β .

Теперь ,когда ни одно из произведений CL не обращается в нуль, универсальные соотношения (4.I9) и (4.20) представляют собой две эквивалентные формы связи между компонентами матрицы (I.I).Действительно, легко проверить, что любая первая частная производная соотношений (4.I9) и (4.20) отлична от нуля. Эквивалентность универсальных связей (4.I9) и (4.20) означает, что эти уравнения определяют, например, (k,α) как одну и ту же функцию переменной (k,β). Сравнивая частные производные функции (k,α) по переменной (k,β), выраженные из неявных заданий (4.I9) и (4.20) по обычным правилам, получаем уравнение:

$$R(ij)R(\alpha\beta)\ln\left\{\frac{L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(k,\gamma\dots\tau)]}{\exp C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]\,A[(il\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]}-\right.$$

$$\left.-\frac{L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]}{\exp C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]\,A[(kl\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]}\right\}-$$

$$-R(ij)R(\alpha\beta)\ln C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]\,L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]=0. \quad (4.38)$$

Введем новое обозначение

$$\Lambda[(il\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]=$$

$$=\frac{\exp\{-C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]\,A[(il\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]}{\{C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]\}^2\,L[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(i,\gamma\dots\tau)]}- \quad (4.39)$$

$$-\{C[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]\,\tilde{C}_1[(l\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)]\}^{-1},$$

где $\tilde{C}_1[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\neq 0$ достаточно гладкая функция, совпадающая с $C_1[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]$ в области переменных $(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)$, в которой $C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]=0$ и такая, что

$$\lim_{c\to 0}\frac{C_1[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]-\tilde{C}_1[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]}{C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]}=0.$$

В той же области произведение $CL\neq 0$ в соответствии с предельным переходом (4.I2), равно C_1 и потому $C_1\neq 0$.

Функция (4.39) так же как и ее производные, в области изменения переменных $(il\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)$ не имеет никаких особенностей. В частности, предельный переход для функции (4.39) в область, где $C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]=0$, дает выражение

$$\Lambda[(il\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]=$$

$$=-\frac{A[(il\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]C_1[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]+L_1[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]}{C_1[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]C_1[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]},$$

которое не имеет особенностей, так как $C_1\neq 0$ и L -достаточно гладкая функция. Легко видеть, что производная $\Lambda(i,\alpha)[(il\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]$ нигде не обращается в нуль, так как в выражении для нее:

$$\Lambda(i,\alpha)[(il\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]=$$

$$=-\frac{A(i,\alpha)[(il\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\exp\{-C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]A[(il\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\}}{C[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]L_1[(l\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\gamma\ldots\tau)]}$$

не равен нулю ни один из сомножителей.

Перепишем уравнение (4.38), воспользовавшись обозначением (4.39):

$$R(ij)R(\alpha\beta)\ln\{\Lambda[(il\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]-\Lambda[(kl\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)]\}=0 \quad (4.40)$$

или в полностью симметризованном виде:

$$R(ijk)R(\alpha\beta)\Lambda[(i\ell\ldots v,\alpha\gamma\ldots z)]\Lambda[(j\ell\ldots v,\beta\gamma\ldots z)]=0 \qquad (4.41)$$

Заметим, что разность функций $\Lambda[(i\ell\ldots v,\alpha\gamma\ldots z)]-\Lambda[(k\ell\ldots v,\alpha\gamma\ldots z)]$, стоящая под логарифмом в уравнении (4.40), не обращается в нуль. Не обращается в нуль также и производная левой части уравнения (4.40) по переменной (i,α) :

$$\frac{\Lambda_{(i,\alpha)}[(i\ell\ldots v,\alpha\gamma\ldots z)]}{\Lambda[(i\ell\ldots v,\alpha\gamma\ldots z)]-\Lambda[(k\ell\ldots v,\alpha\gamma\ldots z)]}\neq 0$$

Легко показать, что любая первая частная производная левой части уравнения (4.40) отлична от нуля.

Таким образом, уравнение (4.40) для $m\geq 3$ удовлетворяет всем условиям задачи и представляет собой одну из эквивалентных форм связи (I.3), в которую равноправно входят элементы $i,j,k\in\overline{m}$ и $\alpha,\beta\in\overline{n}$. Перестановка любой пары элементов из i,j,k оставляет без изменения уравнение (4.40), что явно выражено в записи (4.41).

Для частного случая $m=3$, $n=2$ связь (4.41) уже задает решение уравнения $\Phi[(ijk,\alpha\beta)]=0$:

$$R(ijk)R(\alpha\beta)\Psi[(i,\alpha)]\Psi[(j,\beta)]=0$$

или в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} \Psi[(i,\alpha)] & \Psi[(i,\beta)] & 1 \\ \Psi[(j,\alpha)] & \Psi[(j,\beta)] & 1 \\ \Psi[(k,\alpha)] & \Psi[(k,\beta)] & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad (4.42)$$

Дальнейшие преобразования результата (4.40) можно вести по двум различным направлениям в зависимости от значения числа n . Специфика изучаемой теории приводит к следующим вариантам: $n=2$ и $n\geq 3$.

§ 5. Частный случай $m > n = 2$.

Для $n = 2$ перепишем результат (4.4I) в виде определителя:

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(ilf\dots v,\alpha)] & \Lambda[(ilf\dots v,\beta)] & 1 \\ \Lambda[(jlf\dots v,\alpha)] & \Lambda[(jlf\dots v,\beta)] & 1 \\ \Lambda[(klf\dots v,\alpha)] & \Lambda[(klf\dots v,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.I)$$

Если $m = 3$, определитель (5.I) переходит в решение (4.42) функционального уравнения $\Phi[(ijk,\alpha\beta)] = 0$,поэтому будем предполагать,что $m \geq 4$ переставим в определителе (5.I) элементы k, l :

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(ikf\dots v,\alpha)] & \Lambda[(ikf\dots v,\beta)] & 1 \\ \Lambda[(jkf\dots v,\alpha)] & \Lambda[(jkf\dots v,\beta)] & 1 \\ \Lambda[(lkf\dots v,\alpha)] & \Lambda[(lkf\dots v,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.2)$$

В силу эквивалентности, уравнения (5.I) и (5.2) определяют неявно (j,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α) . Сравнивая частные производные, найденные из неявных заданий (5.I) и (5.2) приходим к равенству

$$\frac{\Lambda_{(i,\alpha)}[(ilf\dots v,\alpha)]}{\Lambda_{(j,\beta)}[(jlf\dots v,\beta)]} \cdot \frac{\Lambda[(jlf\dots v,\beta)] - \Lambda[(klf\dots v,\beta)]}{\Lambda[(ilf\dots v,\alpha)] - \Lambda[(klf\dots v,\alpha)]} = \frac{\Lambda_{(i,\alpha)}[(ikf\dots v,\alpha)]}{\Lambda_{(j,\beta)}[(jkf\dots v,\beta)]} \cdot \frac{\Lambda[(jkf\dots v,\beta)] - \Lambda[(lkf\dots v,\beta)]}{\Lambda[(ikf\dots v,\alpha)] - \Lambda[(lkf\dots v,\alpha)]} . \qquad (5.3)$$

Равенство (5.3) представляет собой тождество по всем входящим в него переменным, так как отсутствует зависимость от переменных (i,β) , (j,α) . Полагаем в равенстве (5.3) $(jk\ell f\dots v,\beta)=const$:

$$\frac{\Lambda(i,\alpha)[i\ell f\dots v,\alpha]}{\Lambda(i,\alpha)[ikf\dots v,\alpha]}\cdot\frac{\Lambda[ikf\dots v,\alpha]-\Lambda[\ell kf\dots v,\alpha]}{\Lambda[i\ell f\dots v,\alpha]-\Lambda[k\ell f\dots v,\alpha]}=a, \qquad (5.4)$$

причем $a\neq 0$. Положим дополнительно в уравнении (5.4) $(k,\alpha)=const$:

$$\Lambda(i,\alpha)[i\ell f\dots v,\alpha]/\{\Lambda[i\ell f\dots v,\alpha]-B[\ell f\dots v,\alpha]\}=$$

$$=a\,\Delta(i,\alpha)[if\dots v,\alpha]/\{\Delta[if\dots v,\alpha]-\Delta[\ell f\dots v,\alpha]\},$$

откуда после элементарного интегрирования получаем выражение для функции Λ :

$$\Lambda[i\ell f\dots v,\alpha]=B[\ell f\dots v,\alpha]+$$

$$+A[\ell f\dots v,\alpha]\{\Delta[if\dots v,\alpha]-\Delta[\ell f\dots v,\alpha]\}^{a}. \qquad (5.5)$$

Заметим, что функции в выражении (5.5) не имеет особенностей и, кроме того, $A[\ell f\dots v,\alpha]\neq 0$, $\Delta[if\dots v,\alpha]-\Delta[\ell f\dots v,\alpha]\neq 0$.

Подставим решение (5.5) в исходное уравнение (5.4) :

$$\frac{\{\Delta[if\dots v,\alpha]-\Delta[kf\dots v,\alpha]\}^{a}-\{\Delta[\ell f\dots v,\alpha]-\Delta[kf\dots v,\alpha]\}^{a}}{\{\Delta[if\dots v,\alpha]-\Delta[\ell f\dots v,\alpha]\}^{a}-\{\Delta[kf\dots v,\alpha]-\Delta[\ell f\dots v,\alpha]\}^{a}}=$$

$$=a\,\frac{\{\Delta[if\dots v,\alpha]-\Delta[kf\dots v,\alpha]\}^{a-1}}{\{\Delta[if\dots v,\alpha]-\Delta[\ell f\dots v,\alpha]\}^{a-1}}. \qquad (5.6)$$

Равенство (5.6) есть уравнение для числа a . Перепишем это уравнение , вводя обозначение

$x = \Delta[(if\dots v,\alpha)] - \Delta[(kf\dots v,\alpha)]$, $y = \Delta[(if\dots v,\alpha)] - \Delta[(lf\dots v,\alpha)]$:

$$[x^a - (x-y)^a]y^{a-1} = a[y^a - (y-x)^a]x^{a-1} . \qquad (5.7)$$

Переставим в уравнении (5.7) переменные x, y, что равносильно перестановке в равенстве (5,6) элементов k, l :

$$[y^a - (y-x)^a]x^{a-1} = a[x^a - (x-y)^a]y^{a-1} . \qquad (5.8)$$

Перемножая правые и левые части уравнений (5.7) и (5.8),находим , что $a^2 = 1$, то есть $a = \pm 1$. Непосредственной подстановкой легко убедиться в том, что $a = +1$ не удовлетворяет уравнению (5.7) и, следовательно,это уравнение имеет единственное решение $a = -1$.

Выпишем точное и наиболее общее выражение для функции $\Lambda[(ilf\dots v,\alpha)]$,полагая в формуле (5.5) $a = -1$:

$$\Lambda[(ilf\dots v,\alpha)] = B[(lf\dots v,\alpha)] +$$

$$+ A[(lf\dots v,\alpha)]\{\Delta[(if\dots v,\alpha)] - \Delta[(lf\dots v,\alpha)]\}^{-1} . \qquad (5.9)$$

Напомним , что в силу обозначения, производная $\Delta_{(i,\alpha)}[(if\dots v,\alpha)]$ нигде не обращается в нуль.

Если теперь функцию (5.9) подставить в определитель(5.I) ,то получим выражение для связи (I.3),которое является следствием эквивалентности уравнений (5.I) ,(5.2),задающих эту связь:

$$\begin{vmatrix} \{\Delta[(ifw\dots v,\alpha)]-\Delta[(lfw\dots v,\alpha)]\}^{-1}\{\Delta[(ifw\dots v,\beta)]-\Delta[(lfw\dots v,\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\Delta[(jfw\dots v,\alpha)]-\Delta[(lfw\dots v,\alpha)]\}^{-1}\{\Delta[(jfw\dots v,\beta)]-\Delta[(lfw\dots v,\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\Delta[(kfw\dots v,\alpha)]-\Delta[(lfw\dots v,\alpha)]\}^{-1}\{\Delta[(kfw\dots v,\beta)]-\Delta[(lfw\dots v,\beta)]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.10)$$

Для случая $m=4$ определитель (5.10) уже задает единственное решение функционального уравнения $\Phi[(ijkl,\alpha\beta)]=0$:

$$\begin{vmatrix} \{\Psi[(i,\alpha)]-\Psi[(l,\alpha)]\}^{-1} & \{\Psi[(i,\beta)]-\Psi[(l,\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\Psi[(j,\alpha)]-\Psi[(l,\alpha)]\}^{-1} & \{\Psi[(j,\beta)]-\Psi[(l,\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\Psi[(k,\alpha)]-\Psi[(l,\alpha)]\}^{-1} & \{\Psi[(k,\beta)]-\Psi[(l,\beta)]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.11)$$

Это решение после некоторых элементарных преобразований можно представить в более симметричной форме (I.6).

При последующих преобразованиях результата(5.10) будем предполагать, что $m \geq 5$. Переставим в определителе (5.10) элементы l, f :

$$\begin{vmatrix} \{\Delta[(ilw\dots v,\alpha)]-\Delta[(flw\dots v,\alpha)]\}^{-1}\{\Delta[(ilw\dots v,\beta)]-\Delta[(flw\dots v,\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\Delta[(jlw\dots v,\alpha)]-\Delta[(flw\dots v,\alpha)]\}^{-1}\{\Delta[(jlw\dots v,\beta)]-\Delta[(flw\dots v,\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\Delta[(klw\dots v,\alpha)]-\Delta[(flw\dots v,\alpha)]\}^{-1}\{\Delta[(klw\dots v,\beta)]-\Delta[(flw\dots v,\beta)]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.12)$$

Уравнения (5.10) и (5.12) определяют , в силу эквивалентности , (j,α) как одну и ту же функцию переменной (i,α) . Сравнивая частные производные , выраженные по известным правилам из неявных заданий (5.10) и (5.12), получаем равенство:

$$\frac{\Delta(i,\alpha)[(ifw\dots v,\alpha)]}{\{\Delta[(ifw\dots v,\alpha)]-\Delta[(lfw\dots v,\alpha)]\}^2}\times\begin{vmatrix}\{\Delta[(jfw\dots v,\beta)]-\Delta[(lfw\dots v,\beta)]\}^{-1} & 1\\ \{\Delta[(kfw\dots v,\beta)]-\Delta[(lfw\dots v,\beta)]\}^{-1} & 1\end{vmatrix} =$$

$$\frac{\Delta(j,\alpha)[(jfw\dots v,\alpha)]}{\{\Delta[(jfw\dots v,\alpha)]-\Delta[(lfw\dots v,\alpha)]\}^2}\times\begin{vmatrix}\{\Delta[(ifw\dots v,\beta)]-\Delta[(lfw\dots v,\beta)]\}^{-1} & 1\\ \{\Delta[(kfw\dots v,\beta)]-\Delta[(lfw\dots v,\beta)]\}^{-1} & 1\end{vmatrix} \tag{5.13}$$

$$=\frac{\Delta(i,\alpha)[(ilw\dots v,\alpha)]}{\{\Delta[(ilw\dots v,\alpha)]-\Delta[(flw\dots v,\alpha)]\}^2}\times\begin{vmatrix}\{\Delta[(jlw\dots v,\beta)]-\Delta[(flw\dots v,\beta)]\}^{-1} & 1\\ \{\Delta[(klw\dots v,\beta)]-\Delta[(flw\dots v,\beta)]\}^{-1} & 1\end{vmatrix}$$

$$\frac{\Delta(j,\alpha)[(jlw\dots v,\alpha)]}{\{\Delta[(jlw\dots v,\alpha)]-\Delta[(flw\dots v,\alpha)]\}^2}\times\begin{vmatrix}\{\Delta[(ilw\dots v,\beta)]-\Delta[(flw\dots v,\beta)]\}^{-1} & 1\\ \{\Delta[(klw\dots v,\beta)]-\Delta[(flw\dots v,\beta)]\}^{-1} & 1\end{vmatrix}$$

Воспользуемся дополнительно уравнениями (5.10) и (5.12), чтобы исключить элемент β из равенства (5.13):

$$\Delta(i,\alpha)[(ifw\dots v,\alpha)]/\Delta(j,\alpha)[(jfw\dots v,\alpha)]\times$$

$$\frac{\Delta[(jfw\dots v,\alpha)]-\Delta[(kfw\dots v,\alpha)]}{\Delta[(ifw\dots v,\alpha)]-\Delta[(kfw\dots v,\alpha)]}\cdot\frac{\Delta[(jfw\dots v,\alpha)]-\Delta[(lfw\dots v,\alpha)]}{\Delta[(ifw\dots v,\alpha)]-\Delta[(lfw\dots v,\alpha)]}=$$

$$=\Delta(i,\alpha)[(ilw\dots v,\alpha)]/\Delta(j,\alpha)[(jfw\dots v,\alpha)]\times \tag{5.14}$$

$$\frac{\Delta[(jlw\dots v,\alpha)]-\Delta[(klw\dots v,\alpha)]}{\Delta[(ilw\dots v,\alpha)]-\Delta[(klw\dots v,\alpha)]}\cdot\frac{\Delta[(jlw\dots v,\alpha)]-\Delta[(flw\dots v,\alpha)]}{\Delta[(ilw\dots v,\alpha)]-\Delta[(flw\dots v,\alpha)]}$$

Все переменные в равенстве (5.I4) ,очевидно, независимые.Полагая $(ijl,\alpha)=const$ и вводя удобные обозначения,получаем выражение для функции $\Delta[(kfw\dots v,\alpha)]$:

$$\Delta[(kfw\dots v,\alpha)]=A_1[(fw\dots v,\alpha)]+ \tag{5.I5}$$

$$+A_2[(fw\dots v,\alpha)]/\{A[(fw\dots v,\alpha)]+B[(kw\dots v,\alpha)]\},$$

причем ,как легко понять из вводимых обозначений $B(k,\alpha)[(kw\dots v,\alpha)]\neq 0$,а также $A_2[(fw\dots v,\alpha)]\neq 0$ и $A+B\neq 0$

Прежде чем подставить функцию (5.I5) в уравнение (5.I0), перепишем, последнее в виде определителя четвертого порядка :

$$\begin{vmatrix} \Delta[(ifw\dots v,\alpha)] & \Delta[(ifw\dots v,\beta)] & \Delta[(ifw\dots v,\alpha)]\times\Delta[(ifw\dots v,\beta)] & 1 \\ \Delta[(jfw\dots v,\alpha)] & \Delta[(jfw\dots v,\beta)] & \Delta[(jfw\dots v,\alpha)]\times\Delta[(jfw\dots v,\beta)] & 1 \\ \Delta[(kfw\dots v,\alpha)] & \Delta[(kfw\dots v,\beta)] & \Delta[(kfw\dots v,\alpha)]\times\Delta[(kfw\dots v,\beta)] & 1 \\ \Delta[(lfw\dots v,\alpha)] & \Delta[(lfw\dots v,\beta)] & \Delta[(lfw\dots v,\alpha)]\times\Delta[(lfw\dots v,\beta)] & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{5.I6}$$

Подставим теперь функцию (5.I5) в уравнение (5.I6). После вынесения из каждого столбца общих множителей , не равных нулю,и проведения некоторых элементарных преобразований, приходим к уравнению

$$\begin{vmatrix} B[(iw\dots v,\alpha)] & B[(iw\dots v,\beta)] & B[(iw\dots v,\alpha)]\times B[(iw\dots v,\beta)] & 1 \\ B[(jw\dots v,\alpha)] & B[(jw\dots v,\beta)] & B[(jw\dots v,\alpha)]\times B[(jw\dots v,\beta)] & 1 \\ B[(kw\dots v,\alpha)] & B[(kw\dots v,\beta)] & B[(kw\dots v,\alpha)]\times B[(kw\dots v,\beta)] & 1 \\ B[(lw\dots v,\alpha)] & B[(lw\dots v,\beta)] & B[(lw\dots v,\alpha)]\times B[(lw\dots v,\beta)] & 1 \end{vmatrix}=0, \tag{5.I7}$$

в котором отсутствует зависимость от переменных $(f,\alpha\beta)$. Поэтому уравнение по всем входящим в него переменным должно быть тождеством . Если провести последовательное дифференцирование

тождества (5.I7) по переменным (i,α) , (i,β) , (j,α) , (k,β), то в результате получаем

$$B(i,\alpha)[(iw\ldots v,\alpha)]\ B(i,\beta)[(iw\ldots v,\beta)]\times$$

$$B(j,\alpha)[(jw\ldots v,\alpha)]\ B(k,\beta)[(kw\ldots v,\beta)]=0,$$

что противоречит необходимому условию $B(i,\alpha)[(iw\ldots v,\alpha)]\neq 0$. Уравнение (5.I7) на самом деле задает связь между компонентами матрицы $\|(ijkl w\ldots v,\alpha\beta)\|$, которая представляет собой подматрицу полной матрицы $\|(ijkl f w\ldots v,\alpha\beta)\|$,что противоречит первому условию задачи.Таким образом, в случае $m\geq 5$, $n=2$ уравнение $\varphi[(ijkl\ldots v,\alpha\beta)]=0$ решения не имеет.

§ 6. Общие преобразования: $m \geqslant n \geqslant 3$.

Перепишем промежуточный результат (4.4I) в виде определителя

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(i\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)] & \Lambda[(i\ell\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \\ \Lambda[(j\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)] & \Lambda[(j\ell\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \\ \Lambda[(k\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)] & \Lambda[(k\ell\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6.1)$$

Переставим в определителе (6.I) элементы β,γ :

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(i\ell\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau)] & \Lambda[(i\ell\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] & 1 \\ \Lambda[(j\ell\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau)] & \Lambda[(j\ell\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] & 1 \\ \Lambda[(k\ell\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau)] & \Lambda[(k\ell\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6.2)$$

В силу эквивалентности уравнения (6.I) и (6.2) определяют, например , (j,α) как одну и ту же функцию переменной (i,α) .Как следствие из сравнения частных производных получаем

$$\frac{\Lambda(i,\alpha)[(i\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]\ \Lambda[(j\ell\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]-\Lambda[(k\ell\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]}{\Lambda(j,\alpha)[(j\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]\ \Lambda[(i\ell\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]-\Lambda[(k\ell\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]} \cdot \qquad (6.3)$$

$$= \frac{\Lambda(i,\alpha)[(i\ell\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau)]\ \Lambda[(j\ell\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]-\Lambda[(k\ell\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]}{\Lambda(j,\alpha)[(j\ell\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau)]\ \Lambda[(i\ell\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]-\Lambda[(k\ell\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]} \cdot$$

В равенстве (6.3) отсутствует зависимость от переменной (k,α) и потому по всем остальным переменным оно должно быть тождеством. Равенство (6.3) представляет собой функционально-дифферен-

циональное уравнение для функции Λ . Положим в уравнении (6.3) $(j,\alpha\gamma\delta\dots\tau)=const$, $(k,\beta\gamma\delta\dots\tau)=const$, $(ijl\dots v,\beta)=const$:

$$\Lambda[(il\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)]=$$

$$=A(i,\alpha)[(il\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\,A_1[(l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)]\,B[(il\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]\,. \quad (6.4)$$

Заметим, что из первого столбца определителя (6.I) всегда можно вынести множитель $A_1[(l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)]\neq 0$, а из второго столбца множитель $A_1[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]\neq 0$. Поэтому в целях сокращения записи удобно провести переопределение функции Λ , чтобы исключить множитель $A_1\neq 0$. С учетом сделанного замечания для функции $\Lambda[(il\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)]$ после интегрирования соотношения (6.4) по переменной (i,α) получаем следующее выражение:

$$\Lambda[(il\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)]=C[(i,\gamma\delta\dots\tau),(l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)]+$$
$$+A[(il\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]B[(il\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]\,. \quad (6.5)$$

Для нахождения функций A , B , C , подставим выражение (6.5) в исходное уравнение (6.3), помня, что $A(i,\alpha)[(il\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)]\neq 0$, $B[(il\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]\neq 0$, а C - достаточно гладкая функция :

$$\frac{B[(il\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]}{B[(jl\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]}\cdot\frac{\Lambda[(jl\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]-\Lambda[(kl\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]}{\Lambda[(il\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]-\Lambda[(kl\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]}= \quad (6.6)$$

$$=\frac{B[(il\dots v,\beta\delta\dots\tau)]}{B[(jl\dots v,\beta\delta\dots\tau)]}\cdot\frac{\Lambda[(jl\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]-\Lambda[(kl\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]}{\Lambda[(il\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]-\Lambda[(kl\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]}$$

Полагаем в уравнении (6.6) $(jk,\beta\gamma\delta\dots\tau)=const$:

$$B[(il\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]/\{\Lambda[(il\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]-C_1[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]\}=$$

$$=\frac{a[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]\,B[(il\dots v,\beta\delta\dots\tau)]}{\Lambda[(il\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]-C_2[(l\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]}, \qquad (67)$$

где коэффициент $a[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]\neq 0$ и введены обозначения

$$C_1[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]=\Lambda[(kl\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]\,|\,(k,\beta\gamma\delta\dots\tau)=const,$$

$$C_2[(l\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]=\Lambda[(kl\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]\,|\,(k,\beta\gamma\delta\dots\tau)=const.$$

Подставим в равенство (6. 7) выражение (6.5) для функции :

$$A[(il\dots v,\beta\delta\dots\tau)]+\frac{C[(i,\gamma\delta\dots\tau),(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]-C_1[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]}{B[(il\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]}= \qquad (6.8)$$

$$=\frac{A[(il\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]}{a[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]}+\frac{C[(i,\beta\delta\dots\tau),(l\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]-C_2[(l\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]}{a[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]\,B[(il\dots v,\beta\delta\dots\tau)]}.$$

Из равенства (6.8) ,полагая $(i,\beta)=const$,получаем связь

$$A[(il\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]/a[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]+E[(i,\delta\dots\tau),(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]=$$

$$=\frac{C[(i,\gamma\delta\dots\tau),(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]-C_1[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]}{B[(il\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]}. \qquad (6.9)$$

Воспользуемся связью (6.9) для некоторых преобразований выражения (6.5);

$$\Lambda[(il\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]=C_1[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]+$$

$$+B[(il\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]\times\{E[(i,\delta\dots\tau),(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]+ \qquad (6.10)$$

$$+A[(il\dots v,\beta\delta\dots\tau)]+A[(il\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]/a[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]\}.$$

Введем для сокращения записи обозначение

$$F[(il\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots z)] = E[(i,\delta\ldots z),(l\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots z)] +$$

$$+A[(il\ldots v,\beta\delta\ldots z)] + A[(il\ldots v,\gamma\delta\ldots z)]/a[(l\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots z)] \qquad (6.11)$$

и подставим функцию (6.10) в уравнение (6.6)

$$\frac{F[(jl\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots z)]/B[(kl\ldots v,\gamma\delta\ldots z)] - F[(kl\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots z)]/B[(jl\ldots v,\gamma\delta\ldots z)]}{F[(il\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots z)]/B[(kl\ldots v,\gamma\delta\ldots z)] - F[(kl\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots z)]/B[(il\ldots v,\gamma\delta\ldots z)]} =$$

(6.12)

$$= \frac{F[(jl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots z)]/B[(kl\ldots v,\beta\delta\ldots z)] - F[(kl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots z)]/B[(jl\ldots v,\beta\delta\ldots z)]}{F[(il\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots z)]/B[(kl\ldots v,\beta\delta\ldots z)] - F[(kl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots z)]/B[(il\ldots v,\beta\delta\ldots z)]} .$$

Продифференцируем равенство (6.12) по переменной (j,β) :

$$\frac{F[(il\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots z)]/B[(kl\ldots v,\gamma\delta\ldots z)] - F[(kl\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots z)]/B[(il\ldots v,\gamma\delta\ldots z)]}{A_{(j,\beta)}[(jl\ldots v,\beta\delta\ldots z)]/B[(kl\ldots v,\gamma\delta\ldots z)]} =$$

(6.13)

$$= \frac{F[(il\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots z)]/B[(kl\ldots v,\beta\delta\ldots z)] - F[(kl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots z)]/B[(il\ldots v,\beta\delta\ldots z)]}{\dfrac{A_{(j,\beta)}[(jl\ldots v,\beta\delta\ldots z)]}{a[(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots z)]\,B[(kl\ldots v,\beta\delta\ldots z)]} - \left\{\dfrac{F[(kl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots z)]}{B[(jl\ldots v,\beta\delta\ldots z)]}\right\}_{(j,\beta)}} ,$$

причем результат (6.13) представлен так, что числитель и знаменатель в правой и левой части переставлены местами . Легко понять, что ни один из знаменателей не обращается в нуль.

Продифференцируем дополнительно результат (6.13) по переменной (i,β) :

$$A(i,\beta)[(i l \dots v, \beta\delta \dots \tau)] / A(j,\beta)[(j l \dots v, \beta\delta \dots \tau)] =$$

$$= \frac{\dfrac{A(i,\beta)[(i l \dots v, \beta\delta \dots \tau)]}{a[(l \dots v, \chi\beta\delta \dots \tau)]\, B[(k l \dots v, \beta\delta \dots \tau)]} \cdot \left\{ \frac{F[(k l \dots v, \chi\beta\delta \dots \tau)]}{B[(i l \dots v, \beta\delta \dots \tau)]} \right\}_{(i,\beta)}}{\dfrac{A(j,\beta)[(j l \dots v, \beta\delta \dots \tau)]}{a[(l \dots v, \chi\beta\delta \dots \tau)]\, B[(k l \dots v, \beta\delta \dots \tau)]} \cdot \left\{ \frac{F[(k l \dots v, \chi\beta\delta \dots \tau)]}{B[(j l \dots v, \beta\delta \dots \tau)]} \right\}_{(j,\beta)}},$$

откуда легко получаем равенство

$$\frac{F[(k l \dots v, \chi\beta\delta \dots \tau)]}{A(i,\beta)[(i l \dots v, \beta\delta \dots \tau)]} \cdot \left\{ \frac{1}{B[(i l \dots v, \beta\delta \dots \tau)]} \right\}_{(i,\beta)} = \tag{6.I4}$$

$$= \frac{F[(k l \dots v, \chi\beta\delta \dots \tau)]}{A(j,\beta)[(j l \dots v, \beta\delta \dots \tau)]} \cdot \left\{ \frac{1}{B[(j l \dots v, \beta\delta \dots \tau)]} \right\}_{(j,\beta)}.$$

Дифференцируя далее равенство (6.I4) по переменной (k,χ), получаем дифференциальное соотношение между функциями $A[(i l \dots v, \beta\delta \dots \tau)]$ и $B[(i l \dots v, \beta\delta \dots \tau)]$:

$$b[(l \dots v, \beta\delta \dots \tau)] = \tag{6.I5}$$

$$= \frac{1}{A(i,\beta)[(i l \dots v, \beta\delta \dots \tau)]} \cdot \left\{ \frac{1}{B[(i l \dots v, \beta\delta \dots \tau)]} \right\}_{(i,\beta)},$$

откуда после интегрирования по переменной (i,β), устанавливаем связь

$$\{B[(il\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\}^{-1} = b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\,A[(il\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] + \tag{6.I6}$$

$$+ H[(i,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] .$$

Напомним , что $B[(il\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] = 0$ - достаточно гладкая функция, коэффициент $b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]$ и слагаемое $H[(i,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]$ не имеют особенностей.В области переменных $(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)$, где $b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]=0$, слагаемое H не должно обращаться в нуль.

Продифференцируем равенство (6.I3) по переменной (i,γ) , воспользовавшись соотношением (6.I5):

$$\frac{1/a[(l\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]\,B[(kl\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] - b[(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\,F[(kl\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]}{1/B[(kl\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]} =$$

$$= \frac{1/B[(kl\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]}{1/a[(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]\,B[(kl\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] - b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\,F[(kl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]} . \tag{6.I7}$$

Раскроем полностью результат (6.I7), подставив в него обозначение (6.II) и связь (6.I6):

$$\{b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\,A[(kl\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] + H[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\}\times$$

$$\times\{b[(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\,A[(kl\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] + H[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\} =$$

$$= \{b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\,A[(kl\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] + E[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]\times \tag{6.I8}$$

$$\times b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] - H[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]/a[(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]\}\times$$

$$\times\{b[(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\,A[(kl\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] + E[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]\times$$

$$b[(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] - H[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]/a[(l\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]\} .$$

Если равенство (6.I8) продифференцировать по переменной (k,γ), учитывая, что производная $A(k,\gamma)[(k\ell\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] \neq 0$, то легко получим следующую связь:

$$b[(\ell\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\,b[(\ell\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\,E[(k,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] =$$

$$= b[(\ell\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\,H[(k,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]/a[(\ell\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] + \tag{6.I9}$$

$$+ b[(\ell\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\,H[(k,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)].$$

Связь (6.I9) выполняется также и в случае перестановки элементов β,γ, в чем можно убедиться, дифференцируя равенство (6.I8) по переменной (k,β).

Из установленного соотношения (6.I9) вытекает такое следствие. Пусть в некоторой области $b[(\ell\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] = 0$. Тогда соотношение (6.I9) упрощается:

$$b[(\ell\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\,H[(k,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] = 0.$$

Выше, однако, было отмечено, что при $b[(\ell\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] = 0$ функция $H[(k,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] \neq 0$ и потому коэффициент $b[(\ell\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]$ также равен нулю. Верно также и обратное утверждение, что при $b[(\ell\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] = 0$, коэффициент $b[(\ell\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]$ обращается в нуль.

Таким образом, коэффициенты в $b[(\ell\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]$ и $b[(\ell\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]$ либо одновременно равны нулю, либо одновременно отличны от нуля. В соответствии с этим обстоятельством можно отдельно рассматривать такие два случая:

I. $b[(\ell\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] = b[(\ell\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] = 0$, (6.20)

$$2.\ b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\neq 0\ ,\ b[(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\neq 0 \qquad (6.21)$$

Если соотношение (6.19) подставить в исходное равенство (6.18), то автоматически получаем вторую связь:

$$H[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\,H[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] =$$

$$=\{b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\,E[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] -$$

$$-H[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]/a[(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]\}\times \qquad (6.22)$$

$$\times\{b[(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\,E[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] -$$

$$-H[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]/a[(l\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]\}\ .$$

Третью связь, необходимую для дальнейших рассуждений, можно получить, дифференцируя равенство (6.13) по переменной (k,β). При этом надо заметить, что знаменатель правой части равенства (6.13), не зависит от переменной (k,β), в чем легко убедиться, если воспользоваться выражениями (6.11) и (6.16):

$$B[(kl\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]/B[(il\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] =$$

$$=\frac{1/a[(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]\,B[(il\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]-b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\,F[(il\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]}{1/a[(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]\,B[(kl\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]-b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\,F[(kl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]}$$

или, после подстановки выражений (6.11) и (6.16):

$$\{b[(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\,A[(il\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]+H[(i,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\}\times$$

$$\times\{b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\,A[(kl\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]+E[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]\times$$

$$\times b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] - H[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]/a[(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]\} =$$

$$= \{b[(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]A[(kl\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] + H[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\}\times \quad (6.23)$$

$$\times\{b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]A[(il\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] + E[(i,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]\times$$

$$\times b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] - H[(i,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]/a[(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]\}.$$

Равенство (6.23) можно значительно упростить, если дополнительно воспользоваться соотношением (6.19):

$$H[(i,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\{b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]E[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] -$$

$$- H[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]/a[(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]\} = \quad (6.24)$$

$$= H[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\{b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]E[(i,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] -$$

$$- H[(i,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]/a[(l\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]\}.$$

Полученная связь между функциями справедлива, разумеется также и при перестановленных элементах β,γ. Вообще говоря, все три соотношения (6.19), (6.22) и (6.24) носят универсальный характер, то есть имеют место при любых наборах элементов, так как при выводе этих соотношений никаких ограничений на выбор элементов не возникло.

Напомним, что полное выражение для функции $\Lambda[(il\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]$ согласно формулам (6.10) и (6.16) будет следующим

$$\Lambda[(il\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] = C_1[(l\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] + \quad (6.25)$$

$$+\{A[(il\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] + A[(il\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]/a[(l\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] +$$

$$+ E[(i,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]\}\times$$

$$\times\{b[(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]A[(il\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] + H[(i,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\}^{-1},$$

причем между функциями, входящими в выражение (6.25) имеются связи, задаваемые соотношениями (6.I9), (6.22) и (6.24). Как мы видели, связь (6.I9) приводит к четкому выделению двух непересекающихся случаев (6.20) и (6.2I).

Рассмотрим сначала более подробно первый из них:

$$\text{I.}\quad b[(\ell\ldots\upsilon,\beta\delta\ldots\tau)] = b[(\ell\ldots\upsilon,\gamma\delta\ldots\tau)] = 0\ . \qquad (6.20)$$

В этом случае соотношение (6.I9) превращается в тождество, а две другие связи (6.22) и (6.24) принимают более простой вид:

$$a[(\ell\ldots\upsilon,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]\, a[(\ell\ldots\upsilon,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] = 1\ , \qquad (6.26)$$

$$H[(i,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots\upsilon,\gamma\delta\ldots\tau)]\, H[(k,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots\upsilon,\beta\delta\ldots\tau)] =$$

$$= H[(i,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots\upsilon,\beta\delta\ldots\tau)]\, H[(k,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots\upsilon,\gamma\delta\ldots\tau)]\ . \qquad (6.27)$$

Подставим условия (6.20) и (6.27) в равенство (6.I3):

$$F[(i\ell\ldots\upsilon,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] - F[(k\ell\ldots\upsilon,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] \times$$

$$\times H[(i,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots\upsilon,\beta\delta\ldots\tau)] / H[(k,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots\upsilon,\beta\delta\ldots\tau)] =$$

$$= a[(\ell\ldots\upsilon,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]\{F[(i\ell\ldots\upsilon,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] - F[(k\ell\ldots\upsilon,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] \times \qquad (6.28)$$

$$\times H[(i,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots\upsilon,\beta\delta\ldots\tau)] / H[(k,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots\upsilon,\beta\delta\ldots\tau)]\}\ .$$

В полученнное соотношение подставим выражение (6.II), имея в виду связь (6.26):

$$E[(i,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots\upsilon,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] - a[(\ell\ldots\upsilon,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]\, E[(i,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots\upsilon,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] =$$

$$= \{H[(i,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots\upsilon,\beta\delta\ldots\tau)] / H[(k,\delta\ldots\tau),(\ell\ldots\upsilon,\beta\delta\ldots\tau)]\} \times \qquad (6.29)$$

$$\times\{E[(k,\delta\dots\tau),(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]-a[(l\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]E[(k,\delta\dots\tau),(l\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]\}.$$

В соотношение (6.27) положим $(k,\delta\dots\tau)=const$, $(l\dots v,\gamma)=const$:

$$H[(i,\delta\dots\tau),(l\dots v,\beta\delta\dots\tau)]= \tag{6.30}$$
$$=H_1[(il\dots v,\delta\dots\tau)]\,H_2[(l\dots v,\beta\delta\dots\tau)],$$

причем функции H_1 и H_2 в рассматриваемой области в нуль не обращаются.

Полагая теперь в равенстве (6.29) $(k,\delta\dots\tau)=const$, получаем некоторое свойство функции E по перестановкам элементов β,γ:

$$a[(l\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]\,E[(i,\delta\dots\tau),(l\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]= \tag{6.31}$$
$$=E[(i,\delta\dots\tau),(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]+C[(l\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]H_1[(il\dots v,\delta\dots\tau)].$$

Для функции $\Lambda[(il\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]$ в рассматриваемом случае, в соответствии с представлениями (6.25) и (6.30), можно выписать такое выражение:

$$\Lambda[(il\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]= \tag{6.32}$$
$$=C_1[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]+\tilde{\Lambda}[(il\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]/H_2[(l\dots v,\gamma\delta\dots\tau)],$$

где для сокращения записи введено обозначение

$$\tilde{\Lambda}[(il\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]=$$
$$=\{A[(il\dots v,\beta\delta\dots\tau)]+A[(il\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]/a[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]+ \tag{6.33}$$
$$+E[(i,\delta\dots\tau),(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]\}/H_1[(il\dots v,\delta\dots\tau)].$$

Если в функции (6.32) переставить элементы β,γ и воспользоваться свойствам (6.31), то легко можно установить, что функция $\Lambda[(il\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]$ выражается через

$\tilde{\Lambda}[(i l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]$ без переставленных элементов β,γ следующим образом:

$$\Lambda[(i l\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)] = C_1[(l\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)] +$$
$$+ a[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]\tilde{\Lambda}[(i l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]/H_2[(l\dots v,\beta\delta\dots\tau)] + \quad (6.34)$$
$$+ a[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]\, c[(l\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau)]/H_2[(l\dots v,\beta\delta\dots\tau)] .$$

После этого подставим выражения (6.32) и (6.34) в уравнения (6.I)

$$\begin{vmatrix} \tilde{\Lambda}[(i l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)] & \tilde{\Lambda}[(i l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(j l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)] & \tilde{\Lambda}[(j l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(k l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)] & \tilde{\Lambda}[(k l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.35)$$

и в уравнение (6.2):

$$\begin{vmatrix} \tilde{\Lambda}[(i l\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau)] & \Lambda[(i l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(j l\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau)] & \Lambda[(j l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(k l\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau)] & \Lambda[(k l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0 . \quad (6.36)$$

Заметим, что в определителях (6.35) и (6.36) совпадают вторые и третьи столбцы. Вычтем уравнение (6.36) из уравнения (6.35), пользуясь известным правилом сложения определителей:

$$\begin{vmatrix} \tilde{\Lambda}[(i l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)]-\tilde{\Lambda}[(i l\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau)] & \tilde{\Lambda}[(i l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(j l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)]-\tilde{\Lambda}[(j l\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau)] & \tilde{\Lambda}[(j l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(k l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)]-\tilde{\Lambda}[(k l\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau)] & \tilde{\Lambda}[(k l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0 . \quad (6.37)$$

Как можно заключить из введенного обозначения (6.33), разность $\tilde{\Lambda}[(i l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)]-\tilde{\Lambda}[(i l\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau)]$ не содержит переменной (i,α) и потому результат (6.47) представляет собой тожде-

ство по переменным $(ijk, \beta\gamma\delta\ldots\tau)$, поскольку условие (6.20) не налагает никаких ограничений на область их изменения.

Продифференцируем тождество (6.37) по переменным (i,β) и (j,γ):

$$\begin{vmatrix} -a[(kl\ldots v,\beta\alpha\delta\ldots\tau)] & 1 \\ a[(kl\ldots v,\gamma\alpha\delta\ldots\tau)] & a[(kl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] \end{vmatrix} = 0,$$

где было использовано перестановочное свойство (6.26), Полагая $(l\ldots v,\alpha) = const$, находим выражение коэффициента $a[(kl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)]$:

$$a[(kl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau)] = -\tilde{a}[(kl\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]/\tilde{a}[(kl\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]. \qquad (6.38)$$

Результат (6.38) теперь продифференцируем только по переменной (i,β):

$$\begin{vmatrix} -a[(kl\ldots v,\beta\alpha\delta\ldots\tau)] & 1 & 0 \\ \tilde{\Lambda}[(jl\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]-\tilde{\Lambda}[(jl\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau)] & \tilde{\Lambda}[(jl\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(kl\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]-\tilde{\Lambda}[(kl\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau)] & \Lambda[(kl\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6.39)$$

Умножим второй столбец определителя (6.39) на коэффициент $a[(kl\ldots v,\beta\alpha\delta\ldots\tau)]$ и прибавим к первому столбцу:

$$\tilde{\Lambda}[(jl\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]-\tilde{\Lambda}[(jl\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau)] +$$
$$+ a[(kl\ldots v,\beta\alpha\delta\ldots\tau)]\tilde{\Lambda}[(jl\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)] = \tilde{\Lambda}[(kl\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)] -$$
$$-\Lambda[(kl\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau)] + a[(kl\ldots v,\beta\alpha\delta\ldots\tau)]\tilde{\Lambda}[(kl\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]. \qquad (6.40)$$

В полученное равенство (6.40) подставим обозначение (6.33) для функции $\tilde{\Lambda}$ и выражение (6.38) для коэффициента a:

$$\{E[(j,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]-E[(j,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau)] +$$
$$+ a[(kl\ldots v,\beta\alpha\delta\ldots\tau)]E[(j,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]/H_1[(jl\ldots v,\delta\ldots\tau)] = \qquad (6.41)$$
$$= \{E[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]-E[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau)] +$$
$$+ a[(kl\ldots v,\beta\alpha\delta\ldots\tau)]E[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]/H_1[(kl\ldots v,\delta\ldots\tau)].$$

Полагаем в равенстве (6.41) $(k,\delta\ldots\tau) = const$, $(l\ldots v,\gamma) = const$:

$$\tilde{a}[(l\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]E[(j,\delta\dots\tau),(l\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau)]/H_1[(jl\dots v,\delta\dots\tau)] =$$

$$= E_1[(j,\delta\dots\tau),(l\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] - E_1[(j,\delta\dots\tau),(l\dots v,\beta\delta\dots\tau)] + \quad (6.42)$$

$$+ E_2[(l\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau)].$$

Воспользуемся результатом (6.42) и представим функцию (6.33) в следующем виде:

$$\tilde{\Lambda}[(il\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)] = \{\tilde{a}[(l\dots v,\beta\delta\dots\tau)]\}^{-1} \times$$

$$\times\{\tilde{a}[(l\dots v,\beta\delta\dots\tau)]A[(il\dots v,\beta\delta\dots\tau)]/H_1[(il\dots v,\delta\dots\tau)] -$$

$$- \tilde{a}[(l\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]A[(il\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]/H_1[(il\dots v,\delta\dots\tau)] +$$

$$+ E_1[(i,\delta\dots\tau),(l\dots v,\beta\delta\dots\tau)] - E_1[(i,\delta\dots\tau),(l\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] +$$

$$+ E_2[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]\}.$$

Если ввести новое обозначение

$$\Pi[(il\dots v,\beta\delta\dots\tau)] = E_1[(i,\delta\dots\tau),(l\dots v,\beta\delta\dots\tau)] + \quad (6.43)$$

$$+ \tilde{a}[(l\dots v,\beta\delta\dots\tau)]A[(il\dots v,\beta\delta\dots\tau)]/H_1[(il\dots v,\delta\dots\tau)],$$

то для функции $\tilde{\Lambda}[(il\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]$ можно выписать такое выражение: $\tilde{\Lambda}[(il\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)] = \{\tilde{a}[(l\dots v,\beta\delta\dots\tau)]\}^{-1} \times$

$$\times\{\Pi[(il\dots v,\beta\delta\dots\tau)] - \Pi[(il\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] + E_2[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots\tau)]\}. \quad (6.44)$$

Напомним, что, согласно связи (6.32) между функциями Λ и $\tilde{\Lambda}$, их свойства совпадают. Из обозначения (6.43) следует отличие от нуля производной $\Pi_{(i,\beta)}[(il\dots v,\beta\delta\dots\tau)]$. Подставим выражение (6.44) функции $\tilde{\Lambda}$ в уравнение (6.35):

$$\begin{vmatrix} \Pi[(ilf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & \Pi[(ilf\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & \Pi[(ilf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \Pi[(jlf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & \Pi[(jlf\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & \Pi[(jlf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \Pi[(klf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & \Pi[(klf\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & \Pi[(klf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.45)$$

В исходном определителе (^{6}.35) были отличны от нуля разности $\tilde{\Lambda}[(il\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]-\tilde{\Lambda}[(jl\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]$. В построенном определителе (6.45) это автоматически приводит к отличию от нуля любого минора третьего порядка, окаймленного столбцом из единиц справа и строкой из единиц снизу. Поэтому производная левой части уравнения (6.45) по любой из переменных $(ijk,\alpha\beta\gamma)$ не обращается в нуль.

Основным свойством определителя (6.45) является равноправие входящих в него элементов $i,j,k\in\mathcal{N}$ и $\alpha,\beta,\gamma\in\mathcal{N}$. Перестановка любой пары элементов внутри этих групп приводит только к несущественной перестановке строк и столбцов, не изменяя самого уравнения.

Уравнение (6.45), таким образом, в рамках ограничений, задаваемых условием (6.20), представляет одну из эквивалентных форм универсальной связи (I.3) между компонентами матрицы (I.I)

Перейдем к рассмотрению второго более простого случая (6.2I)

$$2.\ b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]\neq 0,\ b[(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]\neq 0 \qquad (6.2I)$$

а также, очевидно, и $b[(l\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)]\neq 0$.

В этом случае соотношение (6.I9) можно переписать в несколько иной форме:

$$E[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]=$$

$$=H[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]/\,b[(l\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)]+ \qquad (6.46)$$

$$+H[(k,\delta\ldots\tau),(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)]/a[(l\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau)]\,b[(l\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)].$$

Заметим, что условие (6.46) автоматически удовлетворяет соотношениям (6.22) и (6.24).

Выражение (6.25) для функции Λ при условии (6.46) записывается следующим образом

$$\Lambda[(il\dots v,\beta\gamma\delta\dots z)] = C_1[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots z)] +$$

$$+\{A[(il\dots v,\beta\delta\dots z)] + A[(il\dots v,\gamma\delta\dots z)]/a[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots z)] +$$

$$+ H[(i,\delta\dots z),(l\dots v,\beta\delta\dots z)]/b[(l\dots v,\beta\delta\dots z)] +$$

$$+ H[(i,\delta\dots z),(l\dots v,\gamma\delta\dots z)]/a[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots z)]b[(l\dots v,\gamma\delta\dots z)]\}\times$$

$$\times\{b[(l\dots v,\gamma\delta\dots z)]A[(il\dots v,\gamma\delta\dots z)] + H[(i,\delta\dots z),(l\dots v,\gamma\delta\dots z)]\}^{-1}.$$

Если теперь ввести новое обозначение

$$T[(il\dots v,\beta\delta\dots z)] = A[(il\dots v,\beta\delta\dots z)] + \qquad (6.47)$$

$$+ H[(i,\delta\dots z),(l\dots v,\beta\delta\dots z)]/b[(l\dots v,\beta\delta\dots z)],$$

то выражение для функции Λ будет более коротким:

$$\Lambda[(il\dots v,\beta\gamma\delta\dots z)] = C_1[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots z)] + \qquad (6.48)$$

$$+\frac{T[(il\dots v,\beta\delta\dots z)] + T[(il\dots v,\gamma\delta\dots z)]/a[(l\dots v,\beta\gamma\delta\dots z)]}{b[(l\dots v,\gamma\delta\dots z)]\,T[(il\dots v,\gamma\delta\dots z)]}.$$

Подставим функцию (6.48) в исходное уравнение (6.1)

$$\begin{vmatrix} T[(ilf\dots v,\alpha\delta\dots z)] & T[(ilf\dots v,\beta\delta\dots z)] & T[(ilf\dots v,\gamma\delta\dots z)] \\ T[(jlf\dots v,\alpha\delta\dots z)] & T[(jlf\dots v,\beta\delta\dots z)] & T[(jlf\dots v,\gamma\delta\dots z)] \\ T[(klf\dots v,\alpha\delta\dots z)] & T[(klf\dots v,\beta\delta\dots z)] & T[(klf\dots v,\gamma\delta\dots z)] \end{vmatrix} = 0. \qquad (6.49)$$

Напомним, что функция T не обращается в нуль и производные ее по первому аргументу отличны от нуля. Из основных свойств функции Λ следует, что любой минор второго порядка в определителе (6.49) отличен от нуля. Поскольку не обращается в нуль также и сама функция T, то можно сказать, что миноры любого порядка, кроме третьего, в определителе (6.49) отличны от нуля.

Уравнение (6.49) выступает как второе возможное следствие эквивалентности связей (6.I) и (6.2) при дополнительном условии (6.2I)

Взаимоотношение между выражениями для связи, задаваемой уравнениями (6.45) и (6.49) зависит от значения числа m. Если $m=3$, то коэффициент b, стоящий в условиях (6.20) и (6.2I) не содержит переменных и потому никакого разбиения на области, где каждое из условий (6.20), (6.2I) либо выполняется, либо нет, не происходит. Два случая (6.20), (6.2I) четко разделяются и не смешиваются ни при каких перестановках элементов. Несколько иная ситуация возникает, если $m>3$. Хотя перестановка пар элементов внутри групп $i,j,k \in m$ и $\alpha,\beta,\gamma \in n$ переводит каждое из уравнений (6.45) и (6.49) само в себя, перестановка, например, элементов k,l может привести к их взаимному переходу. Действительно, если $b[(lf\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)]=0$, то не обязательно обращается в нуль также и коэффициент $b[(kf\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)]$. Может оказаться, что $b[(kf\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)]\neq 0$.

В случае $m=n=3$ определители (6.45) и (6.49) задают два независимых решения функционального уравнения $\Phi[(ijk,\alpha\beta\gamma)]=0$:

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & \psi[(i,\gamma)] & 1 \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & \psi[(j,\gamma)] & 1 \\ \psi[(k,\alpha)] & \psi[(k,\beta)] & \psi[(k,\gamma)] & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{6.50}$$

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & \psi[(i,\gamma)] \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & \psi[(j,\gamma)] \\ \psi[(k,\alpha)] & \psi[(k,\beta)] & \psi[(k,\gamma)] \end{vmatrix} = 0 . \tag{6.5I}$$

§ 7 Продолжение: $m \geq 4$.

Как было уже отмечено, в случае $m > 3$ может оказаться, что перестановка элементов k, l приведет к взаимному переходу между уравнениями (6.45) и (6.49). Та или иная ситуация возникает в зависимости от значения коэффициентов $b[(lf\ldots v, \alpha\delta\ldots\tau)]$ и $b[(kf\ldots v, \alpha\delta\ldots\tau)]$.

Возможны следующие четыре варианта сочетания значений этих коэффициентов:

$$\text{I.}\quad b[(lf\ldots v, \alpha\delta\ldots\tau)] = 0,\ b[(kf\ldots v, \alpha\delta\ldots\tau)] = 0; \qquad (7.1)$$

$$\text{2.}\quad b[(lf\ldots v, \alpha\delta\ldots\tau)] = 0,\ b[(kf\ldots v, \alpha\delta\ldots\tau)] \neq 0; \qquad (7.2)$$

$$\text{3.}\quad b[(lf\ldots v, \alpha\delta\ldots\tau)] \neq 0,\ b[(kf\ldots v, \alpha\delta\ldots\tau)] = 0; \qquad (7.3)$$

$$\text{4.}\quad b[(lf\ldots v, \alpha\delta\ldots\tau)] \neq 0,\ b[(kf\ldots v, \alpha\delta\ldots\tau)] \neq 0; \qquad (7.4)$$

Напомним , что каждое из условий (7.1)-(7.4) имеет место при замене элемента α на любой другой элемент из множества n , поскольку ,например, как было доказано в предыдущем параграфе, коэффициенты $b[(l\ldots v, \alpha\delta\ldots\tau)]$ и $b[(l\ldots v, \beta\delta\ldots\tau)]$ обращаются или не обращаются в нуль одновременно.Это означает, что, на самом деле, условия (7.1)-(7.4) никаких ограничений на изменение переменных $(ijkf\ldots v, \alpha\beta)$ не налагают.

В первом варианте (7.1) уравнение (6.45) при перестановке индексов k, l сохраняет свою форму, то есть переходит само в себя. Во втором и третьем вариантах (7.2), (7.3) происходит взаимный переход между уравнениями (6.45) и (6.49).В последнем четвертом варианте (7.4) остается неподвижной форма уравнения (6.49),то есть оно переходит само в себя при перестановке элементов k, l .

Перейдем к более подробному рассмотрению каждого из этих

случаев в отдельности.

I. $$b[(\ell f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]=0,\ b[(kf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]=0. \qquad (7.I)$$

Уравнение (6.45) переходит само в себя при перестановке элементов k,ℓ :

$$\begin{vmatrix} \Pi[(ikf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & \Pi[(ikf\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & \Pi[(ikf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \Pi[(jkf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & \Pi[(jkf\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & \Pi[(jkf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \Pi[(\ell kf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & \Pi[(\ell kf\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & \Pi[(\ell kf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.5)$$

Условия (7.I) не налагают никакого ограничения на изменение переменных $(i,\alpha\beta)$.Поэтому уравнения (6.45) и (7.5) определяют (i,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α) .Выражая обычным образом частные производные функции (i,β) по переменной (i,α) из неявных заданий (6.45) и (7.5) , приходим к следующему равенству:

$$\Pi(i,\alpha)[(i\ell f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\begin{vmatrix} \Pi[(j\ell f\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & \Pi[(j\ell f\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \Pi[(k\ell f\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & \Pi[(k\ell f\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\Pi(i,\alpha)[(i\ell f\dots v,\beta\delta\dots\tau)]\begin{vmatrix} \Pi[(j\ell f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & \Pi[(j\ell f\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \Pi[(k\ell f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & \Pi[(k\ell f\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Pi(i,\alpha)[(ikf\dots v,\alpha\delta\dots z)]\begin{vmatrix}\Pi[(jkf\dots v,\beta\delta\dots z)] & \Pi[(jkf\dots v,\gamma\delta\dots z)] & 1\\ \Pi[(lkf\dots v,\beta\delta\dots z)] & \Pi[(lkf\dots v,\gamma\delta\dots z)] & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$= \frac{}{\Pi(i,\beta)[(ikf\dots v,\beta\delta\dots z)]\begin{vmatrix}\Pi[(jkf\dots v,\alpha\delta\dots z)] & \Pi[(jkf\dots v,\gamma\delta\dots z)] & 1\\ \Pi[(lkf\dots v,\alpha\delta\dots z)] & \Pi[(lkf\dots v,\gamma\delta\dots z)] & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}} \cdot \quad (7.6)$$

Равенство (7.6) продифференцируем по переменной (j,β) :

$$\Pi(i,\beta)[(ilf\dots v,\beta\delta\dots z)]\begin{vmatrix}\Pi[(jlf\dots v,\alpha\delta\dots z)] & \Pi[(jlf\dots v,\gamma\delta\dots z)] & 1\\ \Pi[(klf\dots v,\alpha\delta\dots z)] & \Pi[(klf\dots v,\gamma\delta\dots z)] & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} =$$

$$= \Pi(i,\alpha)[(ilf\dots v,\alpha\delta\dots z)]\,\Pi(j,\beta)[(jlf\dots v,\beta\delta\dots z)]\begin{vmatrix}\Pi[(jkf\dots v,\alpha\delta\dots z)] & \Pi[(jkf\dots v,\gamma\delta\dots z)] & 1\\ \Pi[(lkf\dots v,\alpha\delta\dots z)] & \Pi[(lkf\dots v,\gamma\delta\dots z)] & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} \quad (7.7)$$

$$\Pi(i,\beta)[(ikf\dots v,\beta\delta\dots z)]\begin{vmatrix}\Pi[(jkf\dots v,\alpha\delta\dots z)] & \Pi[(jkf\dots v,\gamma\delta\dots z)] & 1\\ \Pi[(lkf\dots v,\alpha\delta\dots z)] & \Pi[(lkf\dots v,\gamma\delta\dots z)] & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$= \frac{}{\Pi(i,\alpha)[(ikf\dots v,\alpha\delta\dots z)]\,\Pi(j,\beta)[(jkf\dots v,\beta\delta\dots z)]} \cdot$$

Дополнительное дифференцирование равенства (7.7) по переменной (j,γ) приводит к соотношению

$$\frac{\Pi(i,\beta)[(il f\dots v,\beta\delta\dots\tau)]\,\Pi(j,\gamma)[(jl f\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]}{\Pi(i,\alpha)[(il f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\,\Pi(j,\beta)[(jl f\dots v,\beta\delta\dots\tau)]} =$$

$$= \frac{\Pi(i,\beta)[(ik f\dots v,\beta\delta\dots\tau)]\,\Pi(j,\gamma)[(jk f\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]}{\Pi(i,\alpha)[(ik f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\,\Pi(j,\beta)[(jk f\dots v,\beta\delta\dots\tau)]} . \qquad (7.8)$$

В полученном результате полагаем $(ikl f\dots v,\beta) = const$, $(jkl f\dots v,\gamma) = const$, $(j,\beta\delta\dots\tau) = const$, $(k,\alpha\delta\dots\tau) = const$:

$$\Pi(i,\alpha)[(il f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] = A(i,\alpha)[(i f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\,B[(il f\dots v,\delta\dots\tau)],$$

откуда после интегрирования по переменной (i,α) получаем выражение для функции Π :

$$\Pi[(il f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] = C[(i,\delta\dots\tau),(l f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] + \qquad (7.9)$$
$$+ A[(i f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\,B[(il f\dots v,\delta\dots\tau)] .$$

Заметим, что в силу введенного обозначения $A(i,\alpha)[(i f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] \neq 0$ и $B[(il f\dots v,\delta\dots\tau)] \neq 0$. Далее продифференцируем равенство (7.7) по переменной (k,γ) :

$$-\frac{\Pi(i,\beta)[(il f\dots v,\beta\delta\dots\tau)]\,\Pi(k,\gamma)[(kl f\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]}{\Pi(i,\alpha)[(il f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\,\Pi(j,\beta)[(jl f\dots v,\beta\delta\dots\tau)]} =$$

$$= \frac{\Pi(i,\beta)[(ik f\dots v,\beta\delta\dots\tau)]\begin{vmatrix}\Pi(k,\gamma)[(jk f\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1\\ \Pi(k,\gamma)[(lk f\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1\end{vmatrix}}{\Pi(i,\alpha)[(ik f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\,\Pi(j,\beta)[(jk f\dots v,\beta\delta\dots\tau)]}$$

и подставим в результат дифференцирования выражение (7.9) для функции Π :

$$-A_{(k,\gamma)}[(kf\dots v,\gamma\delta\dots z]\,B[(kkf\dots v,\delta\dots z]/B[(jlf\dots v,\delta\dots z)] =$$

$$\frac{1}{B[(jkf\dots v,\delta\dots z)]}\begin{vmatrix} C_{(k,\gamma)}[(j,\delta\dots z),(kf\dots v,\gamma\delta\dots z)] & 1 \\ C_{(k,\gamma)}[(l,\delta\dots z),(kf\dots v,\gamma\delta\dots z)] & 1 \end{vmatrix}. \qquad (7.10)$$

Полагаем переменные $(l,\delta\dots z)=const$:

$$C_{(k,\gamma)}[(j,\delta\dots z),(kf\dots v,\gamma\delta\dots z)] = C_1[(kf\dots v,\gamma\delta\dots z)] -$$

$$-\frac{B_1[(kf\dots v,\delta\dots z)]\,B[(jkf\dots v,\delta\dots z)]\,A_{(k,\gamma)}[(kf\dots v,\gamma\delta\dots z)]}{B_1[(jf\dots v,\delta\dots z)]} \qquad (7.11)$$

и подставим выражение (7.11) для производной $C_{(k,\gamma)}[(j,\delta\dots z),(kf\dots v,\gamma\delta\dots z)]$ в предыдущее равенство (7.10)

$$-B[(kkf\dots v,\delta\dots z)]\,B[(jkf\dots v,\delta\dots z)]/B[(jlf\dots v,\delta\dots z)] =$$

$$=-B_1[(kf\dots v,\delta\dots z)]\,B[(jkf\dots v,\delta\dots z)]/B_1[(jf\dots v,\delta\dots z)] + \qquad (7.12)$$

$$+B_1[(kf\dots v,\delta\dots z)]\,B[(lkf\dots v,\delta\dots z)]/B_1[(lf\dots v,\delta\dots z)],$$

где было введено обозначение

$$B_1[(jf\dots v,\delta\dots z)] = B[(jlf\dots v,\delta\dots z)]\,|_{(l,\delta\dots z)=const}.$$

Полагая затем в результате (7.12) переменные $(l,\delta\dots z)=const$, получаем

$$B_1[(kf\dots v,\delta\dots z)]\,B_2[(kf\dots v,\delta\dots z)]/B_3[(f\dots v,\delta\dots z)] = 0,$$

что противоречит необходимому условию $B[(ilf\dots v,\delta\dots z)]\neq 0$.

Таким образом, было показано, что при перестановке элемен-

тов k,l определитель (6.45) не может сохранять своей формы, то есть $b[(kf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\neq 0$. Но с другой стороны элемент k взят произвольно из множества m . Поэтому для всех других элементов , кроме, возможно, элемента l , коэффициент b не обращается в нуль. Перестановка элементов k,l переводит уравнение (6.45) в уравнение (6.49),точно также как и перестановка элементов j,l , поскольку $b[(jf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\neq 0$. В свою очередь это означает, что уравнение (6.49) с переставленными элементами k,l :

$$\begin{vmatrix} T[(ikf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & T[(ikf\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & T[(ikf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] \\ T[(jkf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & T[(jkf\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & T[(jkf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] \\ T[(lkf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & T[(lkf\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & T[(lkf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] \end{vmatrix} = 0$$

инвариантно относительно перестановки элементов j,k . Задача второго варианта (7.2) , следовательно, совпадает с задачей четвертого варианта (7.4) , к рассмотрению которого мы приступим.

$$4.\ b[(lf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\neq 0,\ b[(kf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\neq 0, \qquad (7.4)$$

когда уравнение (6.49) при перестановке элементов k,l сохраняет свою форму:

$$\begin{vmatrix} T[(ikf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & T[(ikf\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & T[(ikf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] \\ T[(jkf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & T[(jkf\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & T[(jkf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] \\ T[(lkf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & T[(lkf\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & T[(lkf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.13)$$

В силу эквивалентности, уравнения (6.49) и (7.I3) определяют (i,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α), откуда, сравнивая частные производные, легко приходим к равенству:

$$\frac{T_{(i,\alpha)}[(ilf\ldots v,\alpha\delta\ldots z)]\begin{vmatrix} T[(jlf\ldots v,\beta\delta\ldots z)] & T[(jlf\ldots v,\gamma\delta\ldots z)] \\ T[(klf\ldots v,\beta\delta\ldots z)] & T[(klf\ldots v,\gamma\delta\ldots z)] \end{vmatrix}}{T_{(i,\beta)}[(ilf\ldots v,\beta\delta\ldots z)]\begin{vmatrix} T[(jlf\ldots v,\alpha\delta\ldots z)] & T[(jlf\ldots v,\gamma\delta\ldots z)] \\ T[(klf\ldots v,\alpha\delta\ldots z)] & T[(klf\ldots v,\gamma\delta\ldots z)] \end{vmatrix}} = \tag{7.I4}$$

$$= \frac{T_{(i,\alpha)}[(ikf\ldots v,\alpha\delta\ldots z)]\begin{vmatrix} T[(jkf\ldots v,\beta\delta\ldots z)] & T[(jkf\ldots v,\gamma\delta\ldots z)] \\ T[(lkf\ldots v,\beta\delta\ldots z)] & T[(lkf\ldots v,\gamma\delta\ldots z)] \end{vmatrix}}{T_{(i,\beta)}[(ikf\ldots v,\beta\delta\ldots z)]\begin{vmatrix} T[(jkf\ldots v,\alpha\delta\ldots z)] & T[(jkf\ldots v,\gamma\delta\ldots z)] \\ T[(lkf\ldots v,\alpha\delta\ldots z)] & T[(lkf\ldots v,\gamma\delta\ldots z)] \end{vmatrix}} .$$

Полагаем в равенстве (7.I4) все переменные, кроме $(ilf\ldots v,\alpha\delta\ldots z)$, некоторым постоянным:

$$T_{(i,\alpha)}[(ilf\ldots v,\alpha\delta\ldots z)] =$$

$$= A_{(i,\alpha)}[(if\ldots v,\alpha\delta\ldots z)]\,B_1[(ilf\ldots v,\delta\ldots z)]\,B_2[(lf\ldots v,\alpha\delta\ldots z)],$$

причем $A_{(i,\alpha)} \neq 0$, $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$. Поскольку в определителе (6.49) из каждой строки можно вынести ненулевой множитель B_1, а из каждого столбца множитель B_2, то после несу-

ществленного переобозначения и интегрирования по переменной получаем следующее выражение для функции T :

$$T[(ilf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] = \tag{7.I5}$$

$$= A[(if\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] + C[(i,\delta\dots\tau),(lf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] .$$

Заметим, что функция (7.I5) обладает следующим очевидным свойством

$$T_{(i,\alpha)}[(ilf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] = T_{(i,\alpha)}[(ikf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] . \tag{7.I6}$$

Продифференцируем равенство (7.I4) по переменной (j,β) ,учитывая свойство (7.I6):

$$\frac{1}{T[(klf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]}\cdot\begin{vmatrix} T[(jlf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & T[(jlf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] \\ T[(klf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & T[(klf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] \end{vmatrix} = \tag{7.I7}$$

$$= \frac{1}{T[(lkf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]}\cdot\begin{vmatrix} T[(jkf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & T[(jkf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] \\ T[(lkf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & T[(lkf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] \end{vmatrix}$$

и после этого по переменной (j,γ) :

$$\frac{T[(klf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]}{T[(klf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]} = \frac{T[(lkf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]}{T[(lkf\dots v,\gamma\delta\dots\tau)]} . \tag{7.I8}$$

В последнем результате (7.I8) полагаем $(klf\dots v,\gamma) = const$:

$$T[(lkf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] = a[(klf\dots v,\delta\dots\tau)]\,T[(klf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] , \tag{7.I9}$$

причем коэффициент $a[(klf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]$ не обращается в нуль. Воспользуемся свойством перестановки (7.I9) и перепишем равенство (7.I7) в таком виде:

$$T[(k\ell f\dots v,\gamma\delta\dots z)]\{T[(j\ell f\dots v,\alpha\delta\dots z)]-T[(jkf\dots v,\alpha\delta\dots z)]\}=$$

$$=T[(k\ell f\dots v,\alpha\delta\dots z)]\{T[(j\ell f\dots v,\gamma\delta\dots z)]-T[(jkf\dots v,\gamma\delta\dots z)]\}. \qquad (7.20)$$

Соотношение (7.20) продифференцируем по переменной (k,γ) :

$$-T[(k\ell f\dots v,\alpha\delta\dots z)]\,T_{(k,\gamma)}[(jkf\dots v,\gamma\delta\dots z)]=$$

$$=T_{(k,\gamma)}[(k\ell f\dots v,\gamma\delta\dots z)]\{T[(j\ell f\dots v,\alpha\delta\dots z)]-T[(jkf\dots v,\alpha\delta\dots z)]\}. \qquad (7.21)$$

В силу свойства перестановки (7.I9) производная $T_{(k,\gamma)}[(jkf\dots v,\gamma\delta\dots z)]$ не равна нулю, так как

$$T_{(k,\gamma)}[(jkf\dots v,\gamma\delta\dots z)]=$$

$$=a[(kjf\dots v,\delta\dots z)]\,T_{(k,\gamma)}[(kjf\dots v,\gamma\delta\dots z)]\neq 0.$$

Полагая в равенстве (7.2I) переменные $(j,\alpha\gamma\delta\dots z)=const$, $(k\ell f\dots v,\gamma)=const$, получаем более точное выражение для функции T:

$$T[(k\ell f\dots v,\alpha\delta\dots z)]=$$

$$=\tilde{a}[(k\ell f\dots v,\delta\dots z)]\{P[(kf\dots v,\alpha\delta\dots z)]-P[(\ell f\dots v,\alpha\delta\dots z)]\}. \qquad (7.22)$$

Коэффициент $\tilde{a}$ и разность, стоящая в фигурных скобках, не обращаются в нуль и не имеют особенностей. Введенная функция P не имеет особенностей и производная ее по первому аргументу отлична от нуля.

Подставим функцию (7.22) в определитель (6.49):

$$\begin{vmatrix} \rho[(ifw\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & \rho[(ifw\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & \rho[(ifw\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \rho[(jfw\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & \rho[(jfw\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & \rho[(jfw\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \rho[(kfw\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & \rho[(kfw\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & \rho[(kfw\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \\ \rho[(\ell fw\dots v,\alpha\delta\dots\tau)] & \rho[(\ell fw\dots v,\beta\delta\dots\tau)] & \rho[(\ell fw\dots v,\gamma\delta\dots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.23)$$

В определителе (7.23) отличны от нуля миноры второго и третьего порядка, содержащие столбец из единиц, так как не обращаются в нуль миноры первого и второго порядка в определителе (6.49).

Уравнение (7.23) является естественным следствием эквивалентности уравнений (6.49) и (7.13). Напомним, что задача второго варианта (7.2) совпадает с задачей варианта (7.4), так как $b[(kf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\neq 0$, $b[(jf\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\neq 0$. Из результата (7.23) следует, что также $b[(\ell f\dots v,\alpha\delta\dots\tau)]\neq 0$, то есть варианты (7.2) и (7.3) невозможны.

В случае $m=4$, $n=3$ результат (7.23) задает единственное решение (в эквивалентном смысле) уравнения $\Phi[(ijk\ell,\alpha\beta\gamma)]=0$:

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & \psi[(i,\gamma)] & 1 \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & \psi[(j,\gamma)] & 1 \\ \psi[(k,\alpha)] & \psi[(k,\beta)] & \psi[(k,\gamma)] & 1 \\ \psi[(\ell,\alpha)] & \psi[(\ell,\beta)] & \psi[(\ell,\gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.24)$$

Прежде чем приступить к доказательству для произвольных значений m и n, остановимся кратко на частном случае $m>n=3$, чтобы сравнить результат с тем, который был получен в пятом параграфе.

Перепишем уравнение (7.23) для $n=3$:

$$\begin{vmatrix} \rho[(ifw\dots v,\alpha)] & \rho[(ifw\dots v,\beta)] & \rho[(ifw\dots v,\gamma)] & 1 \\ \rho[(jfw\dots v,\alpha)] & \rho[(jfw\dots v,\beta)] & \rho[(jfw\dots v,\gamma)] & 1 \\ \rho[(kfw\dots v,\alpha)] & \rho[(kfw\dots v,\beta)] & \rho[(kfw\dots v,\gamma)] & 1 \\ \rho[(lfw\dots v,\alpha)] & \rho[(lfw\dots v,\beta)] & \rho[(lfw\dots v,\gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.25)$$

Переставим элементы l, f :

$$\begin{vmatrix} \rho[(ilw\dots v,\alpha)] & \rho[(ilw\dots v,\beta)] & \rho[(ilw\dots v,\gamma)] & 1 \\ \rho[(jlw\dots v,\alpha)] & \rho[(jlw\dots v,\beta)] & \rho[(jlw\dots v,\gamma)] & 1 \\ \rho[(klw\dots v,\alpha)] & \rho[(klw\dots v,\beta)] & \rho[(klw\dots v,\gamma)] & 1 \\ \rho[(flw\dots v,\alpha)] & \rho[(flw\dots v,\beta)] & \rho[(flw\dots v,\gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.26)$$

Поскольку уравнения (7.25) и (7.26) эквивалентны, они определяют (i,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α) . Отсюда уже легко прийти к следующему равенству:

$$\frac{\rho_{(i,\alpha)}[(ifw\dots v,\alpha)]\,\bar{\rho}[(ifw\dots v,\alpha)]}{\rho_{(i,\beta)}[(ifw\dots v,\beta)]\,\bar{\rho}[(ifw\dots v,\beta)]} = \frac{\rho_{(i,\alpha)}[(ilw\dots v,\alpha)]\,\bar{\rho}[(ilw\dots v,\alpha)]}{\rho_{(i,\beta)}[(ilw\dots v,\beta)]\,\bar{\rho}[(ilw\dots v,\beta)]}, \qquad (7.27)$$

где через $\bar{\rho}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей (7.25)и(7.26).

В равенстве (7.27) полагаем $(jkl,\alpha\beta) = const$, $(jklfw\dots v,\gamma) = const$, $(ifw\dots v,\beta) = const$,то есть фиксируем все переменные ,кроме $(ifw\dots v,\alpha)$:

$$\rho_{(i,\alpha)}[(ifw\dots v,\alpha)] = A_{(i,\alpha)}[(iw\dots v,\alpha)]\,B[(fw\dots v,\alpha)],$$

Откуда после интегрирования по переменной (i,α) получаем выра-

жение для функции $P[(ifw\ldots v,\alpha)]$:

$$P[(ifw\ldots v,\alpha)] = C[(fw\ldots v,\alpha)] + A[(iw\ldots v,\alpha)]\,B[(fw\ldots v,\alpha)]\,. \tag{7.28}$$

Производная $A(i,\alpha)[(iw\ldots v,\alpha)]$ и коэффициент $B[(fw\ldots v,\alpha)]$ не обращаются в нуль.

Подставим функцию (7.28) в уравнение (7.25), вынося, из первых трех столбцов ненулевой множитель B :

$$\begin{vmatrix} A[(iw\ldots v,\alpha)] & A[(iw\ldots v,\beta)] & A[(iw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ A[(jw\ldots v,\alpha)] & A[(jw\ldots v,\beta)] & A[(jw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ A[(kw\ldots v,\alpha)] & A[(kw\ldots v,\beta)] & A[(kw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ A[(lw\ldots v,\alpha)] & A[(lw\ldots v,\beta)] & A[(lw\ldots v,\gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{7.29}$$

В полученном уравнении (7.29) отсутствует зависимость от переменных $(f,\alpha\beta\gamma)$. Продифференцируем это уравнение последовательно по переменным (i,α) , (j,β) , (k,γ) :

$$A(i,\alpha)[(iw\ldots v,\alpha)]\,A(j,\beta)[(jw\ldots v,\beta)]\,A(k,\gamma)[(kw\ldots v,\gamma)] = 0,$$

что противоречит условию $A(i,\alpha)[(iw\ldots v,\alpha)] \neq 0$.В действительности, уравнение (7.29) задает связь между компонентами матрицы $\|(ijklw\ldots v,\alpha\beta\gamma)\|$,которая является подматрицей полной матрицы $\|(ijklfw\ldots v,\alpha\beta\gamma)\|$ и, следовательно ,функциональное уравнение $\varphi[(ijklfw\ldots v,\alpha\beta\gamma)]=0$ в случае $m \geqslant 5$ решения не имеет.

Заметим, что уравнение $\varphi[(ijkl,\alpha\beta)]=0$ для $m = n+2 = 4$ имеет единственное решение (I.6), в то время как уравнение $\varphi[(ijklf,\alpha\beta\gamma)] = 0$ для $m = n+2 = 5$ не имеет ни одного решения. Из дальнейших исследований станет ясно, что уравнение (I.3) не имеет вовсе решений , если $m-n=2$. Исключение составляет единственный случай $m = n+2 = 4$,что дало повод рассмотреть

более детально уравнение $\varphi[(ijkl f \ldots v, \alpha\beta)] = 0$ в пятом параграфе.

§ 8. Метод индукции : $m \geqslant n \geqslant n' \geqslant 3$

В предыдущем параграфе было показано, что в случае $m \geqslant 4$ только уравнение (6.49) удовлетворяет всем условиям задачи и может задавать связь между компонентами матрицы (I.I). Форма (6.49) обладает тем свойством, что элементы $i,j,k \in \mathfrak{M}$ и $\alpha,\beta,\gamma \in \mathfrak{N}$ входят в нее совершенно равноправно, то есть перестановки внутри этих троек оставляют без изменения уравнение (6.49).

Далее доказательство будем проводить методом индукции. Возьмем произвольное число n', удовлетворяющее условию $n \geqslant n' \geqslant 3$. Предположим, что последующие преобразования результата (6.49) для случая $m > n'+1$ приведут к определителю порядка n', имеющему точно такое же строение, как и определитель (6.49), в который равноправно будут входить n' элементов из множества $\mathfrak{M}$ и столько же из множества $\mathfrak{N}$:

$$\begin{vmatrix} T[ipq\dots v,\alpha\mu\dots\tau] & T[ipq\dots v,\beta\mu\dots\tau] & T[ipq\dots v,\varepsilon\mu\dots\tau] \\ T[jpq\dots v,\alpha\mu\dots\tau] & T[jpq\dots v,\beta\mu\dots\tau] & T[jpq\dots v,\varepsilon\mu\dots\tau] \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ T[spq\dots v,\alpha\mu\dots\tau] & T[spq\dots v,\beta\mu\dots\tau] & T[spq\dots v,\varepsilon\mu\dots\tau] \\ T[rpq\dots v,\alpha\mu\dots\tau] & T[rpq\dots v,\beta\mu\dots\tau] & T[rpq\dots v,\varepsilon\mu\dots\tau] \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.I)$$

Перестановка элементов внутри подмножеств $\mathfrak{M}' = \{i,j,k,l,\dots,s,r\}$ и $\mathfrak{N}' = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\dots,\sigma,\varepsilon\}$, содержащих по n' элементов каждое, оставляет без изменения уравнение (8.I). Предположим также, что миноры любого порядка до $n'-1$ включительно отличны от нуля и не обращается в нуль производная $T_{(i,\alpha)}[ipq\dots v,\alpha\mu\dots\tau]$. Последнее предположение есть обобщение свойств определителя (6.49).

Докажем, что в случае $n \geq n'+1$ преобразования результата (8.I) приведут к определителю того же типа, порядок которого равен $n'+1$ и в который равноправно будут входить $n'+1$ элементов $i,j,k,l,\dots,s,\tau,\rho \in \mathfrak{M}$ и $n'+1$ элементов $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\dots,\sigma,\varepsilon,\mu \in \mathfrak{N}$. Свойства этого определителя будут точно такие же, как и свойства определителя (8.I).

Приступим к доказательству. Переставим в определителе (8.I) элементы τ,ρ :

$$\begin{vmatrix} T[(i\tau q\dots v,\alpha\mu\dots\tau)] & T[(i\tau q\dots v,\beta\mu\dots\tau)] & \dots & T[(i\tau q\dots v,\varepsilon\mu\dots\tau)] \\ T[(j\tau q\dots v,\alpha\mu\dots\tau)] & T[(j\tau q\dots v,\beta\mu\dots\tau)] & \dots & T[(j\tau q\dots v,\varepsilon\mu\dots\tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T[(s\tau q\dots v,\alpha\mu\dots\tau)] & T[(s\tau q\dots v,\beta\mu\dots\tau)] & \dots & T[(s\tau q\dots v,\varepsilon\mu\dots\tau)] \\ T[(\rho\tau q\dots v,\alpha\mu\dots\tau)] & T[(\rho\tau q\dots v,\beta\mu\dots\tau)] & \dots & T[(\rho\tau q\dots v,\varepsilon\mu\dots\tau)] \end{vmatrix} = 0. \tag{8.2}$$

Уравнения (8.I) и (8.2) определяют, например, (i,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α). Из сравнения частных производных функции (i,β) по переменной (i,α), выраженных обычным образом по неявным заданиям (8.I) и (8.2), приходим к такому соотношению:

$$\frac{T_{(i,\alpha)}[(i\rho q\dots v,\alpha\mu\dots\tau)]\,\overline{T}[(i\rho q\dots v,\alpha\mu\dots\tau)]}{T_{(i,\beta)}[(i\rho q\dots v,\beta\mu\dots\tau)]\,\overline{T}[(i\rho q\dots v,\beta\mu\dots\tau)]} = \tag{8.3}$$

$$= \frac{T_{(i,\alpha)}[(i\tau q\dots v,\alpha\mu\dots\tau)]\,\overline{T}[(i\tau q\dots v,\alpha\mu\dots\tau)]}{T_{(i,\beta)}[(i\tau q\dots v,\beta\mu\dots\tau)]\,\overline{T}[(i\tau q\dots v,\beta\mu\dots\tau)]},$$

где через $\overline{T}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей (8.I) и (8.2).

В соотношении (8.3) фиксируем все переменные, кроме $(ipq\dots v, d\mu\dots z)$:

$$T(i,\alpha)[(ipq\dots v, d\mu\dots z)] =$$

$$= A(i,\alpha)[(iq\dots v, d\mu\dots z)]\, C_1[(ipq\dots v, \mu\dots z)]\, C_2[(pq\dots v, d\mu\dots z)] ,$$

причем производная $A(i,\alpha)$ и коэффициенты C_1 , C_2 не имеют нулей и особенностей. Заметим, что в определителе (8.I) всегда можно ввести несущественное пере/определение функции T , выносся из каждой строки множитель $C_1 \neq 0$, а из каждого столбца множитель $C_2 \neq 0$.

Интегрируя последнее соотношение по переменной (i,α) с учетом сделанного замечания, получаем выражение для функции T :

$$T[(ipq\dots v, d\mu\dots z)] =$$

$$= A[(iq\dots v, d\mu\dots z)] + C[(i,\mu\dots z),(pq\dots v, d\mu\dots z)] . \qquad (8.4)$$

Поскольку в этом случае $T(i,\alpha)[(ipq\dots v, d\mu\dots z)] = A(i,\alpha)[(iq\dots v, d\mu\dots z)] = T(i,\alpha)[(irq\dots v, d\mu\dots z)]$, соотношение (8.3) можно переписать в следующем виде:

$$\overline{T}[(ipq\dots v, d\mu\dots z)]\, \overline{T}[(irq\dots v, \beta\mu\dots z)] = \qquad (8.5)$$

$$= \overline{T}[(irq\dots v, d\mu\dots z)]\, \overline{T}[(ipq\dots v, \beta\mu\dots z)] .$$

Будем понижать порядок алгебраических дополнений, входящих в соотношение (8.5). Продифференцируем сначала соотношение (8.5)

Продифференцируем сначала соотношение (8.5) по переменной (j,α). Эта операция на единицу понизит порядок алгебраических дополнений $\overline{T}[(ipq\ldots v,\beta\mu\ldots\tau)]$ и $\overline{T}[(irq\ldots v,\beta\mu\ldots\tau)]$. Затем продифференцируем результат по переменной (j,γ), что приводит к понижению порядка алгебраических дополнений $\overline{T}[(ipq\ldots v,\alpha\mu\ldots\tau)]$ и $\overline{T}[(irq\ldots v,\alpha\mu\ldots\tau)]$. По такой же схеме продифференцируем сначала полученный результат по переменной (k,γ), а затем (k,δ). Будем повторять этот несложный процесс понижения до тех пор, пока в соотношении (8.5) не останутся алгебраические дополнения всего второго порядка:

$$\frac{\begin{vmatrix} T[(spq\ldots v,\beta\mu\ldots\tau)] & T[(spq\ldots v,\varepsilon\mu\ldots\tau)] \\ T[(rpq\ldots v,\beta\mu\ldots\tau)] & T[(rpq\ldots v,\varepsilon\mu\ldots\tau)] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} T[(spq\ldots v,\delta\mu\ldots\tau)] & T[(spq\ldots v,\varepsilon\mu\ldots\tau)] \\ T[(rpq\ldots v,\delta\mu\ldots\tau)] & T[(rpq\ldots v,\varepsilon\mu\ldots\tau)] \end{vmatrix}} = \tag{8.6}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} T[(srq\ldots v,\beta\mu\ldots\tau)] & T[(srq\ldots v,\varepsilon\mu\ldots\tau)] \\ T[(prq\ldots v,\beta\mu\ldots\tau)] & T[(prq\ldots v,\varepsilon\mu\ldots\tau)] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} T[(srq\ldots v,\delta\mu\ldots\tau)] & T[(srq\ldots v,\varepsilon\mu\ldots\tau)] \\ T[(prq\ldots v,\delta\mu\ldots\tau)] & T[(prq\ldots v,\varepsilon\mu\ldots\tau)] \end{vmatrix}}.$$

Если в соотношение (7.I4) подставить выражение (7.I5) для функции T , то результат будет совпадать с равенством (8.6) с точностью до переобозначения элементов. Поэтому для функции $T[(s\tau q\dots v,\alpha\mu\dots\tau)]$ можно выписать выражение (7.22),повторив все предыдущие выкладки:

$$T[(s\tau q\dots v,\alpha\mu\dots\tau)]=$$

$$=\tilde{a}[(s\tau q\dots v,\mu\dots\tau)]\{\rho[(sq\dots v,\alpha\mu\dots\tau)]-\rho[(\tau q\dots v,\alpha\mu\dots\tau)]\}. \tag{8.7}$$

Как и раньше коэффициент $\tilde{a}\neq 0$, не имеет особенностей и, кроме того,$\rho_{(s,\omega)}[(sq\dots v,\alpha\mu\dots\tau)]\neq 0$. Подставим функцию (8.7) в уравнение (8.I):

$$\begin{vmatrix} \rho[(iq\dots v,\alpha\mu\nu\dots\tau)] & \rho[(jq\dots v,\alpha\mu\nu\dots\tau)] & \dots & \rho[(\rho q\dots v,\alpha\mu\nu\dots\tau)] \\ \rho[(iq\dots v,\beta\mu\nu\dots\tau)] & \rho[(jq\dots v,\beta\mu\nu\dots\tau)] & \dots & \rho[(\rho q\dots v,\beta\mu\nu\dots\tau)] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ \rho[(iq\dots v,\sigma\mu\nu\dots\tau)] & \rho[(jq\dots v,\sigma\mu\nu\dots\tau)] & \dots & \rho[(\rho q\dots v,\sigma\mu\nu\dots\tau)] \\ \rho[(iq\dots v,\varepsilon\mu\nu\dots\tau)] & \rho[(jq\dots v,\varepsilon\mu\nu\dots\tau)] & \dots & \rho[(\rho q\dots v,\sigma\mu\nu\dots\tau)] \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.8}$$

В определителе (8.8) отличны от нуля. все миноры до порядка n' включительно. содержащие строку из единиц. Заметим также, что в определитель (8.8) равноправно входят $n'+1$ элементов $i,j,k,l,\dots,s,\tau,\rho\in\mathfrak{M}$. Перестановка любой пары элементов из этой группы приводит только к перестановкам столбцов определителя и потому оставляет неизменным уравнение (8.8).

Дальнейшие преобразования результата (8.8) будем проводить по уже хорошо знакомой схеме. Перставим в определителе (8.8)

элементы ε,μ :

$$\begin{vmatrix} \rho[(iq\ldots\vartheta,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \rho[(jq\ldots\vartheta,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \ldots & \rho[(pq\ldots\vartheta,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)] \\ \rho[(iq\ldots\vartheta,\beta\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \rho[(jq\ldots\vartheta,\beta\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \ldots & \rho[(pq\ldots\vartheta,\beta\varepsilon\nu\ldots\tau)] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho[(iq\ldots\vartheta,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \rho[(jq\ldots\vartheta,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \ldots & \rho[(pq\ldots\vartheta,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] \\ \rho[(iq\ldots\vartheta,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \rho[(jq\ldots\vartheta,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \ldots & \rho[(pq\ldots\vartheta,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8.9)$$

В силу эквивалентности уравнения (8.8) и (8.9) определяют, например, (j,α) как одну и ту же функцию переменной (i,α). Сравнивая частные производные, легко получаем

$$\frac{\rho_{(i,\alpha)}[(iq\ldots\vartheta,\alpha\mu\nu\ldots\tau)]\,\bar{\rho}[(iq\ldots\vartheta,\alpha\mu\nu\ldots\tau)]}{\rho_{(j,\alpha)}[(jq\ldots\vartheta,\alpha\mu\nu\ldots\tau)]\,\bar{\rho}[(jq\ldots\vartheta,\alpha\mu\nu\ldots\tau)]} = \qquad (8.10)$$

$$= \frac{\rho_{(i,\alpha)}[(iq\ldots\vartheta,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)]\,\bar{\rho}[(iq\ldots\vartheta,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)]}{\rho_{(j,\alpha)}[(jq\ldots\vartheta,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)]\,\bar{\rho}[(jq\ldots\vartheta,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)]},$$

где через $\bar{\rho}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей (8.8) и (8.9). Полагаем в равенстве (8.10) все переменные, кроме $(iq\ldots\vartheta,\alpha\mu\nu\ldots\tau)$, некоторым постоянным:

$$\rho_{(i,\alpha)}[(iq\ldots\vartheta,\alpha\mu\nu\ldots\tau)] =$$

$$= A_{(i,\alpha)}[(iq\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)]\,A_1[(q\ldots\vartheta,\alpha\mu\nu\ldots\tau)]\,B[(iq\ldots\vartheta,\mu\nu\ldots\tau)],$$

причем $A_{(i,\alpha)} \neq 0$, $A_1 \neq 0$, $B \neq 0$. Поскольку из каждой строки определителя (8.8) можно вынести множитель $A_1 \neq 0$, удобно провести несущественное переопределение функции ρ и после интегрирования последнего соотношения по переменной (i,α) записать такое выражение для функции ρ :

$$P[(iq\ldots v,\alpha\mu\nu\ldots\tau)] = C[(i,\mu\nu\ldots\tau),(q\ldots v,\alpha\mu\nu\ldots\tau)] + \tag{8.II}$$

$$+ A[(iq\ldots v,\alpha\nu\ldots\tau)]\,B[(iq\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)] .$$

Используя выражение (8.II), перепишем равенство (8.IO):

$$\frac{B[(iq\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)]}{B[(jq\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)]} \times \bar{P}[(iq\ldots v,\alpha\mu\nu\ldots\tau)]\,\bar{P}[(jq\ldots v,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)] = \tag{8.I2}$$

$$\frac{B[(iq\ldots v,\varepsilon\nu\ldots\tau)]}{B[(jq\ldots v,\varepsilon\nu\ldots\tau)]} \times \bar{P}[(iq\ldots v,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)]\,\bar{P}[(jq\ldots v,\alpha\mu\nu\ldots\tau)] .$$

Будем понижать порядок алгебраических дополнений, входящих в равенство (8.I2), следующим образом. Продифференцируем сначала равенство (8.I2) по переменной (j,β) . Это приведет к понижению на единицу порядка алгебраических дополнений $\bar{P}[(iq\ldots v,\alpha\mu\nu\ldots\tau)]$ и $\bar{P}[(iq\ldots v,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)]$.

Затем результат продифференцируем по переменной (k,β) , что приведет к понижению порядка алгебраических дополнений $\bar{P}[(jq\ldots v,\alpha\mu\nu\ldots\tau)]$ и $\bar{P}[(jq\ldots v,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)]$. Далее дифференцируем полученный результат сначала по переменной (k,γ) , а потом (l,γ) , что приведет к понижению на два порядка всех алгебраических дополнений. Продолжая этот несложный процесс понижения, приходим к такому промежуточному равенству:

$$B[(iq\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)]\begin{vmatrix} \rho[(sq\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & \rho[(sq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \rho[(\tau q\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & \rho[(\tau q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \rho[(\rho q\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & \rho[(\rho q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{}{B[(sq\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)]\begin{vmatrix} \rho[(iq\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & \rho[(iq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \rho[(\tau q\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & \rho[(\tau q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \rho[(\rho q\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & \rho[(\rho q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix}} \qquad (8.13)$$

$$B[(iq\ldots v,\varepsilon\nu\ldots\tau)]\begin{vmatrix} \rho[(sq\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \rho[(sq\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \rho[(\tau q\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \rho[(\tau q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \rho[(\rho q\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \rho[(\rho q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{}{B[(sq\ldots v,\varepsilon\nu\ldots\tau)]\begin{vmatrix} \rho[(iq\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \rho[(iq\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \rho[(\tau q\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \rho[(\tau q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \rho[(\rho q\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \rho[(\rho q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix}} .$$

Продифференцируем равенство (8.13) по переменной (s,σ):

$$\frac{\begin{vmatrix} \rho[(iq\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & \rho[(iq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \rho[(\tau q\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & \rho[(\tau q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \rho[(\rho q\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & \rho[(\rho q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix}}{B[(iq\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)] \begin{vmatrix} \rho[(\tau q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \rho[(\rho q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \rho[(iq\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \rho[(iq\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \rho[(\tau q\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \rho[(\tau q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \rho[(\rho q\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \rho[(\rho q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix}}{B[(iq\ldots v,\varepsilon\nu\ldots\tau)] \begin{vmatrix} \rho[(\tau q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \rho[(\rho q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix}} \cdot \qquad (8.14)$$

И, наконец, продифференцируем равенство (8.I4) по переменной (τ,σ):

$$\frac{B[(iq\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)]}{B[(\tau q\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)]} \cdot \frac{\rho[(\tau q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] - \rho[(\rho q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)]}{\rho[(iq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] - \rho[(\rho q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)]}$$

$$\frac{B[(iq\ldots v,\varepsilon\nu\ldots\tau)]}{B[(\tau q\ldots v,\varepsilon\nu\ldots\tau)]} \cdot \frac{\rho[(\tau q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] - \rho[(\rho q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)]}{\rho[(iq\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] - \rho[(\rho q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)]} \qquad (8.15)$$

Сравним выражения (6.5) для функции $\Lambda[(i\ell\ldots v,\alpha\chi\delta\ldots\tau)]$ и (8.II) для функции $\rho[(iq\ldots v,\alpha\mu\nu\ldots\tau)]$, а также уравнения (6.6) и (8.I5) Замечаем, что обе задачи по нахождению функций Λ и ρ совершенно эквивалентны (совпадают с точностью до переобозначения функций). Для ρ имеют место два выражения. Первое из них можно выписать в соответствии с формулами (6.32) и (6.33):

$$P[(iq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] = C_1[(q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] +$$

$$+\{A[(iq\ldots v,\varepsilon\nu\ldots\tau)] + A[(iq\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)]/a[(q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] + \tag{8.I6}$$

$$+ E[(i,\nu\ldots\tau),(q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)]\}/H_1[(iq\ldots v,\nu\ldots\tau)]H_2[(q\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)] =$$

$$= C_1[(q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] + \tilde{P}[(iq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)]/H_2[(q\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)]\ ,$$

причем выполняются дополнительные условия (6.26) и (6.3I):

$$a[(q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)]\,a[(q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] = 1\ , \tag{8.I7}$$

$$E[(i,\nu\ldots\tau),(q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] + c[(q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)]\,H_1[(iq\ldots v,\nu\ldots\tau)] =$$

$$= a[(q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)]\,E[(i,\nu\ldots\tau),(q\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)]\ . \tag{8.I8}$$

Кроме того, коэффициент $B[(iq\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)]$ представляется в виде произведения (6.30) :

$$B[(iq\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)] = 1/H_1[(iq\ldots v,\nu\ldots\tau)]H_2[(q\ldots v,\mu\nu\ldots\tau)]\ . \tag{8.I9}$$

Подставим функцию (8.I6) и выражение (8.I5) в равенство (8.I4):

$$\frac{\begin{vmatrix} \tilde{P}[(iq\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & \tilde{P}[(iq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \tilde{P}[(rq\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & \tilde{P}[(rq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \tilde{P}[(pq\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)] & \tilde{P}[(pq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix}}{\tilde{P}[(rq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)]-\tilde{P}[(pq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)]} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \tilde{P}[(iq\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \tilde{P}[(iq\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \tilde{P}[(rq\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \tilde{P}[(rq\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \tilde{P}[(pq\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \tilde{P}[(pq\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix}}{\tilde{P}[(rq\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)]-\tilde{P}[(pq\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)]} . \qquad (8.20)$$

Функция $\tilde{P}[(iq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)]$, как легко понять из обозначения (8.I6) и дополнительных условий (8.I7) и (8_I8), связана с функцией $\tilde{P}[(iq\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)]$ с переставленными элементами μ,ε следующим соотношением :

$$\tilde{P}[(iq\ldots v,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] = a[(q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)]\tilde{P}[(iq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] +$$

$$+ a[(q\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)]\tilde{P}[(iq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] .$$

Равенство (8.20) в этом случае может быть преобразовано к виду:

$$\begin{vmatrix} \tilde{P}[(iq\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)]-\tilde{P}[(iq\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \tilde{P}[(iq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \tilde{P}[(rq\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)]-\tilde{P}[(rq\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \tilde{P}[(rq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \tilde{P}[(pq\ldots v,\sigma\mu\nu\ldots\tau)]-\tilde{P}[(pq\ldots v,\sigma\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \tilde{P}[(pq\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.2I)$$

Уравнение (8.21) совпадает с уравнением (6.37); совпадают также выражения для функций $\tilde{\Lambda}$ и $\tilde{\rho}$, что видно из обозначений (6.33) и (8.16). Таким образом, обе задачи эквивалентны и можно использовать результат (6.44) уже решенной задачи:

$$\tilde{P}[(iq\dots v,\varepsilon\mu\nu\dots\tau)] = \{\tilde{a}[(q\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)]\}^{-1}\times$$

$$\times\{\Pi[(iq\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)]-\Pi[(iq\dots v,\mu\nu\dots\tau)]+E_2[(q\dots v,\varepsilon\mu\nu\dots\tau)]\},$$

где, в соответствии с обозначением (6.43),

$$\Pi[(iq\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)] = E_1[(i,\nu\dots\tau),(q\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)]+$$

$$+\tilde{a}[(q\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)]A[(iq\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)]/H_1[(iq\dots v,\nu\dots\tau)],$$

причем $\Pi_{i,\varepsilon}[(iq\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)]\neq 0$. Полное выражение для функции $\rho[(iq\dots v,\varepsilon\mu\nu\dots\tau)]$, согласно обозначению (8.16), будет таким:

$$\rho[(iq\dots v,\varepsilon\mu\nu\dots\tau)] = c_1[(q\dots v,\varepsilon\mu\nu\dots\tau)]+$$

$$+\frac{\Pi[(iq\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)]-\Pi[(iq\dots v,\mu\nu\dots\tau)]+E_2[(q\dots v,\varepsilon\mu\nu\dots\tau)]}{\tilde{a}[(q\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)]\,H_2[(q\dots v,\mu\nu\dots\tau)]}. \qquad (8.22)$$

Подставим функцию (8.22) в исходный определитель (8.8):

$$\begin{vmatrix}
\Pi[(iqh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)] & \dots & \Pi[(\tau qh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)] & \Pi[(\rho qh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)] & 1\\
\Pi[(iqh\dots v,\beta\nu\dots\tau)] & \dots & \Pi[(\tau qh\dots v,\beta\nu\dots\tau)] & \Pi[(\rho qh\dots v,\beta\nu\dots\tau)] & 1\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\Pi[(iqh\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)] & \dots & \Pi[(\tau qh\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)] & \Pi[(\rho qh\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)] & 1\\
\Pi[(iqh\dots v,\mu\nu\dots\tau)] & \dots & \Pi[(\tau qh\dots v,\mu\nu\dots\tau)] & \Pi[(\rho qh\dots v,\mu\nu\dots\tau)] & 1\\
1 & \dots & 1 & 1 & 0
\end{vmatrix} = 0. \qquad (8.23)$$

В определитель (8.23) равноправно входят $n'+1$ элемент $i,j,k,l,...,s,z,\rho \in \mathcal{M}$ и $n'+1$ элемент $\alpha,\beta,\gamma,\delta,...,\sigma,\varepsilon,\mu \in \mathcal{N}$. Перестановка любой пары индексов внутри этих групп оставляет без изменения уравнение (8.23) Строение определителя (8.23) совпадает со строением определителя (6.45). Любой минор в определителе (8.23), окаймленный снизу строкой из единиц, а справа столбцом из единиц ,отличен от нуля.

Второе выражение для функции $\rho[(iq...v,\varepsilon\mu\nu...z)]$ можно выписать в соответствии с формулой (6.48):

$$\rho[(iq...v,\varepsilon\mu\nu...z)] = c_1[(q...v,\varepsilon\mu\nu...z)] + \\ + \frac{T[(iq...v,\varepsilon\nu...z)] + T[(iq...v,\mu\nu...z)]/a[(q...v,\varepsilon\mu\nu...z)]}{b[(q...v,\mu\nu...z)]\,T[(iq...v,\mu\nu...z)]}, \quad (8.24)$$

где согласно обозначению (6.47)

$$T[(iq...v,\varepsilon\nu...z)] = A[(iq...v,\varepsilon\nu...z)] + \\ + H[(i,\nu...z),(q...v,\varepsilon\nu...z)]/b[(q...v,\varepsilon\nu...z)],$$

причем $T(i,\varepsilon)[(iq...v,\varepsilon\nu...z)] \neq 0$ и $T[(iq...v,\varepsilon\nu...z)] \neq 0$.

Подставим функцию (^{8}.24) в определитель(8.8):

$$\begin{vmatrix} T[(iqh...v,\alpha\nu...z)] & ... & T[(rqh...v,\alpha\nu...z)] & T[(\rho qh...v,\alpha\nu...z)] \\ T[(iqh...v,\beta\nu...z)] & ... & T[(rqh...v,\beta\nu...z)] & T[(\rho qh...v,\beta\nu...z)] \\ ..... & & ..... & ..... \\ T[(iqh...v,\varepsilon\nu...z)] & ... & T[(rqh...v,\varepsilon\nu...z)] & T[(\rho qh...v,\varepsilon\nu...z)] \\ T[(iqh...v,\mu\nu...z)] & ... & T[(rqh...v,\mu\nu...z)] & T[(\rho qh...v,\mu\nu...z)] \end{vmatrix} = 0. \quad (8.25)$$

Строение определи-телей (8.25) и (6.49) одинаковое. В уравнение (8.25) равноправно входят $n'+1$ элемент $i,j,k,l,\dots,s,\tau,\rho \in m$ и $n'+1$ элемент $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\dots,\sigma,\varepsilon,\mu \in n$. Легко понять, что все миноры определителя (8.25) до порядка n' включительно отличны от нуля.

Напомним, что задание связи между компонентами матрицы (I.I) с помощью двух различных уравнений (8.23) и (8.25) зависит от значения коэффициента $b[(qh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]$. Если $b[(qh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]=0$, то связь задается уравнением (8.23), если же $b[(qh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]\neq 0$, то уравнением (8.25). Однако, легко показать, что в рассматриваемом случае $m>n'+1$ коэффициент $b[(qh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]$ не обращается в нуль.

Предположим, что $b[(qh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]=0$ и $b[(ph\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]=0$. Тогда при перестановке элементов ρ,q уравнение (8.23) переходит само в себя:

$$\begin{vmatrix} \Pi[(iph\dots v,\alpha\nu\dots\tau)] & \dots & \Pi[(\tau ph\dots v,\alpha\nu\dots\tau)] & \Pi[(qph\dots v,\alpha\nu\dots\tau)] & 1 \\ \Pi[(iph\dots v,\beta\nu\dots\tau)] & \dots & \Pi[(\tau ph\dots v,\beta\nu\dots\tau)] & \Pi[(qph\dots v,\beta\nu\dots\tau)] & 1 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ \Pi[(iph\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)] & \dots & \Pi[(\tau ph\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)] & \Pi[(qph\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)] & 1 \\ \Pi[(iph\dots v,\mu\nu\dots\tau)] & \dots & \Pi[(\tau ph\dots v,\mu\nu\dots\tau)] & \Pi[(qph\dots v,\mu\nu\dots\tau)] & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8.26)$$

В силу эквивалентности уравнения (8.23) и (8.26) определяют (i,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α). Из этого условия легко получаем равенство:

$$\frac{\Pi(i,\alpha)[(iqh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]\,\bar{\Pi}[(iqh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]}{\Pi(i,\beta)[(iqh\dots v,\beta\nu\dots\tau)]\,\bar{\Pi}[(iqh\dots v,\beta\nu\dots\tau)]} = \tag{8.27}$$

$$= \frac{\Pi(i,\alpha)[(iph\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]\,\bar{\Pi}[(iph\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]}{\Pi(i,\beta)[(iph\dots v,\beta\nu\dots\tau)]\,\bar{\Pi}[(iph\dots v,\beta\nu\dots\tau)]},$$

где через $\bar{\Pi}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей (8.23) и (8.26).В равенстве (8.27) полагаем все переменные ,кроме $(iqh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)$, некоторым постоянным:

$$\Pi(i,\alpha)[(iqh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)] =$$

$$= A(i,\alpha)[(ih\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]/E[(iqh\dots v,\nu\dots\tau)]F[(qh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)],$$

причем $A(i,\alpha)[(ih\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]\neq 0$, а также $E\neq 0$, $F\neq 0$.После интегрирования по переменной (i,α) получаем выражение для функции $\Pi[(iqh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]$:

$$\Pi[(iqh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)] = B[(i,\nu\dots\tau),(qh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)] + \tag{8.28}$$

$$+ A[(ih\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]/E[(iqh\dots v,\nu\dots\tau)]F[(qh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)].$$

Перепишем равенство (8.27) в более удобном для дальнейших рассуждений виде:

$$\frac{\bar{\Pi}[(iqh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]\,\bar{\Pi}[(iph\dots v,\beta\nu\dots\tau)]}{\Pi(i,\beta)[(iqh\dots v,\beta\nu\dots\tau)]\,\Pi(i,\alpha)[(iph\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]} = \frac{\bar{\Pi}[(iqh\dots v,\beta\nu\dots\tau)]\,\bar{\Pi}[(iph\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]}{\Pi(i,\beta)[(iph\dots v,\beta\nu\dots\tau)]\,\Pi(i,\alpha)[(iqh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]}. \tag{8.29}$$

Используя выражение (8.28) для функции $\Pi[(iqh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]$, будем понижать порядок алгебраических дополнений, входящих в равенство (8.29) по уже знакомой схеме. Продифференцируем равенство (8.29) сначала по переменной (j,α). Эта операция приведет к понижению на единицу порядка алгебраических дополнений $\bar{\Pi}[(iqh\dots v,\beta\nu\dots\tau)]$ и $\bar{\Pi}[(iph\dots v,\beta\nu\dots\tau)]$. Последующее дифференцирование по переменной (j,γ) уменьшит на единицу порядок алгебраических дополнений $\bar{\Pi}[(iqh\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]$ и $\bar{\Pi}[(iph\dots v,\alpha\nu\dots\tau)]$. Далее дифференцирование по переменным (k,γ) и (k,δ) приведет к уменьшению на два порядка указанных алгебраических дополнений. Повторяя этот простой процесс понижения порядка, приходим к равенству, в котором останутся только алгебраические дополнения третьего порядка:

$$\Pi(i,\varepsilon)[(iqh\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)]\begin{vmatrix}\Pi[(\tau qh\dots v,\beta\nu\dots\tau)] & \Pi[(\rho qh\dots v,\beta\nu\dots\tau)] & 1\\ \Pi[(\tau qh\dots v,\mu\nu\dots\tau)] & \Pi[(\rho qh\dots v,\mu\nu\dots\tau)] & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = \tag{8.30}$$

$$\Pi(i,\beta)[(iqh\dots v,\beta\nu\dots\tau)]\begin{vmatrix}\Pi[(\tau qh\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)] & \Pi[(\rho qh\dots v,\varepsilon\nu\dots\tau)] & 1\\ \Pi[(\tau qh\dots v,\mu\nu\dots\tau)] & \Pi[(\rho qh\dots v,\mu\nu\dots\tau)] & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$\Pi(i,\varepsilon)[(iph\ldots v,\varepsilon\nu\ldots z)]\begin{vmatrix}\Pi[(\gamma ph\ldots v,\beta\nu\ldots z)] & \Pi[(qph\ldots v,\beta\nu\ldots z)] & 1\\ \Pi[(\gamma ph\ldots v,\mu\nu\ldots z)] & \Pi[(qph\ldots v,\mu\nu\ldots z)] & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}\Pi[(\gamma ph\ldots v,\varepsilon\nu\ldots z)] & \Pi[(qph\ldots v,\varepsilon\nu\ldots z)] & 1\\ \Pi[(\gamma ph\ldots v,\mu\nu\ldots z)] & \Pi[(qph\ldots v,\mu\nu\ldots z)] & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}}{\Pi(i,\beta)[(iph\ldots v,\beta\nu\ldots z)]}\qquad(8.30)$$

Легко убедиться в том, что равенство (7.6), которому удовлетворяет функция $\Pi[(ilf\ldots v,\alpha\delta\ldots z)]$ и равенство (8.30), которому удовлетворяет функция $\Pi[(iqh\ldots v,\varepsilon\nu\ldots z)]$, совпадают. То есть обе задачи тождественны, поэтому можно использовать результат первой из них, состоящий в следующем. Если $b[(qh\ldots v,\alpha\nu\ldots z)]=0$, то необходимо должно быть $b[(ph\ldots v,\alpha\nu\ldots z)]\neq 0$. Не существует функции $\Pi[(iqh\ldots v,\varepsilon\nu\ldots z)]$, удовлетворяющей равенству (8.30) и исходным условиям задачи. Коэффициент $b[(ph\ldots v,\alpha\nu\ldots z)]$ отличен от нуля для всех элементов $p\in m$, кроме, может быть, элемента q.

Таким образом, уравнение (8.23) при перестановке элементов p,q не сохраняет своей формы и переходит в уравнение

$$\begin{vmatrix} T[(iph\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)] & \ldots & T[(\tau ph\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)] & T[(qph\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)] \\ T[(iph\ldots\vartheta,\beta\nu\ldots\tau)] & \ldots & T[(\tau ph\ldots\vartheta,\beta\nu\ldots\tau)] & T[(qph\ldots\vartheta,\beta\nu\ldots\tau)] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T[(iph\ldots\vartheta,\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \ldots & T[(\tau ph\ldots\vartheta,\varepsilon\nu\ldots\tau)] & T[(qph\ldots\vartheta,\varepsilon\nu\ldots\tau)] \\ T[(iph\ldots\vartheta,\mu\nu\ldots\tau)] & \ldots & T[(\tau ph\ldots\vartheta,\mu\nu\ldots\tau)] & T[(qph\ldots\vartheta,\mu\nu\ldots\tau)] \end{vmatrix} = 0. \quad (8.31)$$

Поскольку коэффициент $b[(\tau h\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)]\neq 0$,уравнение (8.31) сохраняет свою форму при перестановке элементов τ,ρ .Эта задача в свою очередь совпадает с другой задачей, когда уравнение (8.25) при перестановке элементов ρ, q сохраняет свою форму ,то есть переходит в уравнение (8.31)

В силу эквивалентности, уравнения (8.25) и (8.31) определяют (i,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α) , откуда ,сравнивая частные производные , приходим к равенству:

$$\frac{T_{(i,\alpha)}[(iqh\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)]\,\overline{T}[(iqh\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)]}{T_{(i,\beta)}[(iqh\ldots\vartheta,\beta\nu\ldots\tau)]\,\overline{T}[(iqh\ldots\vartheta,\beta\nu\ldots\tau)]} = \quad (8.32)$$

$$= \frac{T_{(i,\alpha)}[(iph\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)]\,\overline{T}[(iph\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)]}{T_{(i,\beta)}[(iph\ldots\vartheta,\beta\nu\ldots\tau)]\,\overline{T}[(iph\ldots\vartheta,\beta\nu\ldots\tau)]},$$

где через $\overline{T}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей (8.25) и (8.31).

Заметим, что задачи (8.3) и (8.32) совершенно одинаковы. Поэтому для функции $\overline{T}[(iqh\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)]$ сразу можно выписать выражение (8.7):

$$T[(iqh\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)] =$$

$$= \rho[(ih\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)] - \rho[(qh\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)],$$

которое следует подставить в уравнение (7.25):

$$\begin{vmatrix} P[(ih\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)] & \ldots & P[(ph\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)] & P[(qh\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)] \\ P[(ih\ldots\vartheta,\beta\nu\ldots\tau)] & \ldots & P[(ph\ldots\vartheta,\beta\nu\ldots\tau)] & P[(qh\ldots\vartheta,\beta\nu\ldots\tau)] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P[(ih\ldots\vartheta,\varepsilon\nu\ldots\tau)] & \ldots & P[(ph\ldots\vartheta,\varepsilon\nu\ldots\tau)] & P[(qh\ldots\vartheta,\varepsilon\nu\ldots\tau)] \\ P[(ih\ldots\vartheta,\mu\nu\ldots\tau)] & \ldots & P[(ph\ldots\vartheta,\mu\nu\ldots\tau)] & P[(qh\ldots\vartheta,\mu\nu\ldots\tau)] \\ 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (8.33)$$

В определителе (8.33) отличны от нуля все миноры до порядка $n'+1$ включительно, содержащие строку из единиц. Порядок определителя (8.33) на единицу больше порядка определителя (8.9). В него равноправно входят $n'+2$ элементов $i,j,k,l,\ldots$ $\ldots,s,\tau,p,q \in \mathfrak{M}$ и $n'+1$ элементов $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots,\sigma,\varepsilon,\mu \in \mathfrak{N}$

Рассматривая переход уравнения (8.23) в уравнение (8.3I) при перестановке элементов p,q и инвариантность последнего относительно перестановки τ,p можно, очевидно, прийти к тому же результату (8.33), который инвариантен также и относительно перестановки элементов p,q Это означает , что, на самом деле,должно быть $b[(qh\ldots\vartheta,\alpha\nu\ldots\tau)] \neq 0$ и уравнение(8.25) является единственно возможным выражением связи между компонентами матрицы (I.I) в случае $m > n'+1$.

Итак, методом, индукции показано, что для любого n' , удовлетворяющего условию $n \geq n' \geq 3$, уравнение (I.3) записывается единственным образом в виде обращения в нуль определителя (8.I).В уравнение (8.I) равноправно входят n' элементов из каждого множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, если $m > n$. Кроме того, единственно возможным является уравнение (8.8), в которое равноправно входят $n'+1$ элемент из множества $\mathfrak{M}$ и n' элементов из множества $\mathfrak{N}$. Единственность уравнений (8.I) и

(8.8) понимается в эквивалентном смысле.

§ 9. Варианты $m > n = n'$, $m = n > n' = n-1$

Если $m > n = n'$, то в соответствии с единственно возможной записью (8.8) связь (I.3) будет задаваться уравнением

$$\begin{vmatrix} P[(iqh\ldots\vartheta,\alpha)] & P[(jqh\ldots\vartheta,\alpha)] & \ldots & P[(rqh\ldots\vartheta,\alpha)] & P[(pqh\ldots\vartheta,\alpha)] \\ P[(iqh\ldots\vartheta,\beta)] & P[(jqh\ldots\vartheta,\beta)] & \ldots & P[(rqh\ldots\vartheta,\beta)] & P[(pqh\ldots\vartheta,\beta)] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P[(iqh\ldots\vartheta,\tau)] & P[(jqh\ldots\vartheta,\tau)] & \ldots & P[(rqh\ldots\vartheta,\tau)] & P[(pqh\ldots\vartheta,\tau)] \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{9.I}$$

Для случая $m = n+1$ результат (9.I) уже задает единственное решение (I7) функционального уравнения (I.3). Если же $m > n+1$, необходимы дальнейшие преобразования.

Переставим в определителе (9.I) элементы p, q :

$$\begin{vmatrix} P[(iph\ldots\vartheta,\alpha)] & P[(jph\ldots\vartheta,\alpha)] & \ldots & P[(rph\ldots\vartheta,\alpha)] & P[(qph\ldots\vartheta,\alpha)] \\ P[(iph\ldots\vartheta,\beta)] & P[(jph\ldots\vartheta,\beta)] & \ldots & P[(rph\ldots\vartheta,\beta)] & P[(qph\ldots\vartheta,\beta)] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P[(iph\ldots\vartheta,\tau)] & P[(jph\ldots\vartheta,\tau)] & \ldots & P[(rph\ldots\vartheta,\tau)] & P[(qph\ldots\vartheta,\tau)] \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{9.2}$$

Уравнения (9.I) и (9.2) в силу эквивалентности определяют (i,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α) , откуда следует обычное равенство:

$$\frac{P_{(i,\alpha)}[(iqh\dots v,\alpha)]\,\bar{P}[(iqh\dots v,\alpha)]}{P_{(i,\beta)}[(iqh\dots v,\beta)]\,\bar{P}[(iqh\dots v,\beta)]} =$$

$$= \frac{P_{(i,\alpha)}[(iph\dots v,\alpha)]\,\bar{P}[(iph\dots v,\alpha)]}{P_{(i,\beta)}[(iph\dots v,\beta)]\,\bar{P}[(iph\dots v,\beta)]}\,, \qquad (9.3)$$

где через $\bar{P}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей (9.I) и (9.2). В равенстве (9.3) полагаем все переменные, кроме $(iqh\dots v,\alpha)$, некоторым постоянным:

$$P_{(i,\alpha)}[(iqh\dots v,\alpha)] = A_{(i,\alpha)}[(ih\dots v,\alpha)]\,B[(qh\dots v,\alpha)],$$

причем $A_{(i,\alpha)} \neq 0$ и $B \neq 0$. Интегрируя последнее соотношение по переменной (i,α), получаем выражение для функции P:

$$P[(iqh\dots v,\alpha)] =$$

$$= A[(ih\dots v,\alpha)]\,B[(qh\dots v,\alpha)] + C[(qh\dots v,\alpha)]\,. \qquad (9.4)$$

Подставим функцию (9.4) в уравнение (9.I), вынося из каждой строки ненулевой множитель B:

$$\begin{vmatrix} A[(ih\dots v,\alpha)] & A[(jh\dots v,\alpha)] & \dots & A[(rh\dots v,\alpha)] & A[(ph\dots v,\alpha)] \\ A[(ih\dots v,\beta)] & A[(jh\dots v,\alpha)] & \dots & A[(rh\dots v,\beta)] & A[(ph\dots v,\beta)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A[(ih\dots v,\tau)] & A[(jh\dots v,\tau)] & \dots & A[(rh\dots v,\tau)] & A[(ph\dots v,\tau)] \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9.5)$$

В уравнении (9.5) отсутствует зависимость от переменных $(q, \alpha\beta \ldots \tau)$. Продифференцируем это уравнение последовательно по переменным (i,α), $(j,\beta), \ldots, (\tau,\tau)$:

$$A(i,\alpha)[(ih \ldots v,\alpha)]\, A(j,\beta)[(jh \ldots v,\beta)] \ldots A(\tau,\tau)[(\tau h \ldots v,\tau)] = 0.$$

Это противоречит необходимому условию $A(i,\alpha)[(ih \ldots v,\alpha)] \neq 0$. Уравнение (9.5) фактически задает связь между компонентами подматрицы матрицы (I.I) .Поскольку такая связь невозможна , уравнение (I.3) для случая $m > n+1 \geqslant 4$ решения не имеет .

Рассмотрим теперь другой случай, когда $m = n > n' = n-1$ Уравнение (8.8) записывается в следующем виде

$$\begin{vmatrix} \rho[(i,\alpha\tau)] & \rho[(j,\alpha\tau)] & \ldots & \rho[(t,\alpha\tau)] & \rho[(v,\alpha\tau)] \\ \rho[(i,\beta\tau)] & \rho[(j,\beta\tau)] & \ldots & \rho[(t,\beta\tau)] & \rho[(v,\beta\tau)] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho[(i,\varkappa\tau)] & \rho[(j,\varkappa\tau)] & \ldots & \rho[(t,\varkappa\tau)] & \rho[(v,\varkappa\tau)] \\ \rho[(i,\lambda\tau)] & \rho[(j,\lambda\tau)] & \ldots & \rho[(t,\lambda\tau)] & \rho[(v,\lambda\tau)] \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (9.6)$$

В уравнение (9.6) равноправно входят m элементов из множества $\mathcal{M}$ и $m-1$ элементов из множества $\mathcal{N}$. Схема преобразования результата (9,6) обычная.Сначала переставляем элементы λ, τ :

$$\begin{vmatrix} \rho[(i,\alpha\lambda)] & \rho[(j,\alpha\lambda)] & \dots & \rho[(t,\alpha\lambda)] & \rho[(v,\alpha\lambda)] \\ \rho[(i,\beta\lambda)] & \rho[(j,\beta\lambda)] & \dots & \rho[(t,\beta\lambda)] & \rho[(v,\beta\lambda)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho[(i,\varkappa\lambda)] & \rho[(j,\varkappa\lambda)] & \dots & \rho[(t,\varkappa\lambda)] & \rho[(v,\varkappa\lambda)] \\ \rho[(i,\tau\lambda)] & \rho[(j,\tau\lambda)] & \dots & \rho[(t,\tau\lambda)] & \rho[(v,\tau\lambda)] \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9.7)$$

В силу эквивалентности уравнения (9.6)и (9.7) определяют (j,α) как одну и ту же функцию переменной (i,α) . Из сравнения частных производных, выраженных по обычным правилам из неявных заданий (9.6) и (9.7) ,легко получаем:

$$\frac{\rho_{(i,\alpha)}[(i,\alpha\tau)]\,\bar{\rho}[(i,\alpha\tau)]}{\rho_{(j,\alpha)}[(j,\alpha\tau)]\,\bar{\rho}[(j,\alpha\tau)]} = \frac{\rho_{(i,\alpha)}[(i,\alpha\lambda)]\,\bar{\rho}[(i,\alpha\lambda)]}{\rho_{(j,\alpha)}[(j,\alpha\lambda)]\,\bar{\rho}[(j,\alpha\lambda)]}, \qquad (9.8)$$

где через $\bar{\rho}$ обозначены алгебраические дополнения.Полагаем в равенстве (9.8) все переменные , кроме $(i,\alpha\tau)$, некоторым постоянным:

$$\rho_{(i,\alpha)}[(i,\alpha\tau)] = A_{(i,\alpha)}[(i,\alpha)]\,B[(i,\tau)],$$

откуда после интегрирования по переменной (i,α) получаем выражение для функции $\rho[(i,\alpha\tau)]$:

$$P[(i,\alpha\tau)] = A[(i,\alpha)]\,B[(i,\tau)] + C[(i,\tau)]\,. \qquad (9.9)$$

Производная $A_{(i,\alpha)}[(i,\alpha)]$ и коэффициент $B[(i,\tau)]$ отличны от нуля. Используя выражение (9.9) для функции $P[(i,\alpha\tau)]$ будем понижать порядок алгебраических дополнений, входящих в равенство (9.8). Схема понижения повторяет ту, которая была применена к равенству (8.10). В результате получаем следующий аналог равенства (8.14):

$$= \frac{\begin{vmatrix} P[(i,\varkappa\tau)] & P[(t,\varkappa\tau)] & P[(v,\varkappa\tau)] \\ P[(i,\lambda\tau)] & P[(t,\lambda\tau)] & P[(v,\lambda\tau)] \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{B[(i,\tau)]\{P[(t,\lambda\tau)] - P[(v,\lambda\tau)]\}} = \qquad (9.10)$$

$$\frac{\begin{vmatrix} P[(i,\varkappa\lambda)] & P[(t,\varkappa\lambda)] & P[(v,\varkappa\lambda)] \\ P[(i,\tau\lambda)] & P[(t,\tau\lambda)] & P[(v,\tau\lambda)] \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{B[(i,\lambda)]\{P[(t,\tau\lambda)] - P[(v,\tau\lambda)]\}}$$

и после дифференцирования по переменной $(t,\varkappa)$:

$$\frac{B[(t,\tau)]}{B[(i,\tau)]}\cdot\frac{\rho[(i,\lambda\tau)]-\rho[(v,\lambda\tau)]}{\rho[(t,\lambda\tau)]-\rho[(v,\lambda\tau)]}= \tag{9.II}$$

$$=\frac{B[(t,\lambda)]}{B[(i,\lambda)]}\cdot\frac{\rho[(i,\tau\lambda)]-\rho[(v,\tau\lambda)]}{\rho[(t,\tau\lambda)]-\rho[(v,\tau\lambda)]}\cdot$$

Задача по нахождению функции $\rho[(i,\tau\lambda)]$, удовлетворяющей равенствам (9.I0),(9.II) аналогична задаче по нахождению функции $\rho[(i\hat{q}\ldots v,\varepsilon\mu\nu\ldots\tau)]$, удовлетворяющей равенствам (8.I4) и (8.I5) Поэтому сразу можно выписать два выражения, не сводимые друг к другу, в соответствии с формулами (8.22):

$$\rho[(i,\tau\lambda)]=\psi[(i,\tau)]-\psi[(i,\lambda)] \tag{9.I2}$$

и (8.24)

$$\rho[(i,\tau\lambda)]=\psi[(i,\tau)]/\psi[(i,\lambda)]\,. \tag{9.I3}$$

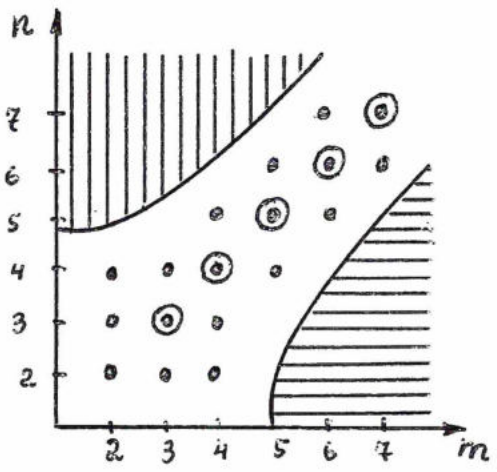
Подставляя функции (9.I2) и (9.I3) в определитель (9.6), получаем два независимых решения (I.8) и (I.9) функционального уравнения (I.3).

Заключение

Некоторые следствия и замечания

I^0 В основной части данной работы найдены все возможные решения функционального уравнения (I.3) для $m=n\geqslant 2$, $m=n+1\geqslant 3$, $m=n+2=4$ и доказано отсутствие решений для других пар значений m и n .Используемое соотношение $m\geqslant n$,вообще говоря, несущественно и введено для исключения многочисленных оговорок. Результаты естественным образом могут быть распространены на все возможные значения чисел $m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$.

. Для наглядности полную сводку решений уравнения (I.3) удобно представить на следующей диаграмме:



На диаграмме точной отмечены единственные решения (в эквивалентном смысле), кружочком с точкой в центре - двойные решения.В заштрихованной области решения отсутствуют.

2^0. Результаты, полученные в работе,могут быть использованы для аксиоматического построения эвклидовой и симплектической геометрии, а также геометрии постоянной кривизны [I0] .Для этого выпишем решения (I.8),(I,9) при дополнительном условии совпадения множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, полагая, например, $i=\alpha, j=\beta, \ldots, v=\tau$:

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \ldots & a_{iv} & 1 \\ a_{ji} & a_{jj} & \ldots & a_{jv} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{vi} & a_{vj} & \ldots & a_{vv} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \ldots & a_{iv} \\ a_{ji} & a_{jj} & \ldots & a_{jv} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{vi} & a_{vj} & \ldots & a_{vv} \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

где $a_{ij} = \psi[i,j]$. Основные соотношения для эвклидовой геометрии и геометрии постоянной кривизны получаются из выписанных решений если $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ii} = a$. В случае же $a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{ii} = 0$ эти решения задают основные соотношения для симплектической геометрии нечетной и четной размерности соответственно.

3^0.В настоящей работе принцип феноменологической симметрии рассмотрен на двух множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Этот случай является одним из вариантов логической схемы,предназначенной для математической формулировки основной идеи теории физических структур - идеи „равноправия". На нем можно увидеть и понять характерные особенности излагаемого математического формализма. Однако, для того ,чтобы описать с единой точки зрения все возможные физические теории феноменологического типа ,необходимо рассмотреть

исходный принцип феноменологической симметрии в его наиболее общем виде [3].

В обобщенной формулировке задана числовая функция, определенная на прямом произведении не двух, а, вообще говоря, k множеств: $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k \to R$, то есть каждому элементу $\langle i_1 i_2 \ldots i_k \rangle$ из $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$ ставится в соответствие действительное число $(i_1 i_2 \ldots i_k)$. Кортежу из прямого произведения $M_1^{m_1} \times M_2^{m_2} \times \ldots \times M_k^{m_k}$ будет при этом соответствовать числовая матрица размера $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$, между компонентами которой существует связь, имеющая универсальный характер, то есть выполняющаяся для любого кортежа. Необходимо найти наиболее общий вид такой связи.

В работах, не включенных в данную диссертацию, удалось показать, что при $K=3$ (тернарные отношения) физические структуры существуют лишь как тривиальные аддитивные соотношения. Это позволяет понять исключительность бинарных отношений, рассмотренных в данной работе.

4°. Как известно, в настоящее время понятие симметрии прочно вошло в современные физические теории. Так, например, физический аспект теории представлений групп состоит в учете и использовании соображений симметрии, связанных с различными физическими процессами. Рассматриваемые в настоящей работе структуры представляют собой математические объекты, выражающие суть нового типа симметрии - симметрии относительно выбора конечных подмножеств. Этот тип симметрии позволяет ввести в физику понятие физического закона. Физический закон есть функциональная связь между измеряемыми на опыте величинами. Среди различных функций, возникающих при описании физической реальности, можно выделить такие, которые задают соотношения, обладающие феноменологической симметрией

вид которых не зависит от выбора физических объектов. Эти соотношения и задают физические законы феноменологического типа.

Возникает вопрос , насколько разнообразными могут быть соотношения обладающие феноменологической симметрией? Оказывается , что требование феноменологической симметрии является настолько общим , чтобы охватить многие разделы физики, и в то же время настолько жестким ,чтобы при заданном ранге симметрии (значении m и n) привести почти однозначно к конкретному выражению физического закона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blumenthal L.M., Theory and application of distance geometry, Oxford, 1953.

2. Гельфанд И.М., Лекции по линейной алгебре, Москва, 1966.

3. Кулаков Ю.И., Элементы теории физических структур, Новосибирск, 1968.

4. Михайличенко Г.Г., Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур, дополнение к [3], стр. 175-226.

5. Кулаков Ю.И., ДАН, 193, № 1, 72-75 (1970).

6. Михайличенко Г.Г., Тезисы докладов по алгебре, математической логике и вычислительной математике конференции педагогических вузов центральной зоны РСФСР, Иваново, 1970г., стр. 165-167.

7. МихайличенкоГ.Г., Решение основного уравнения бинарной физической структуры ранга (3,2), статья, принятая к печати редакцией "Сибирского математического журнала".

8. Эйзенхарт Л.П., Непрерывные группы преобразований, Москва, 1947.

9. Ацель Я., УМН, II, № 3,3- 68 (1956).

10. Кулаков Ю.И., ДАН, 193, № 5 (1970).