НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.Г.Михайличенко

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ПОНЯТИЕМ ФИЗИЧЕСКОГО ЗАКОНА

Диссертация на соискание
учёной степени кандидата
физико-математических наук

Научные руководители:
к.ф.-м.н. Ю.И.Кулаков
д.ф.-м.н. Ю.Г.Решетняк

Новосибирск 1973

С О Д Е Р Ж А Н И Е

I. ВВЕДЕНИЕ

§I. Некоторые примеры..... 4

§2. Принцип феноменологической симметрии..... I0

II. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

§I. Математическая формулировка теории физических структур. Основная теорема..... I6

§2. Общие преобразования: $m \geq n \geq 2$ 38

§3. Продолжение: $m \geq 3$ 47

§4. Частный случай: $m > n = 2$ 6I

§5. Общие преобразования: $m \geq n \geq 3$ 72

§6. Продолжение: $m \geq 4$ 94

§7. Частный случай: $m > n = 3$ I03

§8. Метод индукции: $m \geq n \geq n' \geq 3$..... I07

§9. Завершение доказательства основной теоремы.... I24

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

§I. Некоторые замечания..... I32

§2. Геометрические следствия..... ..... I35

Литература I38

В В Е Д Е Н И Е

§I. Некоторые примеры

Прежде, чем приступить к подробному изложению темы настоящей работы, рассмотрим несколько примеров из геометрии и физики.

Пусть i, j, k – точки евклидовой прямой. Каждой паре точек $\langle ij \rangle$ ставится в соответствие некоторое число (ij) – расстояние между этими точками. Предположим, что на прямой выделено направление и расстоянию (ij) приписывается определенный знак в зависимости от взаимного расположения точек i, j, так что $(ji) = -(ij)$. То есть $(ij) = x_i - x_j$, где x_i – координата точки на прямой. Трем произвольно выбранным точкам i, j, k будут при этом соответствовать три взаимных расстояния $(ij), (ik), (jk)$, которые удовлетворяют уравнению

$$(ij) - (ik) + (jk) = 0. \qquad /B.I/$$

Можно также сказать, что уравнение /B.I/ задает связь между тремя расстояниями. Особенностью связи /B.I/ является ее универсальность, то есть эта связь имеет место для любых трех точек на прямой и не зависит от их взаимного расположения.

Если же перейти к евклидовой прямой без выделенного направления с симметричным расстоянием (ij), то универсальная связь между тремя расстояниями $(ij), (ik), (jk)$ будет задаваться с помощью определителя Кэли–Менгера четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & [(ij)]^2 & [(ik)]^2 & 1 \\ [(ij)]^2 & 0 & [(jk)]^2 & 1 \\ [(ik)]^2 & [(jk)]^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad /B.2/$$

где $[(ij)]^2$ - квадрат расстояния $(ij) = |x_i - x_j|$.

Рассмотрим далее евклидову плоскость, на которой каждой паре точек $< ij >$ ставится в соответствие положительное симметричное расстояние (ij) , причем $[(ij)]^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$, где x_i, y_i координаты точки. Произвольно взятым четырем точкам i, j, k, ℓ будут соответствовать при этом шесть расстояний $(ij), (ik), (i\ell), (jk), (j\ell), (k\ell)$, связь между которыми задается с помощью определителя Кэли-Менгера пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & [(ij)]^2 & [(ik)]^2 & [(i\ell)]^2 & 1 \\ [(ij)]^2 & 0 & [(jk)]^2 & [(j\ell)]^2 & 1 \\ [(ik)]^2 & [(jk)]^2 & 0 & [(k\ell)]^2 & 1 \\ [(i\ell)]^2 & [(j\ell)]^2 & [(k\ell)]^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad /B.3/$$

Связь /B.3/ также оказывается справедливой для любых четырех точек на плоскости, то есть имеет универсальный характер. Если

никакие три точки из четырех не лежат на одной прямой, то между шестью расстояниями другой связи, кроме /В.3/, нет.

Естественным обобщением определителей /В.2/ и /В.3/ является определитель Кэли–Менгера порядка $n+3$ $(n \geq 1)$, с помощью которого задается связь между всеми взаимными расстояниями для любых $n+2$ точек в n -мерном евклидовом пространстве. Метрические пространства и множества, расстояния между точками которых удовлетворяют соотношениям типа /В.2/, /В.3/, подробно изучал *Blumenthal L.M.* в своей монографии [1]. Отметим, однако, что форму определителя Кэли–Менгера *Blumenthal* рассматривал как данную извне, а не как следствие некоторых инвариантных свойств метрики, например, феноменологической симметрии /см. следующий параграф/.

Перйдем теперь к рассмотрению линейных векторных пространств, в которых определено скалярное произведение, сопоставляющее каждой паре векторов $\langle ij \rangle$ некоторое число (ij). В одномерном пространстве любые два вектора i, j линейно зависимы, что приводит к обращению в нуль определителя Грамма второго порядка:

$$\begin{vmatrix} (ii) & (ij) \\ (ji) & (jj) \end{vmatrix} = 0, \qquad /В.4/$$

где $(ij) = x_i x_j$. В двумерном пространстве любые три вектора i, j, k линейно зависимы, поэтому определитель Грама третьего порядка обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} (ii) & (ij) & (ik) \\ (ji) & (jj) & (jk) \\ (ki) & (kj) & (kk) \end{vmatrix} = 0 , \qquad /B.5/$$

где $(ij) = x_i x_j + y_i y_j$. Соотношения /B.4/ и /B.5/ задают связи между всеми скалярными произведениями для любых двух и трех векторов, соответственно. Обобщение на случай n -мерного линейного пространства, очевидно, не представляет затруднения. Обращение в нуль определителя Грама $n+1$ порядка является следствием линейной зависимости любых $n+1$ векторов.

Скалярное произведение (ij) есть, как известно, билинейная форма, соответствующая положительно определенной квадратичной форме. Соотношения типа /B.4/, /B.5/, однако, будут иметь место и в том случае, когда (ij) есть произвольная билинейная форма [2] .

На евклидовой плоскости существует простая связь между площадями треугольников. Пусть каждой тройке $\langle ijk \rangle$ точек плоскости ставится в соответствие величина $(ijk) = x_i y_j + x_j y_k + x_k y_i - x_j y_i - x_k y_j - x_i y_k$, пропорциональная площади треугольника, вершинами которого являются точки i, j, k . Площади треугольника приписывается знак в зависимости от направления обхода точек i, j, k . Четырем произвольно взятым точкам i, j, k, ℓ будут при этом соответствовать четыре значения $(ijk), (ij\ell), (ik\ell), (jk\ell)$ величины, пропорциональной площади, между которыми существует связь, задаваемая уравнением

$$(ijk) - (ij\ell) + (ik\ell) - (jk\ell) = 0 \qquad /B.6/$$

Связь /В.6/ выражает свойство аддитивности площадей на плоскости, что легко понять из геометрических построений.

Во всех примерах, приведенных выше, точки i, j, k, ℓ принадлежали одному и тому же множеству: либо прямой и плоскости, либо линейному пространству. К.М.Кулаков [3] впервые обратил внимание на возможность рассматривать отношения между точками различных множеств. Следующие физические примеры могут проиллюстрировать это обстоятельство.

Пусть i, j - материальные тела, характеристикой которых является масса m, а α, β - ускоряющие системы, характеристикой которых является сила F. Каждой паре $\langle i, \alpha \rangle$ ставится в соответствие ускорение $(i, \alpha) = F_\alpha / m_i$, которое сообщает телу i ускоряющая система α. Двум телам i, j и двум ускоряющим системам α, β будут при этом соответствовать четыре значения ускорения $(i, \alpha), (i, \beta), (j, \alpha), (j, \beta)$, между которыми существует связь, задаваемая уравнением

$$\begin{vmatrix} (i,\alpha) & (i,\beta) \\ (j,\alpha) & (j,\beta) \end{vmatrix} = 0. \qquad /В.7/$$

Соотношение /В.7/ выполняется для любых двух тел и любых двух ускоряющих систем.

Другой пример можно привести из электродинамики постоянных токов.

Пусть i, j, k - проводники, характеризуемые сопротивлением R, а α, β - источники тока, характеризуемые электродвижущей силой E и внутренним сопротивлением r. Каждой паре $\langle i, \alpha \rangle$ ставится в соответствие величина $(i, \alpha) = (R_i + r_\alpha)/E_\alpha$, обратная току, текущему в цепи, состоящей

из проводника i и источника тока α. Трем проводникам i, j, k и двум источникам тока α, β будут при этом соответствовать шесть значений величины, обратной току: $(i,\alpha), (i,\beta), (j,\alpha), (j,\beta), (k,\alpha), (k,\beta)$, между которыми существует связь, задаваемая уравнением

$$\begin{vmatrix} (i,\alpha) & (i,\beta) & 1 \\ (j,\alpha) & (j,\beta) & 1 \\ (k,\alpha) & (k,\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad /B.8/$$

Соотношение /B.8/ выполняется для любых трех проводников и любых двух источников тока.

Заметим, что если в первом примере /B.7/ из каждого множества бралось равное число элементов /по два/, то во втором примере /B.8/ эти числа были разными /по три и два/. Здесь сразу же обнаруживаются новые возможности обобщения соотношений /B.7/ и /B.8/, отличные от схем обобщения определителей Кэли–Менгера /B.3/ и Грама /B.5/ при переходе к пространствам большей размерности.

§2. Принцип феноменологической симметрии

Одно из основных предположений Ю.И.Кулакова [3] состоит в том, что выражения для связей /В.I/ - /В.8/ являются следствием универсальности этих связей в том смысле, что соотношения /В.I/-/В.8/ должны иметь место для любых наборов элементов /точек прямой, плоскости, материальных тел, проводников и т.д./. Это требование составляет содержание принципа феноменологической симметрии, которому ниже будет дано более наглядное геометрическое толкование.

Сформулируем простейшие задачи, руководствуясь принципом феноменологической симметрии. Трем произвольным точкам i, j, k на прямой сопоставляются три взаимных расстояния $(ij), (ik), (jk)$, которые можно рассматривать как координаты некоторой точки в R^3. Предположим, что существует такая функция φ трех переменных, что множество всех точек $[(ij),(ik),(jk)] \in R^3$ совпадает с поверхностью, задаваемой уравнением $\varphi = 0$, то есть

$$\varphi[(ij),(ik),(jk)] = 0 \qquad /В.9/$$

для любых трех точек i, j, k. Необходимо найти выражение для функции φ. При некоторых естественных дополнительных условиях эта задача приводится к функциональному уравнению

$$f(x,y) = f[f(z,x), f(z,y)],$$

решая которое находим вид связи /В.9/:

$$\psi[(ij)] - \psi[(ik)] + \psi[(jk)] = 0, \qquad /В.I0/$$

где $\psi(x)$ - функция одной переменной [4]. Сравнивая результат /В.I0/ и уравнение /В.I/ замечаем, что для их совпадения

достаточно положить $\psi(x) = x$.

Шесть взаимных расстояний, соответствующих четырем произвольным точкам i, j, k, l на плоскости можно рассматривать как координаты некоторой точки в R^6 . Предположим, что множество точек $[(ij), (ik), (il), (jk), (jl), (kl)] \in R^6$ образует в R^6 поверхность, задаваемую уравнением $\varphi = 0$, то есть

$$\varphi[(ij), (ik), (il), (jk), (jl), (kl)] = 0 \qquad /B.II/$$

для любых четырех точек i, j, k, l . Необходимо найти вид связи /B.II/. Очевидно, что соотношение /B.3/ является одним из решений этой задачи, однако, не единственным.

Формулировка задач, соответствующих соотношениям /B.4/ и /B.5/ также не представляет затруднения. Точки $[(ij), (ji), (ii), (jj)] \in R^4$ и $[(ii), (jj), (kk), (ij), (ji), (ik), (ki), (jk), (kj)] \in R^9$ должны образовывать поверхности, задаваемые уравнением $\varphi = 0$, то есть

$$\varphi[(ii), (jj), (ij), (ji)] = 0, \qquad /B.I2/$$

$$\varphi[(ii), (jj), (kk), (ij), (ji), (ik), (ki), (jk), (kj)] = 0 \qquad /B.I3/$$

для любых двух и трех векторов. Заметим, что задачи, соответствующие уравнениям /B.II/ и /B.I2/, /B.I3/ полностью не решены, хотя известны некоторые частные решения.

Четырем точкам i, j, k, l на плоскости сопоставляются четыре значения $(ijk), (ijl), (ikl), (jkl)$ величины, пропорциональной площади, которые задают координаты некоторой точки в R^4. Предположим, что множество точек $[(ijk), (ijl), (ikl), (jkl)] \in R^4$ образует в R^4 поверхность, задаваемую уравнением $\varphi = 0$, то есть

$$\varphi[(ijk), (ijl), (ikl), (jkl)] \in R^4 \qquad /B.I4/$$

для любых четырех точек i, j, k, ℓ . Необходимо найти выражение для функции φ . Эта задача при некоторых дополнительных условиях приводится к функциональному уравнению

$$f(x, y, z) = f[f(s, t, x), f(s, u, y), f(t, u, z)],$$

решая которое находим вид связи /В.I4/ :

$$\psi[(ijk)] - \psi[(ij\ell)] + \psi[(ik\ell)] - \psi[(jk\ell)] = 0, \quad /В.I5/$$

где $\psi(x)$ - функция одной переменной [4] . Соотношение /В.6/ является частным случаем связи /В.I5/, когда $\psi(x) = x$. Примеры /В.I0/ и /В.I5/ показывают, что принцип феноменологической симметрии приводит к достаточно широкому классу связей, так как остается произвол в выборе функции $\psi(x)$.

Задачи, сформулированные для отношений между элементами одного множества /точек прямой, плоскости и т.д./, решены только в самых простых случаях. Иная ситуация возникает при переходе к изучению связей и отношений между элементами различных множеств. В этом случае наиболее полно разработана методика решения, предложенная автором [4] , и получены результаты не только для простых случаев, но и для самой общей постановки.

Двум телам i, j и двум ускоряющим системам α, β сопоставляется четыре значения ускорения $(i,\alpha), (i,\beta), (j,\alpha), (j,\beta)$, которые можно считать координатами некоторой точки в R^4 . Пусть множество точек $[(i,\alpha), (i,\beta), (j,\alpha), (j,\beta)] \in R^4$ образует в R^4 поверхность, задаваемую уравнением $\varphi = 0$, то есть

$$\varphi[(i,\alpha), (i,\beta), (j,\alpha), (j,\beta)] = 0 \quad /В.I6/$$

для любых двух тел i, j и любых двух ускоряющих систем α , β . Требуется найти выражение для функции φ , удовлетворяющее принципу феноменологической симметрии. Эта задача была ре-

шена Е.И.Кулаковым [5] с помощью введенного им метода параметризации. Найдено, что связь /В.I6/ задается уравнением

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] \end{vmatrix} = 0, \qquad /В.I7/$$

где $\psi(x)$ – функция одной переменной. Соотношение /В.7/ является частным случаем уравнения /В.I7/, когда $\psi(x) = x$. Эта задача решена автором и другим методом [4], который можно было бы назвать функциональным, так как он приводит к решению функциональных уравнений типа

$$f(x,y,z) = f[f(x,y,s),s,z].$$

И, наконец, сформулируем задачу, соответствующую связи /В.8/. Трем проводникам i,j,k и двум источникам тока α,β сопоставляется шесть значений величины, обратной току, (i,α), $(i,\beta),(j,\alpha),(j,\beta),(k,\alpha),(k,\beta)$, которые можно считать шестью координатами некоторой точки в R^6. Предположим, что множество точек $[(i,\alpha),(i,\beta),(j,\alpha),(j,\beta),(k,\alpha),(k,\beta)] \in R^6$ совпадает с поверхностью, задаваемой уравнением $\varphi = 0$, то есть

$$\varphi[(i,\alpha),(i,\beta),(j,\alpha),(j,\beta),(k,\alpha),(k,\beta)] = 0 \qquad /В.I8/$$

для любых трех проводников i,j,k и любых двух источников тока α,β. Необходимо найти выражение для функции φ. Эта задача была решена автором методом параметризации [4]. Установлено, что связь /В.I8/, удовлетворяющая принципу феноменологической симметрии, может быть задана уравнением

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & 1 \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & 1 \\ \psi[(k,\alpha)] & \psi[(k,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad /B.19/$$

где $\psi(x)$ – функция одной переменной. Замечаем, что соотношение /В.8/ является частным случаем связи /В.19/, когда $\psi(x) = x$.

Задачи /В.16/ и /В.18/ допускают естественное обобщение, которое было предложено Ю.И.Кулаковым [3]. Имеются два множества $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ произвольной природы. На прямом произведении этих множеств задана числовая функция, ставящая в соответствие каждой паре $\langle i,\alpha\rangle \in \mathcal{M}\times\mathcal{N}$ некоторое число $(i,\alpha) \in R$. Кортежу $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle \in \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n$, где $m \geq n \geq 2$ целые числа, будет тогда сопоставляться числовая матрица $(ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau) \in R^{mn}$, рассматриваемая как точка mn-мерного пространства R^{mn}. Предположим, что множество точек $(ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau) \in R^{mn}$ образует в R^{mn} поверхность, задаваемую уравнением $\varphi = 0$, то есть

$$\varphi[(ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)] = 0 \qquad /B.20/$$

для любого кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle \in \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n$. Требуется найти выражение для функции φ, удовлетворяющее принципу феноменологической симметрии.

Основным содержанием настоящей работы является решение задачи /В.20/ для произвольных значений целых чисел m и n с помощью предложенного автором функционального метода [4]. Более строгая формулировка задачи /В.20/ будет дана в первом параграфе основной части.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

§I. Математическая формулировка теории физических структур. Основная теорема.

В работах [5] , [6] Ю.И.Кулаковым была дана математическая формулировка теории физических структур. Простейшие варианты теории были рассмотрены методом параметризации [6] , [7] . Однако, в применении к структурам высших рангов этот метод встречает значительные трудности. С другой стороны, формулировка исходных аксиом физической структуры в [6] дана с учетом применяемого параметрического метода исследования. В настоящей работе приводится более естественная эквивалентная формулировка аксиом [8] и применяется функциональный метод, предложенный автором [4] .

Пусть имеются два множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, элементы которых обозначаются строчными латинскими и греческими буквами, соответственно, и имеется также вещественная функция $a: \mathcal{M}\times\mathcal{N}\to R$, сопоставляющая каждой паре $\langle i,\alpha\rangle$ из прямого произведения $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ некоторое число $a_{i\alpha}\in R$. Из соображений удобства в дальнейшем вместо $a_{i\alpha}$ будем писать (i,α) , то есть $(i,\alpha)\equiv a_{i\alpha}$.

Определение I. Два элемента $i,j\in\mathcal{M}$ /соответственно $\alpha,\beta\in\mathcal{N}$ / считаются эквивалентными: $i\sim j$ /соотв. $\alpha\sim\beta$ /, если для любого $\gamma\in\mathcal{N}$ /соотв. $k\in\mathcal{M}$ / имеет место равенство $(i,\gamma)=(j,\gamma)$ /соотв. $(k,\alpha)=(k,\beta)$ /.

Будем предполагать, что по введенному отношению эквивалентности множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ факторизованы, так что все элементы, эквивалентные друг другу, отождествлены. Если же найдется хотя бы одно такое $\gamma\in\mathcal{N}$ /соотв. $k\in\mathcal{M}$ /, что выполняется неравенство $(i,\gamma)\neq(j,\gamma)$ /соотв. $(k,\alpha)\neq(k,\beta)$ /,

то элементы $i, j \in \mathcal{M}$ /соотв. $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ / считаются различными: $i \neq j$ /соотв. $\alpha \neq \beta$ /.

Определение 2. Множество $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ /соотв. $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ / называется ограниченным, если оно может быть представлено как объединение конечного семейства его подмножеств $\mathcal{M}'_p$ /соотв. $\mathcal{N}'_q$ /, каждое из которых обладает следующим свойством: существует такой элемент $\alpha_p \in \mathcal{N}$ /соотв. $i_q \in \mathcal{M}$ /, что множество значений функции $a: \mathcal{M}'_p \times \{\alpha_p\} \to R$ /соотв. $a: \{i_q\} \times \mathcal{N}'_q \to R$ / ограничено.

Очевидно, что объединение конечного числа ограниченных множеств также есть ограниченное множество. Зададим в множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ топологии, введя фундаментальные системы окрестностей. Пусть, например, $i_0 \in \mathcal{M}$ – некоторый фиксированный элемент, $\mathcal{N}'$ – ограниченно множество и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $P(i_0, \mathcal{N}', \varepsilon)$ множество всех те элементов $i \in \mathcal{M}$, для которых имеет место неравенство $|(i,\alpha)-(i_0,\alpha)| < \varepsilon$ при любом $\alpha \in \mathcal{N}'$. Семейство всех $P(i_0, \mathcal{N}', \varepsilon)$ для всевозможных ограниченных множеств $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ и любых значений положительного числа ε принимается за фундаментальную систему окрестностей точки i_0. Действительно, пересечение окрестностей $P(i_0, \mathcal{N}'_1, \varepsilon_1)$ и $P(i_0, \mathcal{N}'_2, \varepsilon_2)$ содержит окрестность $P(i_0, \mathcal{N}'_1 \cup \mathcal{N}'_2, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$. Произвольной окрестностью этой точки назовём всякое подмножество из $\mathcal{M}$, содержащее некоторую окрестность из фундаментальной системы. Аналогично вводится фундаментальная система окрестностей точки $\alpha_0 \in \mathcal{N}$. Произвольную окрестность этой точки будем обозначать через $Q(\alpha_0)$.

Предложение I. Введённые выше системы множеств $P(i_0)$ и $Q(\alpha_0)$ удовлетворяют аксиомам системы окрестностей точки и определяют на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ единственные отделимые топологические структуры /[9], стр. 20 /.

По определению $P(i_0)$, всякое подмножество множества $\mathcal{M}$, содержащее $P(i_0)$, также является окрестностью. Пересечение любых

двух окрестностей $\rho(i_0)$ и $\rho'(i_0)$ является окрестностью точки i_0 и, кроме того, очевидно, $i_0 \in \rho(i_0)$. Покажем далее, что для любой окрестности $\rho(i_0)$ можно найти такую подокрестность $\rho'(i_0) \subset \rho(i_0)$ что $\rho(i_0)$ является также окрестностью каждой точки $i' \in \rho'(i_0)$, то есть точка i' входит в $\rho(i_0)$ вместе с некоторой своей окрестностью $\rho''(i')$. Пусть окрестность $\rho(i_0)$ содержит множество $\rho(i_0, \mathcal{N}', \varepsilon)$ из фундаментальной системы. В качестве подокрестности $\rho'(i_0)$ возьмём множество $\rho(i_0, \mathcal{N}', \varepsilon/2)$, очевидно, входящее в окрестность $\rho(i_0)$. Для точек $i' \in \rho'(i_0)$ имеет место неравенство $|(i', \alpha) - (i_0, \alpha)| < \varepsilon/2$, $\alpha \in \mathcal{N}'$. Рассмотрим у каждой точки $i' \in \rho'(i_0)$ окрестность $\rho''(i') = \rho(i', \mathcal{N}', \varepsilon/2)$, так что $|(i'', \alpha) - (i', \alpha)| < \varepsilon/2$, $\alpha \in \mathcal{N}'$ для каждой точки $i'' \in \rho''(i')$. Для того, чтобы $\rho''(i') \in \rho(i_0)$, достаточно выполнения неравенства $|(i'', \alpha) - (i_0, \alpha)| < \varepsilon$, $\alpha \in \mathcal{N}'$, которое в действительности и имеет место: $|(i'', \alpha) - (i_0, \alpha)| \leq$
$\leq |(i'', \alpha) - (i', \alpha)| + |(i', \alpha) - (i_0, \alpha)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, $\alpha \in \mathcal{N}'$.

Заметим, что отображение $a: \mathcal{N} \times \{\alpha\} \to R$ непрерывно для любого элемента $\alpha \in \mathcal{N}$, так как построенная топология мажорирует слабейшую топологию, по которой эта функция непрерывна. Если $i \neq j$, то найдётся такое α, что $(i, \alpha) \neq (j, \alpha)$. То есть для любых различных элементов $i, j \in \mathcal{N}$ существует непрерывное отображение $a: \mathcal{N} \times \{\alpha\} \to R$ множества $\mathcal{N}$ в отделимое пространство R, такое, что образы элементов i и j различны. Но тогда топология в $\mathcal{N}$ будет отделимой /[9], стр.I09/.

Заметим, что использованная схема задания топологии в некоторой степени напоминает построение сильной топологии в сопряжённом линейном пространстве. Отличаются только определения ограниченных множеств. Открытыми множествами в $\mathcal{N}$ будут такие подмножества, которые являются окрестностью каждой своей точки. При этом любая окрестность $\rho(i_0)$ содержит подокрестность, являющуюся открытым множеством. В дальней-

шем изложении удобнее будет рассматривать только открытые окрестности. Очевидно, что система множеств $Q(\alpha_0)$ такие определяет в $\mathcal{N}$ единственную отделимую топологическую структуру. Топология в прямом произведении множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ индуцируется естественным образом по топологии сомножителей.

Предложение 2. Функция $a: \mathcal{M}\times\mathcal{N}\to R$ непрерывна.

Пусть $i_0\in\mathcal{M}$, $\alpha_0\in\mathcal{N}$ произвольные точки. Рассмотрим ε -окрестность точки $(i_0,\alpha_0)\in R$, задаваемую неравенством $|x-(i_0,\alpha_0)|<\varepsilon$. Если $i\in P(i_0,\{\alpha_0\},\varepsilon_1)$ и $\alpha\in Q(\alpha_0,P(i_0,\{\alpha_0\},\varepsilon_1),\varepsilon_2)$, где $\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$, то будет выполняться неравенство $|(i,\alpha)-(i_0,\alpha_0)|<\varepsilon$. В самом деле, $|(i,\alpha)-(i_0,\alpha_0)|\le|(i,\alpha)-(i,\alpha_0)|+|(i,\alpha_0)-(i_0,\alpha_0)|<$ $<\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$. Таким образом, значения (i,α) находятся в ε -окрестности точки (i_0,α_0) для любой пары $\langle i,\alpha\rangle\in$ $\in P(i_0,\{\alpha_0\},\varepsilon_1)\times Q(\alpha_0,P(i_0,\{\alpha_0\},\varepsilon_1),\varepsilon_2)$. Множество $P(i_0,\{\alpha_0\},\varepsilon_1)\times Q(\alpha_0,P(i_0,\{\alpha_0\},\varepsilon_1),\varepsilon_2)$ является окрестностью пары $\langle i_0,\alpha_0\rangle\in\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ по индуцированной на прямом произведении $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ топологии.

Пусть $\mathcal{M}^m=\mathcal{M}\times\mathcal{M}\times\ldots\times\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}^n=\mathcal{N}\times\mathcal{N}\times\ldots\times\mathcal{N}$ m -кратное и n -кратное прямые произведения множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, где $m\ge n\ge 2$ - целые числа. Элемент прямого произведения, как известно, называется кортежем. Построим функцию $A:\mathcal{M}^m\times\mathcal{N}^n\to R^{mn}$, сопоставляя каждому кортежу $\langle ijk\ldots,\nu,\alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle\in\mathcal{M}^m\times\mathcal{N}^n$ числовую матрицу размера $m\times n$

$$\left\| \begin{matrix} (i,\alpha) & (i,\beta) & (i,\gamma) & \dots & (i,\tau) \\ (j,\alpha) & (j,\beta) & (j,\gamma) & & (j,\tau) \\ (k,\alpha) & (k,\beta) & (k,\gamma) & & (k,\tau) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & & \\ (v,\alpha) & (v,\beta) & (v,\gamma) & \dots & (v,\tau) \end{matrix} \right\|, \qquad /\text{I.I}/$$

рассматриваемую как точка mn -мерного пространства R^{mn}. Матрицу /I.I/ в целях сокращения записи удобнее выписывать в одну строку: $(ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau) = (x_1, x_2, \dots, x_{mn}) \in R^{mn}$.

Предложение 3. Функция $A: \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n \to R^{mn}$ непрерывна.

Рассмотрим произвольную точку $(i_0 j_0 k_0 \dots v_0, \alpha_0\beta_0\gamma_0\dots\tau_0) \in R^{mn}$, соответствующую кортежу $\langle i_0 j_0 k_0 \dots v_0, \alpha_0\beta_0\gamma_0\dots\tau_0\rangle \in \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n$ и некоторую ее ε -окрестность. В соответствии с предложением 2 можно найти такие окрестности $P_1(i_0)$ и $Q_1(\alpha_0)$, что будет выполняться неравенство $|(i,\alpha) - (i_0,\alpha_0)| < \varepsilon$. Затем можно найти такие окрестности $P_2(i_0)$ и $Q_1(\beta_0)$, что будет выполняться второе неравенство $|(i,\beta) - (i_0,\beta_0)| < \varepsilon$ и т. д. Из условия ε -близости всех элементов матрицы /I.I/ к соответствующим элементам матрицы $(i_0 j_0 k_0 \dots v_0, \alpha_0\beta_0\gamma_0\dots\tau_0)$ определятся n окрестностей для каждой точки $i_0, j_0, k_0, \dots, v_0$ и m окрестностей для каждой точки $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots, \tau_0$. Если взять пересечение окрестностей, то определятся такие окрестности $P(i_0), P(j_0), P(k_0), \dots, P(v_0)$ и $Q(\alpha_0), Q(\beta_0), Q(\gamma_0), \dots Q(\tau_0)$, что множество значений функции $A: P(i_0) \times \dots \times P(v_0) \times Q(\alpha_0) \times \dots \times Q(\tau_0) \to R^{mn}$ будет находится в ε -окрестности точки $(i_0 j_0 k_0 \dots v_0, \alpha_0\beta_0\gamma_0\dots\tau_0)$.

То есть элементы матрицы /I.I/ будут находится в ε -окрестности соответствующих элементов матрицы $(i_0 j_0 k_0 \dots v_0 . \alpha_0 \beta_0 \gamma_0 \dots \tau_0)$, если $\langle ijk\dots v.\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle \in P(i_0)\times P(j_0)\times \dots \times P(v_0)\times O(\alpha_0)\times O(\beta_0)\times\dots\times O(\tau_0)$.

Определение 3. Преобразования пространства R^{mn}, соответствующие перестановкам строк и столбцов в матрице /I.I/, называются каноническими перестановками. Точки R^{mn}, переходящие друг в друга при некоторой канонической перестановке, называются канонически сопряженными или, просто, сопряженными.

Обозначим через $\mathcal{N}$ множество значений построенной функции $A: \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n \to R^{mn}$. Заметим, что $\mathcal{N}$ инвариантно относительно канонических перестановок. Поскольку $\mathcal{N} \subset R^{mn}$ можно наделить множество $\mathcal{N}$ топологией, индуцируемой в $\mathcal{N}$ топологией пространства R^{mn}. При этом окрестности точки $\mathcal{N}$ относительно $\mathcal{N}$ есть следы на $\mathcal{N}$ окрестностей той же точки относительно R^{mn}. Очевидно, что функция $A: \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n \to \mathcal{N}$ непрерывна. Кортеж прямого произведения считается недиагональным, если в нем различны все элементы из множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Например, в недиагональном кортеже $\langle ijk\dots v.\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle \in \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n$ должно быть $i \neq j \neq k \neq \dots \neq v$ и $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \dots \neq \tau$.

Определение 4. Говорят, что тройка $\langle \mathcal{M}, \mathcal{N}, a: \mathcal{M}\times\mathcal{N} \to R\rangle$ образует бинарную физическую структуру ранга (m, n), если выполнены следующие условия /аксиомы физической структуры/:

А. Отображение $a[\beta\gamma\dots\tau]: \mathcal{M} \to R^{n-1}$, определяемое функцией $i \longmapsto (i, \beta\gamma\dots\tau)$, открыто для любого недиагонального кортежа $\langle\beta\gamma\dots\tau\rangle \in \mathcal{N}^{n-1}$, где $\beta \neq \gamma \neq \dots \neq \tau$; отображение $a[jk\dots v]: \mathcal{N} \to R^{m-1}$, определяемое функцией $\alpha \longmapsto (jk\dots v, \alpha)$, открыто для любого недиагонального кортежа

$\langle jk\dots v\rangle \in \mathcal{M}^{m-1}$, где $j \neq k \neq \dots \neq v$; функция $H: \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n \to \mathcal{N}$ есть открытое отображение.

B. Существует аналитическая функция $\varphi: \mathcal{E} \to R$, определённая в связной области $\mathcal{E} \in R^{mn}$, такая что множество $\mathcal{N}$ является открытым подмножеством множества M, задаваемого уравнением $\varphi = 0$, то есть

$$\varphi[(ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau)] = 0 \qquad /2/$$

для любого кортежа $\langle ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle \in \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n$.

C. В любой окрестности относительно $\mathcal{N}$ произвольной точки $\mathcal{N}$ найдётся такая точка, в которой градиент φ отличен от нуля.

Согласно условию A, множество $\mathcal{M}$, по крайней мере, $(n-1)$ - мерно, а множество $\mathcal{N}$ $(m-1)$- мерно. Однако, условие A отлично от требования, чтобы множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ были многообразиями соответствующей размерности, так как предполагается открытость отображений $a[\beta\gamma\dots\tau]: \mathcal{M} \to R^{n-1}$ и $a[jk\dots v]: \mathcal{N} \to R^{m-1}$ для любых недиагональных кортежей $\langle\beta\gamma\dots\tau\rangle \in \mathcal{N}^{n-1}$ и $\langle jk\dots v\rangle \in \mathcal{M}^{m-1}$. Кроме того, эти отображения не обязательно инъективны, то есть в общем случае не являются гомеоморфизмами даже локально. Можно привести примеры, когда множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ являются многообразиями размерности $(n-1)$ и $(m-1)$ соответственно, но при этом не выполняется условие A. Открытость отображений $a[\beta\gamma\dots\tau]: \mathcal{M} \to R^{n-1}$ и $a[jk\dots v]: \mathcal{N} \to R^{m-1}$ налагает дополнительные ограничения на исходную функцию $a: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$, при этом определённые в множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ топологии не вырождаются в дискретные топологии. Вообще говоря, можно было бы сразу считать, что $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ топологические пространства и функция $a: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R$ непрерывна по совокупности переменных, не затрудняя себя построением топологии, но это увеличило бы число начальных предположений. В силу открытости отображения $H: \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n \to \mathcal{N}$, также требуемой условием A, окрестность любого кортежа $\langle ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle \in \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n$ переходит в ок-

рестность относительно $\mathcal{N}$ соответствующей точки $(ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\zeta)$.

Основное содержание теории физических структур заключено в условии В, которое возникло из анализа строения физических законов, записанных в так называемой феноменологически инвариантной форме, содержащей только измеряемые на опыте величины /см. Ю.И.Кулаков [3] /. Открытость отображения $A: \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n \to \mathcal{N}$, таким образом, означает сохранение структуры физического закона в локальном смысле.

Точки $\mathcal{N}$, в которых градиент φ отличен от нуля, не являются особыми точками множества $\mathcal{N}$. В соответствии с условием С, множество таких точек плотно в $\mathcal{N}$. В силу аналитичности функции φ, множество $\mathcal{N}$ имеет нулевую меру относительно $\mathcal{E}$. Поэтому даже если бы градиент φ обращался в нуль всюду на $\mathcal{N}$, это не означало бы тождественного обращения в постоянную функции φ в области $\mathcal{E}$. Отсюда вытекает существенность условия С. В точке, где $grad\,\varphi \neq 0$, множество $\mathcal{N}$ может быть задано локально уравнением, однозначно разрешённым относительно одного из аргументов, то есть некоторая окрестность такой точки есть аналитическая поверхность размерности $(mn-1)$.

ТЕОРЕМА. Бинарные физические структуры ранга (m,n), где $m \geq n \geq 2$, существуют для $m = n \geq 2$, $m = n+1 \geq 3$ и $m = n+2 = 4$. Если тройка $\langle \mathcal{M}, \mathcal{N}, a: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R \rangle$ образует бинарную физическую структуру ранга (m,n), то в любых окрестностях $P(i_0), Q(\alpha_0)$ произвольных точек $i_0 \in \mathcal{M}, \alpha_0 \in \mathcal{N}$ найдутся элементы $i_1 \in P(i_0), \alpha_1 \in Q(\alpha_0)$, для некоторых окрестностей $P(i_1), Q(\alpha_1)$ которых функция $a: P(i_1) \times Q(\alpha_1) \to R$ и множество значений функции $A: [P(i_1)]^m \times [Q(\alpha_1)]^n \to R^{mn}$ могут быть заданы следующим образом:

а/ для $m = n = 2$

$$(i,\alpha) = \psi^{-1}(x_i + \xi_\alpha),$$

$$\psi[(i,\alpha)] - \psi[(i,\beta)] - \psi[(j,\alpha)] + \psi[(j,\beta)] = 0, \qquad /I.3/$$

в/ для $m = n + 2 = 4$

$$(i,\alpha) = \psi^{-1}[(x_i \xi_\alpha^1 + \xi_\alpha^2)/(x_i + \xi_\alpha^3)],$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & \psi[(i,\alpha)] \times \psi[(i,\beta)] \\ 1 & \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & \psi[(j,\alpha)] \times \psi[(j,\beta)] \\ 1 & \psi[(k,\alpha)] & \psi[(k,\beta)] & \psi[(k,\alpha)] \times \psi[(k,\beta)] \\ 1 & \psi[(\ell,\alpha)] & \psi[(\ell,\beta)] & \psi[(\ell,\alpha)] \times \psi[(\ell,\beta)] \end{vmatrix} = 0, \qquad /I.4/$$

с/ для $m = n \geq 3$

$$(i,\alpha) = \psi^{-1}(x_i^1 \xi_\alpha^1 + \ldots + x_i^{m-2} \xi_\alpha^{m-2} + x_i^{m-1} \xi_\alpha^{m-1}),$$

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & \ldots & \psi[(i,\tau)] \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & \ldots & \psi[(j,\tau)] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi[(v,\alpha)] & \psi[(v,\beta)] & \ldots & \psi[(v,\tau)] \end{vmatrix} = 0, \qquad /I.5/$$

а также

$$(i,\alpha) = \psi^{-1}(x_i^1 \xi_\alpha^1 + \ldots + x_i^{m-2} \xi_\alpha^{m-2} + x_i^{m-1} + \xi_\alpha^{m-1}),$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & \dots & \psi[(i,\tau)] \\ 1 & \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & \dots & \psi[(j,\tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \psi[(v,\alpha)] & \psi[(v,\beta)] & \dots & \psi[(v,\tau)] \end{vmatrix} = 0. \qquad /1.6/$$

α / для $m = n+1 \geq 3$

$$(i,\alpha) = \psi^{-1}(x_i^1 \xi_\alpha^1 + x_i^2 \xi_\alpha^2 + \dots + x_i^{m-2} \xi_\alpha^{m-2} + \xi_\alpha^{m-1}),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & \dots & \psi[(i,\tau)] \\ 1 & \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & \dots & \psi[(j,\tau)] \\ 1 & \psi[(k,\alpha)] & \psi[(k,\beta)] & \dots & \psi[(k,\tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \psi[(v,\alpha)] & \psi[(v,\beta)] & \dots & \psi[(v,\tau)] \end{vmatrix} = 0, \qquad /1.7/$$

где $i,j,k,\dots,v \in P(i_1)$. $\alpha,\beta,\gamma,\dots,\tau \in Q(\alpha_1)$, ψ – строго монотонная аналитическая функция одной переменной, определенная в некоторой окрестности точки $(i_1,\alpha_1) \in R$, ψ^{-1} – обратная функция, x_i, ξ_α – независимые параметры, задаваемые некоторыми открытыми отображениями $x: P(i_1) \to R^{n-1}$, $\xi: Q(\alpha_1) \to R^{m-1}$;

е/ для $m \geq n+2 \geq 4$, кроме случая $m = n+2 = 4$, бинарные физические структуры ранга (m,n) не существуют.

Все дальнейшее изложение будет представлять собой последовательное доказательство сформулированной выше теоремы. Заметим, что результат локален. Возможности его аналитического продолжения на все множество $\mathcal{N}$ еще не выяснены. Есть предположение, что такое продолжение невозможно из-за возникающих особенностей функции Ψ. Это обстоятельство, очевидно, не противоречит тому, что существует аналитическая функция Φ, с помощью которой может быть задано все множество $\mathcal{N}$, так как не всякое локальное задание может быть аналитически продолжено. Ограничение $m \geq n$ несущественно. Легко переписать теорему для случая $m \leq n$. Существование уравнений /I.5/, /I.7/ было предположено К.И.Кулаковым [3]. Уравнения /I.4/, /I.6/ впервые были обнаружены автором [4]. В процессе доказательства теоремы возникает большое число функциональных и функционально-дифференциальных уравнений, методика решения которых разработана автором. Исходное уравнение /I.2/ можно рассматривать как специальное функциональное уравнение, удовлетворяющее принципу феноменологической симметрии. Основная задача состоит в определении явного выражения для функции Φ.

Предложение 4. Функция $a: \mathcal{M}_b \times \mathcal{M}_b \to R$ является открытым и непрерывным отображением.

В соответствии с условием А отображение $a[\beta\gamma\ldots\tau]: \mathcal{M}_b \to R^{n-1}$ открыто для любого недиагонального кортежа $\langle\beta\gamma\ldots\tau\rangle \in \mathcal{M}_b^{n-1}$. Построим проекцию этого отображения $a[\beta]: \mathcal{M}_b \to R$, сопоставляя каждому $i \in \mathcal{M}_b$ число (i,β) при фиксированном $\beta \in \mathcal{M}_b$. Проекция открытого отображения также будет открытым отображением. Следовательно множество значений функции $a: \mathcal{M}_b' \times \{\beta\} \to R$ открыто для любого открытого подмножества $\mathcal{M}_b' \subset \mathcal{M}_b$. Пусть $\mathcal{M}_b'$ открытое подмножество из $\mathcal{M}_b$ и

$\beta \in \mathcal{M}'$. Тогда, очевидно, множество значений функции $a : \mathcal{M}' \times \mathcal{M}' \to R$ открыто, как объединение открытых множеств значений функции $a : \mathcal{M}' \times \{\beta\} \to R$. С другой стороны, базис топологии в прямом произведении $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ образован произведением открытых множеств $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ и $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, что и доказывает открытость исходного отображения $a : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to R$, которое согласно предложению 2 является также и непрерывным.

Возьмем m произвольных точек $i_0, j_0, k_0, \ldots, v_0$ из множества $\mathcal{M}$ и n произвольных точек $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots, \tau_0$ из множества $\mathcal{M}$. Пусть $P(i_0), P(j_0), \ldots, P(v_0)$ и $Q(\alpha_0), Q(\beta_0), \ldots, Q(\tau_0)$ любые открытые окрестности этих точек. В соответствии с условием А множество $\mathcal{N}_0$ значений функции $A : P(i_0) \times \ldots \times P(v_0) \times Q(\alpha_0) \times \ldots \times Q(\tau_0) \to R^{mn}$ является окрестностью точки $(i_0 j_0 k_0 \ldots v_0, \alpha_0 \beta_0 \gamma_0 \ldots \tau_0)$ относительно $\mathcal{N}$. Из условий В и С следует, что найдется такой кортеж $\langle i_1 j_1 k_1 \ldots v_1, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots \tau_1 \rangle$, где $i_1 \in P(i_0), \ldots, v_1 \in P(v_0)$ и $\alpha_1 \in Q(\alpha_0), \ldots, \tau_1 \in Q(\tau_0)$, для которого в соответствующей точке $(i_1 j_1 k_1 \ldots v_1, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots \tau_1) \in \mathcal{N}_0$ градиент φ не равен нулю. Это означает, что в самой точке и некоторой ее окрестности относительно R^{mn} отлична от нуля хотя бы одна из частных производных функции φ . Без ограничения общности можно предположить, что отлична от нуля производная функции φ по первому аргументу (i, α) . То тогда по теореме о неявных функциях уравнение /I.2/ может быть однозначно разрешено относительно (i, α) в некоторой окрестности $U = H \times V \subset R^{mn}$ точки $(i_1 j_1 k_1 \ldots v_1, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots \tau_1)$:

$$(i, \alpha) = \Gamma[(jk \ldots v, \beta\gamma \ldots \tau), (i, \beta\gamma \ldots \tau), (jk \ldots v, \alpha)] , \qquad /I.8/$$

где аналитическая функция Γ определена в $(mn-1)$ -мерной окрестности V . Поскольку аргументы, входящие в функцию Γ ,

принимают все значения в пределах окрестности V, они могут локально рассматриваться как независимые переменные.

Уравнение /I.8/ задает подмножество $\mathcal{N}_1 = U \cap \mathcal{N}$. В силу непрерывности отображения $A: \mathcal{M}^m \times \mathcal{M}^n \to \mathcal{N} \subset R^{mn}$ можно найти такие окрестности $P(i_1), P(j_1), P(k_1), \ldots, P(v_1)$ и $Q(\alpha_1), Q(\beta_1), Q(\gamma_1), \ldots, Q(\tau_1)$, что уравнение /I.8/ будет иметь место для любого кортежа $\langle ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau \rangle \in$ $\in P(i_1) \times \ldots \times P(v_1) \times Q(\alpha_1) \times \ldots \times Q(\tau_1)$. Очевидно, эти окрестности можно выбрать так, что $P(i_1) \subset P(i_0), \ldots, P(v_1) \subset P(v_0)$ и $Q(\alpha_1) \subset Q(\alpha_0), \ldots, Q(\tau_1) \subset Q(\tau_0)$. Тогда множество $\mathcal{N}_1$ значений функции $A: P(i_1) \times \ldots \times P(v_0) \times Q(\alpha_1) \times \ldots \times Q(\alpha_0) \to R^{mn}$ будет содержаться в $\mathcal{N}_0$.

Предложение 5. Производные функции Γ из уравнения /I.8/ по каждой из переменных $(i, \beta\gamma \ldots \tau), (jk \ldots v, \alpha)$ отличны от нуля на множестве полной меры в окрестности V.

Действительно, если какая-либо производная функции Γ по одной из указанных переменных обращается в нуль на множестве положительной меры, то, в силу аналитичности функции Γ и ее производных, обращение в нуль будет тождественным. Легко видеть, что это приводит к противоречию с условием А. Предположим сначала, что $\Gamma_{(i,\beta)} = 0$ на множестве положительной меры в окрестности V, то есть $\Gamma_{(i,\beta)} \equiv 0$ и функция Γ не зависит от переменной (i, β):

$$(i.\alpha) = \Gamma_1[(jk \ldots v, \beta\gamma \ldots \tau), (i, \gamma \ldots \tau), (jk \ldots v, \alpha)]. \qquad /I.8'/$$

В окрестности $Q(\alpha_1)$ возьмем $(n-1)$ различных элементов $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ и запишем уравнение /I.8/, подставляя на место $\alpha \in Q(\alpha_1)$ последовательно элементы $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n \in Q(\alpha_1)$. В соответствии с условием А отображение $a[\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n]: \mathcal{M} \to R^{n-1}$, задаваемое функцией $i \longmapsto (i, \alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n)$, открыто для не-

диагонального кортежа $\langle \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \rangle \in \mathcal{T}^{n-1}$. Но это невозможно, так как согласно уравнению /I.8'/ $(n-1)$ координата $(i, \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n)$ выражается аналитически через $(n-2)$ параметра $(i, \gamma \dots \tau)$. То есть множество точек $(i, \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n) \in R^{n-1}$ при фиксированных различных элементах $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ и $i \in P(i_1)$, на самом деле, есть множество нулевой меры в R^{n-1} , следовательно, не открыто в R^{n-1} , в противоречие с условием А. Таким образом, производная $\Gamma(i, \beta)$ может обращаться в нуль только на множестве нулевой меры и на множестве полной меры в окрестности V отлична от нуля. Аналогичное утверждение имеет место, очевидно, и для всех остальных производных функции Γ по переменным $(i, \gamma \dots \tau)$. Предположим теперь, что в нуль на множестве положительной меры обращается производная $\Gamma(j, \alpha)$, то есть $\Gamma(j, \alpha) \equiv 0$ в окрестности V и функция Γ не зависит от переменной (j, α) :

$$(i, \alpha) = \Gamma_2[(jk \dots v, \beta \gamma \dots \tau), (i, \beta \gamma \dots \tau), (k \dots v, \alpha)] . \qquad /I.8''/$$

В окрестности $P(i_1)$ возьмем $(m-1)$ различный элемент $i_2, i_3, \dots, i_m$ и запишем уравнение /I.8''/, подставляя на место $i \in P(i_1)$ последовательно элементы $i_2, i_3 \dots, i_m \in P(i_1)$. Рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы при анализе уравнения /I.8'/, приводят к выводу о том, что производная $\Gamma(j, \alpha)$ может обращаться в нуль только на множестве нулевой меры и на множестве полной меры в окрестности V отлична от нуля. Такое же утверждение имеет место, очевидно, и для всех остальных производных функции Γ по переменным $(k \dots v, \alpha)$.

Следствие. Множество из V , где все производные функции Γ по переменным $(i, \beta \gamma \dots \tau), (jk \dots v, \alpha)$ одновременно отличны от нуля, есть множество полной меры относительно V .

Следствие очевидно, так как множество, где хотя бы одна про-

изводная функции Γ по указанным переменным обращалась в нуль, есть множество нулевой меры.

Предложение 6. В окрестности $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0$ существует точка, в которой все производные функции φ из уравнения /I.2/ по переменным $(i,\alpha),(i,\beta\gamma\ldots\tau),(jk\ldots v,\alpha)$ отличны от нуля.

Производные функции Γ выражаются известным образом через производные функции φ. Например,

$$\Gamma_{(i,\beta)} = -\varphi_{(i,\beta)} / \varphi_{(i,\alpha)} .$$

Поскольку $\varphi_{(i,\alpha)} \neq 0$, производные функций φ и Γ одновременно либо отличны от нуля, либо равны нулю. Между окрестностью $V \subset R^{mn-1}$ и окрестностью $\mathcal{N}_1 = U \cup N$ существует взаимно-однозначное соответствие. Согласно следствию предложения5 в V существует точка, в которой все производные функции Γ по переменным $(i,\beta\gamma\ldots\tau),(jk\ldots v,\alpha)$ отличны от нуля. В однозначно ей соответствующей точке окрестности $\mathcal{N}_1$ не обращаются в нуль производные функции φ по тем же переменным. Учитывая также, что $\varphi_{(i,\alpha)} \neq 0$ всюду на $\mathcal{N}_1$, и приходим к доказательству предложения 6.

Предложение 7. В любой окрестности относительно $\mathcal{N}$ произвольной точки $\mathcal{N}$ существует такая точка, что в ней самой и во всех $m!n!$ канонически сопряженных точках все производные функции φ не обращаются в нуль.

Пусть $(i_0 j_0 k_0 \ldots v_0, \alpha_0 \beta_0 \gamma_0 \ldots \tau_0) \in \mathcal{N}$ произвольная точка и $\mathcal{N}_0$ любая ее окрестность относительно $\mathcal{N}$. Согласно предложению 6, в окрестности $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0$ существует точка, где отличны от нуля производные функции φ по переменным $(i,\alpha),(i,\beta\gamma\ldots\tau),(jk\ldots v,\alpha)$. Но тогда по теореме о неявных функциях в некоторой окрестности $U' = H' \times V' \subset U$ уравнение /I.2/ может быть однозначно разрешено относительно ар-

гумента (i,β) . Проведя затем рассуждения, аналогичные тем, которые были применены к уравнению /I.8/, можно показать, что в $\mathcal{N}_1' = U' \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0$ существует точка, в которой отличны от нуля производные функции φ также и по переменным $(jk\ldots v,\beta)$, то есть в этой точке не обращаются в нуль все производные функции φ по переменным $(ijk\ldots v,\alpha\beta)$, $(i,\gamma\ldots\tau)$. Затем можно уравнение /I.2/ разрешить относительно аргумента (i,γ) и так далее. Таким образом, в окрестности $\mathcal{N}_0$ можно найти такую точку, в которой все производные функции φ отличны от нуля. В точке ей канонически сопряженной, не обязательно выполняется аналогичное условие. Однако, по доказанному выше, в любой окрестности этой сопряженной точки может быть найдена такая, в которой все частные производные функции φ не обращаются в нуль. Легко понять, что в таком случае, в окрестности $\mathcal{N}_0$ и сопряженной ей окрестности $\mathcal{N}_0^*$ можно найти две канонически сопряженные точки, в каждой из которых все производные функции φ отличны от нуля. Рассматривая последовательно все $n!n!$ окрестностей, сопряженных с $\mathcal{N}_0$ и приходим к доказательству предложения 7.

Не усложняя обозначений будем предполагать, что именно в точке $(i_1 j_1 k_1 \ldots v_1, \alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\tau_1)$ и ей сопряженных все производные функции φ отличны от нуля. В этой точке уравнение /I.2/ можно разрешить однозначно относительно любого аргумента. В силу аналитичности функции φ существует такая окрестность $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$ точки $(i_1 j_1 k_1 \ldots v_1, \alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\tau_1)$, что всюду в $\mathcal{N}_1$ и в канонически сопряженных областях $\mathcal{N}_1^*$ все производные функции φ отличны от нуля. В матрице $(i_1 j_1 k_1 \ldots v_1, \alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\tau_1)$, возможно, совпадают некоторые ее элементы. Например, $(i_1,\alpha_1) = (j_1,\alpha_1)$ хотя бы и $i_1 \neq j_1$. Однако в окрестности $\mathcal{N}_1$ можно найти такую точку, что в матрице, ее описывающей различны будут все элементы. действительно, проекция V окрестности $\mathcal{N}_1$

на любое подпространство R^{mn-1} есть открытое множество. Поскольку $mn-1 \geq 3$ в окрестности V можно найти такую точку, в которой все координаты будут различны. В соответствующей точке N_1 совпадающими будут возможно только две координаты. Рассмотрим такую окрестность этой точки относительно N, в которой попрежнему различны $(mn-1)$ координата. Если оставшаяся координата всюду будет совпадать с одной из $(mn-1)$ координат, то проекция этой окрестности на другое подпространство R^{mn-1} не может быть открытой, что противоречит условию однозначной разрешимости уравнения /I.2/ в окрестности N_1 относительно любого аргумента. Снова, не усложняя обозначения, предположим, что координаты всех точек окрестности N_1 точки $(i_1 j_1 k_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \tau_1)$ различны. То есть для любой точки $(ijk\dots v.\alpha\beta\gamma\dots\tau) \in N_1$ к ортеж $\langle ijk\dots v.\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$ будет недиагональным. Поскольку топология во множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ отделимая, можно найти такие непересекающиеся окрестности $P(i_1), P(j_1), P(k_1), \dots, P(v_1)$ и $Q(\alpha_1), Q(\beta_1), Q(\gamma_1), \dots, Q(\tau_1)$, что каждая точка $(ijk\dots v.\alpha\beta\gamma\dots\tau)$, соответствующая кортежу $\langle ijk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle \in P(i_1)\times\dots\times P(v_1)\times Q(\alpha_1)\times\dots\times Q(\tau_1)$ будет принадлежать N_1. Учитывая все вышесказанное, предложение 7 можно переформулировать в следующей форме.

Предложение 8. В любой окрестности N_0 произвольной точки $(i_0 j_0 k_0 \dots v_0.\alpha_0\beta_0\gamma_0\dots\tau_0)$ существует такая точка $(i_1 j_1 k_1 \dots v_1, \alpha_1\beta_1\gamma_1\dots\tau_1)$ с различными координатами, что в ней самой и во всех $m!n!$ сопряженных точках все производные функции φ отличны от нуля.

Множества $\mathcal{M}_1 = \{i_1, j_1, k_1, \dots, v_1\}$ и $\mathcal{N}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \tau_1\}$ содержат m и n различных элементов, соответст-

венно. Все значения функции $a: \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1 \to R$ различны. Можно также сказать, что во всех точках $\mathcal{N}$, соответствующих недиагональным кортежам из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^n$ все производные функции φ отличны от нуля. Очевидно, что точка $(i_1 j_1 k_1 \dots v_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \tau_1)$ и все ей канонически сопряженные, это и есть точки, соответствующие недиагональным кортежам из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^n$. Поскольку производные функции φ не обращаются в нуль также и в некоторой окрестности можно найти такие непересекающиеся окрестности $P(i_1), \dots, P(v_1)$ и $Q(\alpha_1), \dots, Q(\tau_1)$, что производные функции φ не обращаются в нуль в каждой точке, соответствующей кортежу $\langle ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau \rangle \in P(i_1) \times P(j_1) \times \dots \times P(v_1) \times Q(\alpha_1) \times Q(\beta_1) \times \dots \times Q(\tau_1)$ и во всех точках, канонически сопряженных к $(ijk \dots v. \alpha\beta\gamma \dots \tau)$. При этом будут различными все координаты точки $(ijk \dots v. \alpha\beta\gamma \dots \tau)$.

Предложение 9. В любых окрестностях $P(i_0)$ и $Q(\alpha_0)$ произвольных точек $i_0 \in \mathcal{M}$ и $\alpha_0 \in \mathcal{N}$ можно найти множества $\mathcal{M}_1 = \{i_1, j_1, k_1, \dots, v_1\}$ и $\mathcal{N}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \tau_1\}$, содержащие m и n различных элементов, такие что значения функции $a: \mathcal{M}_1 \times \mathcal{N}_1 \to R$ различны и все производные функции φ отличны от нуля в каждой точке $\mathcal{N}$, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{N}_1^n$.

Это предложение является следствием предыдущего, в том случае, когда $i_0 = j_0 = \dots = v_0$ и $\alpha_0 = \beta_0 = \dots = \tau_0$. Окрестность $\mathcal{N}_0$ в данном случае есть просто множество значений функции $A: [P(i_0)]^m \times [Q(\alpha_0)]^n \to R^{mn}$. Будем предполагать также, что $i_0 \notin \mathcal{M}_1$, $\alpha_0 \notin \mathcal{N}_1$.

Предложение 10. В любых окрестностях $P(i_0)$ и $Q(\alpha_0)$ произвольных точек $i_0 \in \mathcal{M}$ и $\alpha_0 \in \mathcal{N}$ можно найти такие множества $\mathcal{M}_1 \subset P(i_0)$, $\mathcal{N}_1 \subset Q(\alpha_0)$, содержащие достаточно

большое конечное число различных элементов, что все значения функции $a: \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1 \to R$ различны и в каждой точке $\mathcal{N}$, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^n$ все производные функции Φ не обращаются в нуль.

Докажем это предложение методом индукции, так как множества $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1$, содержащие m и n элементов, существуют, согласно предыдущему предложению. Пусть множества $\mathcal{M}_1 = \{i_1, j_1, \dots, v_1, \dots, g_1\}$ и $\mathcal{N}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \dots, \tau_1, \dots, \rho_1\}$ содержат $m' \geq m$ и $n' \geq n$ элементов. Возьмем непересекающиеся окрестности $P(i_1), P(j_1), \dots, P(g_1)$ и $Q(\alpha_1), Q(\beta_1), \dots, Q(\rho_1)$, такие, что предложение 10 имело силу не только для точек множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1$, но и для этих окрестностей. Поскольку можно предполагать, что $i_0 \notin \mathcal{M}_1, \alpha_0 \notin \mathcal{N}_1$, а топология во множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ отделимая, выберем окрестности точек множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1$ таким образом, чтобы существовали непересекающиеся с ними окрестности $P'(i_0)$ и $Q'(\alpha_0)$. Пусть далее, $s_1 \in P'(i_0)$ и $P(s_1) \subset P'(i_0)$ некоторая окрестность точки s_1, причем $i_0 \notin P(s_1)$ и существует окрестность $P''(i_0)$ не пересекающаяся с $P(s_1)$. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_1 \cup \{s_1\}$, содержащее $(m'+1)$ элемент и множество $\mathcal{N}_1$, содержащее n' элементов. К каждой точке $\mathcal{N}$, соответствующей недиагональному кортежу из $[\mathcal{M}_1 \cup \{s_1\}]^m \times \mathcal{N}_1^n$, и связанной с ней окрестностью можно применить предложение 8. Всего таких точек конечное число. Переходя последовательно от одной такой точки к другой, можно найти такие множества $\mathcal{M}_1' = \{i_1', j_1', \dots, v_1', \dots, g_1', s_1'\}$ и $\mathcal{N}_1' = \{\alpha_1', \beta_1', \dots, \tau_1', \dots, \rho_1'\}$, где $i_1' \in P(i_1), \dots, g_1' \in P(g_1)$, $s_1' \in P(s_1)$ и $\alpha_1' \in Q(\alpha_1), \dots, \rho_1' \in Q(\rho_1)$, содержащие $(m'+1)$ и n' различных элементов, что все значения функции $a: \mathcal{M}_1' \times \mathcal{N}_1' \to R$ различны и в каждой точке $\mathcal{N}$, соответ-

ствующей недиагональному кортежу из $[\mathcal{M}_1']^m \times [\mathcal{N}_1']^n$ все производные функции φ отличны от нуля. При этом $\mathcal{M}_1' \subset P(i_0)$, $\mathcal{N}_1' \subset Q(\alpha_0)$, $i_0 \notin \mathcal{M}_1'$, $\alpha_0 \notin \mathcal{N}_1'$. Заметим, что число элементов во множестве $\mathcal{M}_1'$ на единицу больше, чем во множестве $\mathcal{M}_1$. Аналогично можно увеличить число элементов во множестве $\mathcal{N}_1$, что и доказывает предложение I0.

Определение 5. Два уравнения $\varphi[(ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)] = 0$ и $\tilde{\varphi}[(ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)] = 0$ считаются эквивалентными, если множества $\mathcal{N}$ и $\tilde{\mathcal{N}}$, которые они определяют в R^{mn}, канонически сопряжены /в частности совпадают/.

Предложение II. Если эквивалентные уравнения $\varphi[(ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)] = 0$ и $\varphi[(ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)] = 0$ могут быть однозначно разрешены относительно одного и того же аргумента, то они определяют этот аргумент как одну и ту же функцию остальных переменных.

Действительно, предположим, например, что $\varphi_{(i,\alpha)} \neq 0$, $\tilde{\varphi}_{(i,\alpha)} \neq 0$ и эквивалентные уравнения можно записать в виде, однозначно разрешенном относительно (i,α):

$$(i,\alpha) = \Gamma[(ijk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau), (i,\beta\gamma\ldots\tau), (jk\ldots v, \alpha)],$$

$$(i,\alpha) = \tilde{\Gamma}[(ijk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau), (i,\beta\gamma\ldots\tau), (jk\ldots v, \alpha)],$$

откуда следует, что $\Gamma \equiv \tilde{\Gamma}$, так как все аргументы, входящие в функции Γ и $\tilde{\Gamma}$, являются независимыми переменными.

Введем понятие параметризации. Пусть $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1$ множества, определяемые предложением I0, и $\langle i_1 j_1 k_1 \ldots v_1, \alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\tau_1\rangle$ недиагональный кортеж из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{N}_1^n$. Запишем уравнение /I.8/ для кортежа $\langle i j_1 k_1 \ldots v_1, \alpha\beta_1\gamma_1\ldots\tau_1\rangle$, где $i \in P(i_0)$, $\alpha \in Q(\alpha_0)$;

$$(i,\alpha) = \Gamma[(j_1 k_1 \dots v_1, \beta_1 \gamma_1 \dots \tau_1), (i, \beta_1 \gamma_1 \dots \tau_1), (j_1 k_1 \dots v_1, \alpha)]. \quad /I.9/$$

Если числа $(i, \beta_1 \gamma_1 \dots \tau_1)$ и $(j_1 k_1 \dots v_1, \alpha)$ рассматривать как независимые параметры, задаваемые открытыми отображениями $a[\beta_1 \gamma_1 \dots \tau_1]: P(i_1) \to R^{n-1}$ и $a[j_1 k_1 \dots v_1]: Q(\alpha_1) \to R^{m-1}$, то уравнение /I.9/ определяет локальное параметрическое представление функции $a: P(i_1) \times Q(\alpha_1) \to R$. Для того, чтобы не нарушалось условие А, параметры $(i, \beta_1 \gamma_1 \dots \tau_1)$ и $(j_1 k_1 \dots v_1, \alpha)$ должны входить в представление /I.9/ существенным образом.

В заключение отметим, что уравнения /I.3/-/I.7/ обладают свойством антисимметрии по перестановкам элементов из одного множества. Введем оператор альтернирования $\hat{R}$, действие которого состоит в антисимметризации выражений, стоящих справа от оператора. Например, двухэлементный оператор $\hat{R}(ij)$ действует следующим образом:

$$\hat{R}(ij)\, \Psi[(i,\alpha)] = \Psi[(i,\alpha)] - \Psi[(j,\alpha)],$$

а при антисимметризации по трем элементам, например, получаем:

$$\hat{R}(ijk)\, \Psi[(i,\alpha)]\, \Psi[(j,\beta)] =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \Psi[(i,\alpha)] & \Psi[(i,\beta)] \\ 1 & \Psi[(j,\alpha)] & \Psi[(j,\beta)] \\ 1 & \Psi[(k,\alpha)] & \Psi[(k,\beta)] \end{vmatrix}$$

Многоэлементные операторы $\hat{R}$ вводятся аналогичным образом.

Уравнения /I.3/-/I.7/, соответственно, можно записать в более компактной форме, используя оператор альтернирования $\hat{R}$:

$$\hat{R}(ij)\, \hat{R}(\alpha\beta)\, \Psi[(i,\alpha)] = 0, \quad /I.3/$$

$$\hat{R}(ijkl)\, \hat{R}(\alpha\beta)\, \Psi[(i,\alpha)]\, \Psi[(j,\beta)]\, \Psi[(k,\alpha)]\, \Psi[(k,\beta)] = 0, \quad /I.4/$$

$$\hat{R}(ijk\ldots v)\hat{R}(\alpha\beta\gamma\ldots\tau)\psi[(i,\alpha]]\psi[(j,\beta]]\psi[(k,\gamma]]\ldots\psi[(v,\tau]]=0, \quad /I.5/$$

$$\hat{R}(ijk\ldots v)\hat{R}(\alpha\beta\gamma\ldots\tau)\psi[(j,\beta]]\psi[(k,\gamma]]\ldots\psi[(v,\tau]]=0, \quad /I.6/$$

$$\hat{R}(ijk\ldots v)\hat{R}(\alpha\beta\gamma\ldots\tau)\psi[(j,\alpha]]\psi[(k,\beta]]\ldots\psi[(v,\tau]]=0. \quad /I.7/$$

Приведённые результаты опубликованы автором в Докладах Академии Наук [8] и доложены на конференции по алгебре, математической логике и вычислительной математике [I0] , проходившей в городе Иванове /июнь,1970/. Кроме того,основные положения, результаты и методы диссертации доложены и обсуждены на теоретическом семинаре института гидродинамики СОАН /рук. Л.В.Овсянников/, на семинаре "Дифференциальные уравнения" института математики СОАН /рук. С.Л.Соболев/, на семинаре кафедры математического анализа Новосибирского университета /рук. Ю.Г.Решетняк/, на геометрических семинарах Московского университета /рук. П.К.Рашевский, Н.В.Ефимов/.

§ 2. Общие преобразования: $m \geq n \geq 2$

Пусть $i_0 \in \mathcal{M}$, $\alpha_0 \in \mathcal{M}$ произвольные точки и $P(i_0)$, $Q(\alpha_0)$ любые их открытые окрестности. В соответствии с предложением I0 первого параграфа, существуют множества $\mathcal{M}_1 = \{i_1, j_1, \ldots, v_1, \ldots, g_1\} \subset P(i_0)$ и $\mathcal{M}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \tau_1, \ldots, \rho_1\} \subset Q(\alpha_0)$, содержащие сколь угодно большое конечное число различных элементов, такие что все значения функции $a: \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1 \to R$ различны и в каждой точке N, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^n$ все производные функции φ отличны от нуля. Последнее означает, что в некоторой окрестности каждой такой точки уравнение /I.2/ может быть однозначно разрешено относительно любого аргумента. Так как все значения функции $a: \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1 \to R$ различны, среди точек, соответствующих недиагональным кортежам из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^n$, нет совпадающих, поэтому окрестности этих точек, где все производные функции φ отличны от нуля, можно взять непересекающимися. Пусть далее $P(i_1)$, $P(j_1)$, ..., $P(g_1)$ и $Q(\alpha_1)$, $Q(\beta_1)$, ..., $Q(\rho_1)$ непересекающиеся окрестности, такие что если во множествах $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_1$ любой элемент заменить точкой из его окрестности, то сохранят силу утверждения предложения I0 относительно $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_1$. Например, в точке $(ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)$, соответствующей кортежу $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle \in P(i_1) \times \ldots \times P(v_1) \times Q(\alpha_1) \times \ldots \times Q(\tau_1)$ все производные функции φ отличны от нуля. Кроме того, $i \neq j \neq \ldots \neq v$, $\alpha \neq \beta \neq \ldots \neq \tau$ и в матрице $(ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau)$ различны все элементы. Уравнение /I.8/ задает некоторую окрестность точки $(i_1 j_1 k_1 \ldots v_1, \alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots\tau_1)$. Поскольку окрестности точек, соответствующих недиагональным кортежам из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^n$, не пересекаются, урав-

нение /I.8/ будет задавать каждую такую окрестность. При этом можно сохранить однообразие в обозначении функции Γ, так как область ее определения в R^{mn-1} также состоит из непересекающихся окрестностей. Иначе говоря, в уравнении /I.8/ можно переставлять элементы, заменять один элемент на другой, если соответствующая точка на $\mathcal{N}$ не выйдет за пределы какой-либо из рассматриваемых окрестностей. Все производные функции Γ в уравнении /I.8/ отличны от нуля. Аргументы, входящие в функцию Γ, можно рассматривать как $(mn-1)$ независимую переменную в пределах их изменения. Число элементов во множествах $\mathcal{N}b_1$ и $\mathcal{N}_1$ будем предполагать настолько большим, что исключение по той или иной причине некоторых из них несущественно. То есть всегда во множествах $\mathcal{N}b_1$ и $\mathcal{N}_1$ число элементов будет значительно больше m и n, соответственно.

В окрестности $P(g_1)$ возьмем элемент g и запишем уравнение /I.8/ для кортежей $\langle gik\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$ и $\langle gjk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$:

$$(g,\alpha) = \Gamma[(ik\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(g,\beta\gamma\dots\tau),(ik\dots v,\alpha)],$$

$$(g,\alpha) = \Gamma[(jk\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(g,\beta\gamma\dots\tau),(jk\dots v,\alpha)],$$

откуда, приравнивая правые части, получаем соотношение

$$\hat{R}(ij)\Gamma[(ik\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(g,\beta\gamma\dots\tau),(ik\dots v,\alpha)] = 0, \qquad /2.I/$$

где для сокращения записи был использован оператор альтернирования $\hat{R}$, введенный в конце первого параграфа. В соответствии с условием А отображение $a[\beta\gamma\dots\tau]: \mathcal{N}b \to R^{n-1}$ открыто для любого недиагонального кортежа $\langle\beta\gamma\dots\tau\rangle \in \mathcal{N}b^{n-1}$. То есть аргументы $(g,\beta\gamma\dots\tau)$, когда g изменяется в пределах окрестности $P(g_1)$, представляют собой совокупность $(n-1)$

независимой переменной, по которым соотношение /2.I/ является тождеством. Поэтому в соотношении /2.I/ значение переменных $(g,\beta\gamma\dots\tau)$ можно зафиксировать. Вводя также новое обозначение

$$\Omega[(ik\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)] =$$

$$= \Gamma[(ik\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(g,\beta\gamma\dots\tau),(ik\dots v,\alpha)]\,|\,(g,\beta\gamma\dots\tau)=const$$

получаем уравнение

$$\hat{R}(ij)\,\Omega[(ik\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau)] = 0. \qquad /2.2/$$

Уравнение /2.2/ имеет место в некоторой окрестности каждой точки $\mathcal{N}$, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^n$. При этом, очевидно, фиксирование переменных $(g,\beta\gamma\dots\tau)$ не приводит к осключению из множества $\mathcal{M}_1$ элемента g_1 так как соотношение /2.I/ по этим переменным является тождеством и, кроме того, правая и левые части равенства /2.I/ могут быть записаны для любых двух кортежей, отличающихся только вторыми элементами, соответственно. Например, для кортежей $\langle igk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$ и $\langle ijk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$. Так же как и функция φ в уравнении /I.2/, левая часть уравнения /2.2/ в соответствующей области определения имеет отличные от нуля производные по всем аргументам. Кроме того, из свойств функции Γ вытекает, что отличны от нуля все частные производные аналитической функции Ω.

В окрестности $\mathcal{Q}(\rho_1)$ возьмем некоторый элемент ρ и запишем уравнение /I.8/ для кортежей $\langle ijk\dots v,\rho\alpha\gamma\dots\tau\rangle$ и $\langle ijk\dots v,\rho\beta\gamma\dots\tau\rangle$:

$$(i,\rho) = \Gamma[(jk\dots v,\alpha\gamma\dots\tau),(i,\alpha\gamma\dots\tau),(jk\dots v,\rho)],$$

$$(i,\rho) = \Gamma[(jk\dots v,\beta\gamma\dots\tau),(i,\beta\gamma\dots\tau),(jk\dots v,\rho)],$$

откуда получаем

$$\hat{R}(\alpha\beta)\,\Gamma[(jk\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\alpha\gamma\ldots\tau),(jk\ldots v,\rho)] = 0. \qquad /2.3/$$

В соответствии с условием А аргументы $(jk\ldots v,\rho)$ для недиагонального кортежа $\langle jk\ldots v\rangle \in \mathcal{M}_1^{m-1}$ можно рассматривать как $(m-1)$ независимую переменную, по которым соотношение /2.3/ является тождеством. Если зафиксировать значение переменных $(jk\ldots v,\rho)$ и ввести обозначение

$$\Xi[(ijk\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)] =$$

$$= \Gamma[(jk\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau),(i,\alpha\gamma\ldots\tau),(jk\ldots v,\rho)]\,|\,(jk\ldots v,\rho) = const$$

получаем уравнение

$$\hat{R}(\alpha\beta)\,\Xi[(ijk\ldots v,\alpha\gamma\ldots\tau)] = 0. \qquad /2.4/$$

Уравнение /2.4/ задает некоторую окрестность каждой точки $\mathcal{N}$, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^n$. Аналитическая функция Ξ, как и Ω, имеет отличные от нуля производные по каждой переменной и, кроме того, все производные левой части уравнения /2.4/ не обращаются в нуль.

Два различных уравнения /2.2/ и /2.4/ задают одни и те же подмножества множества $\mathcal{N}$, а именно окрестности точек, соответствующих недиагональным кортежам из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^n$. То есть локально уравнения /2.2/ и /2.4/ эквивалентны. Это естественно, налагает дополнительные ограничения на функции Ω и Ξ. Разрешим уравнения /2.2/ и /2.4/ относительно (i,α):

$$(i,\alpha) = \chi\{\Omega[(jk,\alpha\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)\}, \qquad /2.5/$$

$$(i,\alpha) = \chi_1\{\Xi[(ijk,\beta\gamma)],(ijk,\gamma),(jk,\alpha)\},$$

откуда получаем функциональное уравнение для $\chi[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)]$:

$$\chi\{\Omega[(jk,\alpha\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)\} =$$
$$= \chi_1\{\Xi[(ijk,\beta\gamma)],(ijk,\gamma),(jk,\alpha)\}, \qquad /2.6/$$

поскольку все аргументы, входящие в равенство /2.6/ являются независимыми переменными и, кроме того, $\Omega_{(j,\alpha)}[(jk,\alpha\beta\gamma)] \neq 0$. Заметим, что для сокращения записи внутри данного параграфа были опущены "неподвижные" элементы, следующие за k и γ. В окончательной формуле /2.13/ они будут восстановлены. Производные левой и правой частей уравнения /2.6/ по каждой переменной отличны от нуля, откуда следует, что не обращаются в нуль производные функций χ и χ_1 по первому аргументу. Заметим, что равенство /2.6/ может быть записано для любого недиагонального кортежа из прямого произведения $\mathcal{T}\mathcal{B}_1^m \times \mathcal{T}\mathcal{B}_1^n$.

Продифференцируем уравнение /2.6/ по переменным (j,β), (i,β) и разделим правую и левую части первого результата дифференцирования на соответствующие части второго:

$$\frac{\chi_\lambda\{\Omega[(jk,\alpha\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)\}\Omega_{(j,\beta)}[(jk,\alpha\beta\gamma)]}{\chi_{(i,\beta)}\{\Omega[(jk,\alpha\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)\}} =$$
$$= \Xi_{(j,\beta)}[(ijk,\beta\gamma)] / \Xi_{(i,\beta)}[(ijk,\beta\gamma)], \qquad /2.7/$$

где χ_λ частная производная функции χ по первому аргументу λ. Результат /2.7/ имеет место в некоторой окрестности проекции на подпространство R^{mn-1} каждой точки $\mathcal{N}$, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{T}\mathcal{B}_1^m \times \mathcal{T}\mathcal{B}_1^n$, и может рассматриваться как функционально-дифференциальное уравнение для $\chi[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)]$. Заметим, что все производные, входящие в равенство /2.7/, отличны от нуля.

В уравнении /2.7/ перейдем к переменной $\lambda = \Omega[(jk,\alpha\beta\gamma)]$, которая взаимно-однозначно связана с (j,α) :

$$(j,\alpha) = \chi[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(j,\beta\gamma)],$$

так как $\Omega_{(j,\alpha)}[(jk,\alpha\beta\gamma)] \neq 0$:

$$\chi_\lambda[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)] \times$$

$$\times \Omega_{(j,\beta)}\{(k,\alpha\beta\gamma),(j,\beta\gamma),\chi[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(j,\beta\gamma)]\} =$$

$$= \chi_{(i,\beta)}[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)] \times$$

$$\times \{\Xi_{(j,\beta)}[(ijk,\beta\gamma)] / \Xi_{(i,\beta)}[(ijk,\beta\gamma)]\}. \qquad /2.8/$$

В результате /2.8/ зафиксируем значение переменных $(j,\beta\gamma,\alpha)$, не входящих в аргументы функции $\chi[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)]$:

$$\chi_\lambda[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)] A_1[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma)] +$$

$$+ \chi_{(i,\beta)}[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)] B_1[(ik,\beta\gamma)] = 0,$$

то есть по переменным λ и (i,β) получено однородное уравнение в частных производных для функции χ. Уравнение не имеет особых точек, так как коэффициенты A_1, B_1 не обращаются в нуль, и потому может быть решено методом характеристик:

$$\chi[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)] =$$

$$= \chi_2\{A[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma)] + B[(ik,\beta\gamma)],(k,\alpha\beta\gamma),(i,\gamma)\}. \qquad /2.9/$$

Здесь χ_2, A, B – аналитические функции, имеющие отличные от нуля производные по первому аргументу, так как

$A_\lambda[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma)] = 1/A_1[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma)] \neq 0$, $B_{(i,\beta)}[(ik,\beta\gamma)] = 1/B_1[(ik,\beta\gamma)] \neq 0$ и $\chi_\lambda[\lambda,(k,\alpha\beta\gamma),(i,\beta\gamma)] \neq 0$.

Подставим решение /2.9/ в уравнение /2.5/ :

$$(i,\alpha) = \lambda_2\{A[\Omega[(jk,\beta\gamma)],(k,\beta\gamma)] + B[(ik,\beta\gamma)],(k,\beta\gamma),(i,\gamma)\} \qquad /2.10/$$

и разрешим результат подстановки относительно суммы $A+B$:

$$A\{\Omega[(jk,\beta\gamma)],(k,\beta\gamma)\} = -B[(ik,\beta\gamma)] + \Theta_1[(ik,\alpha\gamma),(k,\alpha)]. \qquad /2.11/$$

Заметим, что фиксирование значений переменных может привести к исключению из множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1$ некоторых элементов. Но поскольку $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1$ содержат достаточно большое число элементов, исключением элементов из множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1$ можно пренебречь.

Запишем уравнение /2.11/ для кортежей $\langle igk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$, $\langle jgk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$:

$$A\{\Omega[(gk,\beta\gamma)],(k,\beta\gamma)\} = -B[(ik,\beta\gamma)] + \Theta_1[(ik,\alpha\gamma),(k,\beta)],$$

$$A\{\Omega[(gk,\beta\gamma)],(k,\beta\gamma)\} = -B[(jk,\beta\gamma)] + \Theta_1[(jk,\alpha\gamma),(k,\beta)]$$

и приравняем правые части вписанных выражений, поскольку левые части совпадают:

$$\hat{R}(ij)B[(ik,\beta\gamma)] = \hat{R}(ij)\Theta_1[(ik,\alpha\gamma),(k,\beta)]. \qquad /2.12/$$

Покажем, что производная функции $\Theta_1[(ik,\alpha\gamma),(k,\beta)]$ по первому аргументу (i,α) отлична от нуля. Для этого продифференцируем уравнение /2.12/ по переменной (i,β), считая (i,α) функцией от (i,β), задаваемой соотношением /1.8/ :

$$B(i,\beta)[(ik,\beta\gamma)] + \Theta_1(i,\alpha)[(ik,\alpha\gamma),(k,\beta)] \times$$

$$\times \Gamma(i,\beta)[(jk,\beta\gamma),(i,\beta\gamma),(jk,\alpha)] = 0.$$

Поскольку $B(i,\beta) \neq 0$, $\Gamma(i,\beta) \neq 0$, должно быть $\Theta_1(i,\alpha) \neq 0$.

Далее, записывая результат /2.I2/ для кортежей $\langle ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$, $\langle ijk\dots v, \beta\beta\gamma\dots\tau\rangle$, приходим к соотношению

$$\hat{R}(ij)\hat{R}(\alpha\beta)\Theta_1[(ik.\alpha\gamma),(k,\beta)] = 0,$$

которое является тождеством по независимым переменным $(k\dots v,\beta)$. Фиксируя значения этих переменных и вводя обозначение

$$\Theta[(ik.\alpha\gamma)] = \Theta_1[(ik,\alpha\gamma),(k,\beta)]\,|\,(k\dots v,\beta) = const$$

получаем уравнение

$$\hat{R}(ij)\hat{R}(\alpha\beta)\Theta[(ik\ell\dots v,\alpha\gamma\dots\tau)] = 0. \qquad /2.I3/$$

Левая часть уравнения /2.I3/ имеет отличные от нуля производные по всем аргументам и задает множество $\mathcal{N}$ в некоторой окрестности каждой точки, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^n$. Уравнение /2.I3/ является естественным следствием того обстоятельства, что одни и те же окрестности на множестве $\mathcal{N}$ задаются одновременно двумя эквивалентными уравнениями /2.2/ и /2.4/.

Запишем уравнение /2.I3/ для частного случая $m = n = 2$:

$$\Theta[(i,\alpha)] - \Theta[(i,\beta)] - \Theta[(j,\alpha)] + \Theta[(j,\beta)] = 0, \qquad /2.I4/$$

где Θ – аналитическая функция одной переменной, определенная и строго монотонная в некоторой окрестности каждой из несовпадающих точек, задаваемых значениями функции $a : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1 \to R$. Напомним, что $\mathcal{M}_1 \subset P(i_0)$, $\mathcal{M}_1 \subset Q(\alpha_0)$. Представим уравнение /2.I4/ в виде, разрешенном относительно аргумента

(i,α) :

$$(i,\alpha) = \Theta^{-1}\{\Theta[(i,\beta)] + \Theta[(j,\alpha)] - \Theta[(j,\beta)]\}$$

и запишем его для кортежа $\langle i j_1 . \alpha \beta_1 \rangle$, где $i \in P(i_1)$, $\alpha \in Q(\alpha_1)$:

$$(i,\alpha) = \Theta^{-1}\{\Theta[(i,\beta_1)] + \Theta[(j_1,\alpha)] - \Theta[(j_1,\beta_1)]\}$$

Проведем параметризацию, сопоставляя каждому элементу $i \in P(i_1)$ числовой параметр $x_i = \Theta[(i,\beta_1)] - \Theta[(j_1,\beta_1)]/2$, а каждому элементу $\alpha \in Q(\alpha_1)$ - числовой параметр $\xi_\alpha = \Theta[(j_1,\alpha)] - \Theta[(j_1,\beta_1)]/2$. Тогда функция $a: P(i_1) \times Q(\alpha_1) \to R$ будет иметь следующее параметрическое представление :

$$(i,\alpha) = \psi^{-1}(x_i + \xi_\alpha) , \qquad /2.15/$$

где ψ - строго монотонная аналитическая функция одной переменной, определенная в некоторой окрестности точки $(i_1,\alpha_1) \in R$, в которой $\psi = \Theta$. Если далее предполагать, что $i,j \in P(i_1)$, $\alpha,\beta \in Q(\alpha_1)$, то множество значений функции $A: [P(i_1)]^2 \times [Q(\alpha_1)]^2 \to R^4$ может быть задано уравнением

$$\psi[(i,\alpha)] - \psi[(i,\beta)] - \psi[(j,\alpha)] + \psi[(j,\beta)] = 0 . \qquad /2.16/$$

Результат /2.15/, /2.16/ исчерпывает содержание случая а/ доказываемой теоремы. Заметим, что именно такой результат ранее был получен Ю.И.Кулаковым [6] параметрическим методом.

§ 3. Продолжение : $m \geq 3$

При последующих преобразованиях результата /2.I3/ будем предполагать, что $m \geq 3$. Переставим в уравнении /2.I3/ элементы j , k , то есть запишем его для кортежа $\langle ikjl\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$:

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)\,\Theta[(ijl\ldots v, \alpha\gamma\ldots\tau)] = 0. \qquad /3.1/$$

В соответствии с предложением II первого параграфа эквивалентные уравнения /2.I3/ и /3.I/ определяют неявно, например, (j,β) как одну и ту же функцию остальных переменных, в частности (i,β) . Выразим по известным правилам из неявных заданий /2.I3/ и /3.I/ производную функции (j,β) по переменной (i,β) :

$$\frac{\partial(j,\beta)}{\partial(i,\beta)} = \frac{\Theta_{(i,\beta)}[(ikl\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau)]}{\Theta_{(j,\beta)}[(jkl\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau)]},$$

$$\frac{\partial(j,\beta)}{\partial(i,\beta)} = -\frac{\Theta_{(i,\beta)}[(ijl\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau)]}{\Theta_{(j,\beta)}[(ijl\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau)] - \Theta_{(j,\beta)}[(kjl\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau)]},$$

откуда, приравнивая правые части, после некоторых простых преобразований, получаем :

$$\frac{\Theta_{(i,\beta)}[(ijl, \beta\gamma)]}{\Theta_{(i,\beta)}[(ikl, \beta\gamma)]} + \frac{\Theta_{(j,\beta)}[(ijl, \beta\gamma)]}{\Theta_{(j,\beta)}[(jkl, \beta\gamma)]} = \frac{\Theta_{(j,\beta)}[(kjl, \beta\gamma)]}{\Theta_{(j,\beta)}[(jkl, \beta\gamma)]}. \qquad /3.2/$$

Для сокращения записи внутри данного параграфа опущены "неподвижные" элементы, следующие за элементами l и γ . В конечном результате они будут введены. Равенство /3.2/ есть функциональ-

но-дифференциальное уравнение для Θ , так как все аргументы, входящие в него, являются независимыми переменными. Поскольку производная функции Θ по первому аргументу не обращается в нуль, в уравнении /3.2/ нет особенностей.

Фиксируя значения переменных $(k,\beta\gamma\ldots\tau)$, приходим к неоднородному уравнению в частных производных для функции Θ :

$$\Theta_{(i,\beta)}[(ij\ell,\beta\gamma)]\,A_1[(i\ell,\beta\gamma)] +$$

$$+\,\Theta_{(j,\beta)}[(ij\ell,\beta\gamma)]\,A_1[(j\ell,\beta\gamma)] = B_1[(j\ell,\beta\gamma)]. \qquad /3.3/$$

причем $A_1 \neq 0$. Решение неоднородного уравнения /3.3/ можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного. Однородная часть уравнения /3.3/ решается методом характеристик. Если частное решение неоднородного уравнения взять независящим от переменных $(i,\beta\gamma\ldots\tau)$, то общее решение исходного уравнения /3.3/ можно записать в следующем виде :

$$\Theta[(ij\ell,\beta\gamma)] = B[(j\ell,\beta\gamma)] +$$

$$+\,P\{A[(i\ell,\beta\gamma)] - A[(j\ell,\beta\gamma)]:(\ell,\beta\gamma),(ij,\gamma)\}, \qquad /3.4/$$

где аналитические функции P , A имеют отличные от нуля производные по первому аргументу. Функция B также аналитическая.

Подставим решение /3.4/ в исходное функционально-дифференциальное уравнение /3.2/ :

$$\frac{P'\{A[(i\ell,\beta\gamma)] - A[(j\ell,\beta\gamma)],(\ell,\beta\gamma),(ij,\gamma)\}}{P'\{A[(i\ell,\beta\gamma)] - A[(k\ell,\beta\gamma)],(\ell,\beta\gamma),(ik,\gamma)\}} -$$

$$-\frac{P'\{A[(i\ell,\beta\gamma)]-A[(j\ell,\beta\gamma)],(\ell,\beta\gamma),(ij,\gamma)\}}{P'\{A[(j\ell,\beta\gamma)]-A[(k\ell,\beta\gamma)],(\ell,\beta\gamma),(jk,\gamma)\}}=$$

$$=-\frac{P'\{A[(k\ell,\beta\gamma)]-A[(j\ell,\beta\gamma)],(\ell,\beta\gamma),(kj,\gamma)\}}{P'\{A[(j\ell,\beta\gamma)]-A[(k\ell,\beta\gamma)],(\ell,\beta\gamma),(jk,\gamma)\}}, \qquad /3.5/$$

где P' означает частную производную функции P по первому аргументу.

Зафиксируем в равенстве /3.5/ значения переменных $(k,\beta\gamma\ldots\tau)$ и введем обозначения $x=A[(i\ell,\beta\gamma)]$, $y=A[(j\ell,\beta\gamma)]$:

$$P'[x-y,(\ell,\beta\gamma),(ij,\gamma)]=E[y,(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\times$$

$$\times\{F[x,(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]-F[y,(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1}. \qquad /3.6/$$

Заметим, что введение независимых переменных x и y возможно, так как $A_{(i,\beta)[(i\ell,\beta\gamma)]}\neq 0$, $A_{(j,\beta)[(j\ell,\beta\gamma)]}\neq 0$. Свойства аналитических функций E и F легко вывести из исходного равенства /3.5/ и из условия $P'\neq 0$. Согласно введенному обозначению, $E\neq 0$, $F\neq 0$ и, кроме того, не обращается в нуль разность, стоящая в фигурных скобках выражения /3.6/, то есть $F[x,(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]-F[y,(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\neq 0$.

Продифференцируем уравнение /3.6/ по переменным x и y . Левые части результатов будут отличаться только знаком. Сравнивая правые части, после простых преобразований получаем:

$$E'[y,(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]/E[y,(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]=$$

$$=\frac{F'[x,(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]-F'[y,(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]}{F[x,(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]-F[y,(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]} \qquad /3.7/$$

Переставим в равенстве /3.7/ элементы i , j , учитывая, что при этом должны также переставляться и переменные x , y . Правая часть равенства /3.7/ при такой перестановке не изменится. Сравнивая левые части, приходим к следующему уравнению для функции E :

$$E'[x,(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)] = C[(\ell,\beta\gamma)]\,E[x,(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]\,. \qquad /3.8/$$

Уравнение для функции F может быть получено из равенства /3.7/, если подставить в него уравнение /3.8/ :

$$F'[x,(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)] = C_1[(\ell,\beta\gamma)] + C[(\ell,\beta\gamma)]\,F[x,(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)], \qquad /3.9/$$

где $C[(\ell,\beta\gamma)]$ и $C_1[(\ell,\beta\gamma)]$ аналитические функции.

Проинтегрируем уравнения /3.8/ и /3.9/ :

$$E[x,(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)] = K[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]\exp C[(\ell,\beta\gamma)]\,x. \qquad /3.10/$$

$$F[x,(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)] = -C_1[(\ell,\beta\gamma)]/C[(\ell,\beta\gamma)] + L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]\exp C[(\ell,\beta\gamma)]\,x. \qquad /3.11/$$

Ограничения на коэффициенты K , L следуют из основных свойств функций E и F , установленных выше. Поскольку $E \neq 0$, не обращается в нуль также и коэффициент K . Производная функции F в соответствии с выражением /3.11/ имеет вид : $F' = CL\exp Cx$, откуда следует, что произведение $C[(\ell,\beta\gamma)]\cdot L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]$ есть аналитическая функция. Если коэффициент $C[(\ell,\beta\gamma)]$ при некоторых значениях переменных $(\ell,\dots,\beta\gamma,\dots)$, входящих в него, обращается в нуль, то уравнение /3.9/, например, имеет линейное решение

$$F[x,(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)] = C_1[(\ell,\beta\gamma)]\,x + L_1[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)],$$

которое может быть получено из общего решения /3.11/, если в нем совершить предельный переход к $C[(\ell,\beta\gamma)] = 0$, учитывая,

что должно быть

$$\lim C[(\ell,\beta\gamma)]\,L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)] = C_1[(\ell,\beta\gamma)]\,, \qquad /3.12/$$

то есть

$$L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)] = L_1[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)] + C_1[(\ell,\beta\gamma)]/C[(\ell,\beta\gamma)]\,,$$

где $L_1[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]$ аналитическая функция.

Подставим общие решения /3.10/ и /3.11/ для функций E и F в формулу /3.6/ :

$$P'[x-y,(\ell,\beta\gamma),(ij,\gamma)] = K[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\times$$

$$\times\{L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]\exp C[(\ell,\beta\gamma)](x-y) - L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1}. \qquad /3.13/$$

Заметим, что выражение в фигурных скобках левой части решения /3.13/ не обращается в нуль. Легко проверить непосредственной подстановкой, что решение /3.13/ обращает равенство /3.5/ в тождество.

Проинтегрируем решение /3.13/ по переменной $(x-y)$:

$$P[x-y,(\ell,\beta\gamma),(ij,\gamma)] = C_2[(\ell,\beta\gamma),(ij,\gamma)] +$$

$$+K[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\times\{C[(\ell,\beta\gamma)]L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1}\times$$

$$\times\ln\{L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\exp C[(\ell,\beta\gamma)](y-x) - L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]\}. \qquad /3.14/$$

Используя результат /3.14/, можно выписать общее выражение для функции $\Theta[(ij\ell,\beta\gamma)]$, в соответствии с формулой /3.4/ :

$$\Theta[(ij\ell,\beta\gamma)] = B[(j\ell,\beta\gamma)] + C_2[(\ell,\beta\gamma),(ij,\gamma)] +$$

$$+K[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\times\{C[(\ell,\beta\gamma)]L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1}\times$$

$$\times\ln\{L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\exp C[(\ell,\beta\gamma)][A[(j\ell,\beta\gamma)] - A[(\ell,\beta\gamma)]] - L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]\}. \qquad /3.15/$$

Выражение /3.I5/ имеет смысл и в том случае, когда произведение $C[(\ell,\beta\gamma)]L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]$ обращалось бы в нуль. В выражении /3.I5/ можно совершить формально соответствующий предельный переход. В результате получим

$$\Theta[(ij\ell,\beta\gamma)] = B[(j\ell,\beta\gamma)] + C_3[(\ell,\beta\gamma),(ij,\gamma)] + K[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\times$$

$$\times\{A[(j\ell,\beta\gamma)] - A[(i\ell,\beta\gamma)]\}/\{L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)] - L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]\}. \qquad /3.I6/$$

причем разность $L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)] - L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)] \neq 0$ и является аналитической функцией.

Подставим выражение /3.I5/ для функции Θ в уравнение /3.I/ :

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)K[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\times\{C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1}\times$$

$$\times\ln\{L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\exp C[(\ell,\alpha\gamma)][A[(j\ell,\alpha\gamma)] - A[(i\ell,\alpha\gamma)]] - L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\} +$$

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)C_2[(\ell,\alpha\gamma),(ij,\gamma)] = 0. \qquad /3.I7/$$

В уравнении /3.I7/ переставим элементы j , k :

$$\hat{R}(ij)\hat{R}(\alpha\beta)K[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma)]\times\{C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma)]\}^{-1}\times$$

$$\times\ln\{L[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma)]\exp C[(\ell,\alpha\gamma)][A[(k\ell,\alpha\gamma)] - A[(i\ell,\alpha\gamma)]] - L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\} +$$

$$+\hat{R}(ij)\hat{R}(\alpha\beta)C_2[(\ell,\alpha\gamma),(ik,\gamma)] = 0. \qquad /3.I8/$$

Уравнения /3.I7/ и /3.I8/ определяют неявно, например, (i,α) как одну и ту же функцию переменной (i,β) . Сравнивая частные производные функции (i,α) по переменной (i,β) , выраженные по известным правилам из неявных заданий /3.I7/ и /3.I8/, получаем соотношение

$$\hat{R}(jk)\hat{R}(\alpha\beta)\ln\{L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\exp C[(\ell,\alpha\gamma)][A[(i\ell,\alpha\gamma)] - A[(j\ell,\alpha\gamma)]] -$$

$$- L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\} - \hat{R}(jk)\hat{R}(\alpha\beta)\ln K[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)] = 0. \qquad /3.I9/$$

В соотношении /3.19/ переставим элементы i , j :

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)\ln\{L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\exp C[(\ell,\alpha\gamma)][A[(j\ell,\alpha\gamma)]-A[(i\ell,\alpha\gamma)]]-$$

$$-L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\}-\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)\ln K[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]=0 \qquad /3.20/$$

Заметим, что выражения под логарифмом в уравнении /3.17/ и в соотношении /3.20/ совпадают. Используя это обстоятельство, преобразуем уравнение /3.17/ к равенству :

$$\hat{R}(ik)K[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\times\{C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1}\times$$

$$\times\ln\{L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\exp C[(\ell,\alpha\gamma)][A[(j\ell,\alpha\gamma)]-A[(i\ell,\alpha\gamma)]]-L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\}+$$

$$+\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)C_2[(\ell,\alpha\gamma),(ij,\gamma)]=$$

$$=\hat{R}(ik)K[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\times\{C[(\ell,\beta\gamma)]L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1}\times$$

$$\times\ln\{L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]\exp C[(\ell,\alpha\gamma)][A[(j\ell,\alpha\gamma)]-A[(i\ell,\alpha\gamma)]]-L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\}-$$

$$-K[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\times\{C[(\ell,\beta\gamma)]L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]\}^{-1}\times\{\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)\ln K[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\}. \qquad /3.21/$$

Равенство /3.21/ есть тождество по всем входящим в него переменным, так как отсутствует зависимость от (ijk,β) . Продифференцируем тождество /3.21/ по переменной (i,α) и произведем в полученном результате сокращение на все отличные от нуля множители :

$$\frac{C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]}{C[(\ell,\beta\gamma)]L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]}=\frac{K[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]}{K[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]}. \qquad /3.22/$$

Соотношение /3.22/ будет выполняться также и в том случае, когда вместо j будет стоять элемент i или k , так как исходное тождество /3.21/ инвариантно относительно перестановки элементов i , j , k . Поскольку $K\neq 0$, произведения

. $C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]$ и $C[(\ell,\beta\gamma)]L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]$ обращаются в нуль одновременно. Аналогичное утверждение в отношении трех произведений $C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]$, $C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]$, $C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma)]$ из соотношения /3.22/ не следует, поэтому ниже будут рассмотрены различные варианты значений этих произведений.

Предположим сначала, что только одно произведение из трех обращается в нуль :

$$C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]=0\,, \qquad /3.23/$$

$$C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\neq 0, \qquad /3.24/$$

$$C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma)]\neq 0. \qquad /3.25/$$

Ранее было показано, что произведение CL есть аналитическая функция всех своих переменных. Но в таком случае обращение в нуль произведения CL может быть либо тождественным в соответствующей окрестности, либо на множестве нулевой меры. Во втором случае всегда можно найти подокрестность, в которой всюду $CL\neq 0$. Поэтому будем предполагать, что условие /3.23/ выполняется тождественно, в то время как всюду в соответствующей окрестности имеют место условия /3.24/ и /3.25/. В этом случае соотношение /3.20/ может быть записано в следующем виде

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)\ln\{[L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]-L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]]/K[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\}=0$$

или без операторов альтернирования

$$\frac{K[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma)]}{K[(\ell,\beta\gamma),(k,\gamma)]}\cdot\frac{L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]-L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]}{L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]-L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]}=$$

$$\frac{K[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]}{K[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]}\cdot\frac{L[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma)]-L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]}{L[(\ell,\beta\gamma),(k,\gamma)]-L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]}\,. \qquad /3.26/$$

В равенстве /3.26/ нет особенностей, так как разности, стоящие в знаменателе и числителе правой и левой части, в нуль не обращаются. Кроме того, $K \neq 0$.

Преобразуем правую часть равенства /3.26/, используя соотношение /3.22/ и условие /3.23/:

$$\frac{C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]}{C[(\ell,\beta\gamma)]L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]}\cdot\frac{L[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma)]-L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]}{L[(\ell,\beta\gamma),(k,\gamma)]-L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]}= \qquad /3.27/$$

$$=L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]K[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma)]/L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]K[(\ell,\beta\gamma),(k,\gamma)]\,,$$

после чего равенство /3.26/ упрощается:

$$\frac{L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]-L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]}{L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]-L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]}=\frac{L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]}{L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]}\,. \qquad /3.28/$$

Поскольку разности, стоящие в числителе и знаменателе левой части равенства /3.28/ есть отличные от нуля аналитические функции, правая часть этого же равенства не обращается в нуль. Но в таком случае коэффициенты $L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]$ и $L[(\ell,\beta\gamma),(j,\gamma)]$ либо одновременно обращаются в нуль, либо одновременно отличны от нуля. Рассмотрим эти две возможности в случае, задаваемом условиями /3.23/, /3.24/, /3.25/:

$$1.\ L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)] \neq 0\,. \qquad /3.29/$$

Из условия /3.23/ следует, что $C[(\ell,\alpha\gamma)]=0$ и, в соответст-

вии с предельным переходом /3.12/, $C_1[(\ell.\alpha\gamma)]=0$. Но функция $C_1[(\ell,\alpha\gamma)]$ является предельной для всех произведений, стоящих в условиях /3.23/, /3.24/, /3.25/, поэтому все эти произведения должны обращаться в нуль одновременно, что противоречит исходным условиям /3.23/, /3.24/, /3.25/.

2. $$L[(\ell,\alpha\gamma).(j.\gamma)]=0 . \qquad /3.30/$$

Если $C[(\ell.\alpha\gamma)]=0$, то, в соответствии с предельным переходом /3.12/, $C_1[(\ell,\alpha\gamma)]=0$. Как и в предыдущем случае, это приводит к нарушению условий /3.24/, /3.25/. Поэтому возможно только $C[(\ell.\alpha\gamma)]\neq 0$. Из условий /3.24/, /3.25/ и свойств произведения CL вытекает аналитичность коэффициентов $L[(\ell,\alpha\gamma).(i.\gamma)]$ и $L[(\ell,\alpha\gamma).(k.\gamma)]$, а также необращение их в нуль.

С учетом отмеченных обстоятельств запишем уравнение /3.17/, используя предельное выражение /3.16/ для функции Θ , в котором надо положить $L[(\ell,\alpha\gamma).(j,\gamma)]=0$:

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)K[(\ell.\alpha\gamma).(j,\gamma)]\times\{A[(j\ell.\alpha\gamma)]-A[(i\ell,\alpha\gamma)]\}/L[(\ell,\alpha\gamma).(i,\gamma)]-$$

$$-\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)C_3[(\ell,\alpha\gamma).(ij,\gamma)]=0. \qquad /3.31/$$

При тех же условиях запишем соотношение /3.19/ :

$$\hat{R}(\alpha\beta)\ln L[(\ell,\alpha\gamma).(i,\gamma)]/\exp C[(\ell,\alpha\gamma)]A[(j\ell,\alpha\gamma)]-$$

$$-\hat{R}(\alpha\beta)\ln\{L[(\ell,\alpha\gamma).(i,\gamma)]/\exp C[(\ell,\alpha\gamma)]A[(k\ell.\alpha\gamma)]-$$

$$-L[(\ell,\alpha\gamma).(k,\gamma)]/\exp C[(\ell.\alpha\gamma)]A[(i\ell.\alpha\gamma)]\}-$$

$$-\hat{R}(jk)\hat{R}(\alpha\beta)\ln K[(\ell,\alpha\gamma).(j,\gamma)]=0 \qquad /3.32/$$

Уравнения /3.31/ и /3.32/ эквивалентны, поскольку условия /3.23/-/3.25/ и /3.30/ выполняются тождественно и не налагают дополнительных ограничений на изменение переменных в пределах

доступной им окрестности. С другой стороны частные производные уравнений /3.31/ и /3.32/ по переменной (i,α), как легко проверить, отличны от нуля. Это означает, что уравнения /3.31/ и /3.32/ определяют неявно (i,α) как одну и ту же функцию переменной (i,β). Сравнивая два выражения для производной функции (i,α) по переменной (i,β), найденные из неявных заданий /3.31/ и /3.32/, получаем :

$$\hat{R}(\alpha\beta)\ln\{L[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma)]-L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]\exp C[(\ell,\alpha\gamma)][A[(i\ell,\alpha\gamma)]-A[(k\ell,\alpha\gamma)]]\}+$$

$$+\hat{R}(\alpha\beta)\ln K[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma)]L[(\ell,\beta\gamma),(i,\gamma)]/C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma)]=0. \qquad /3.33/$$

В равенстве /3.33/ отсутствует зависимость от переменных $(j,\alpha\beta)$, поэтому по всем входящим в него переменным оно должно быть тождеством. Продифференцируем тождество /3.33/ по переменной (i,α) и произведем сокращение на все множители, не обращающиеся в нуль :

$$C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]=0,$$

что противоречит исходному условию /3.24/. Перестановка элементов i, k в равенстве /3.33/, не нарушающая условия /3.23/, аналогичным образом приводит к обращению в нуль другого произведения :

$$C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma)]=0,$$

что, в свою очередь, противоречит условию /3.25/.

Таким образом, было показано, что обращение в нуль одного из произведений, входящих в условия /3.23/, /3.24/, /3.25/, влечет за собой обращение в нуль и двух других произведений.

Предположим далее, что из трех произведений CL только одно отлично от нуля :

$$C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]=0, \qquad /3.34/$$

$$C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma_1)]=0, \qquad /3.35/$$

$$C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma_1)]\neq 0. \qquad /3.36/$$

Если $C[(\ell,\alpha\gamma)]\neq 0$, то обращаются в нуль коэффициенты $L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma_1)]$ и $L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma_1)]$. Но тогда $L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma_1)]-L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma_1)]=0$, что противоречит ранее установленному свойству этой разности не обращаться в нуль при условии /3.35/. Если же $C[(\ell,\alpha\gamma)]=0$, то в соответствии с предельным переходом /3.12/ все три произведения равнялись бы $C_1[(\ell,\alpha\gamma)]$, то есть обращались или не обращались бы в нуль одновременно, в противоречие с условиями /3.34/-/3.36/. Это значит, что случай, когда из трех произведений CL только одно отлично от нуля, невозможен.

Итак, в дальнейшем можно предполагать, что либо все три произведения CL тождественно обращаются в нуль :

$$\left.\begin{aligned} C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma_1)]&=0,\\ C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma_1)]&=0,\\ C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma_1)]&=0, \end{aligned}\right\} \qquad /3.37/$$

либо все три произведения всюду не равны нулю :

$$\left.\begin{aligned} C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma_1)]&\neq 0,\\ C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(j,\gamma_1)]&\neq 0,\\ C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(k,\gamma_1)]&\neq 0. \end{aligned}\right\} \qquad /3.38/$$

Предположим сначала, что имеют место условия /3.37/. В этом случае необходимо подставить выражение /3.16/ для функции Θ в уравнение /3.1/ :

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)\frac{K[(l\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(j,\gamma\delta\ldots\tau)]\{A[(jl\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]-A[(il\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]\}}{L[(l\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(j,\gamma\delta\ldots\tau)]-L[(l\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots v),(i,\gamma\delta\ldots\tau)]}$$

$$+\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)C_3[(l\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(ij,\gamma\delta\ldots\tau)]=0. \qquad /3.39/$$

Предположим, далее, что имеют место условия /3.38/, когда ни одно из произведений CL не обращается в нуль. Легко проверить, что при этих условиях все производные левых частей соотношений /3.19/ и /3.20/ по переменным $(ijk\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\tau)$ отличны от нуля. То есть, в действительности, соотношения /3.19/ и /3.20/ являются уравнениями, определяющим, например, (k,α) как одну и ту же функцию переменной (k,β). Сравнивая два выражения для производной функции (k,α) по переменной (k,β), полученные из неявных заданий /3.19/ и /3.20/, приходим к такому уравнению :

$$\hat{R}(ij)\hat{R}(\alpha\beta)\ln\{L[(l,\alpha\gamma),(k,\gamma)]/\exp C[(l,\alpha\gamma)]A[(il,\alpha\gamma)]-$$

$$-L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]/\exp C[(l,\alpha\gamma)]A[(kl,\alpha\gamma)]\}-$$

$$-\hat{R}(ij)\hat{R}(\alpha\beta)\ln C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]=0. \qquad /3.40/$$

Введем новое обозначение

$$\Lambda[(il,\alpha\gamma)]=-\{C[(l,\alpha\gamma)]\tilde{C}_1[(l,\alpha\gamma)]\}^{-1}+$$

$$+\frac{\exp\{-C[(l,\alpha\gamma)]A[(il,\alpha\gamma)]\}}{C[(l,\alpha\gamma)]C[(l,\alpha\gamma)]L[(l,\alpha\gamma),(i,\gamma)]}, \qquad /3.41/$$

где отличная от нуля аналитическая функция $\tilde{C}_1[(l,\alpha\gamma)]$ совпадает с $C_1[(l,\alpha\gamma)]$ при $C[(l,\alpha\gamma)]=0$ и такая что

$$\lim_{c \to 0} \{\tilde{C}_1[(\ell,\alpha\gamma)] - C_1[(\ell,\alpha\gamma)]\}/C[(\ell,\alpha\gamma)] = 0.$$

Заметим, что при $C[(\ell,\alpha\gamma)] = 0$ в соответствии с предельным переходом /3.12/ и условиями /3.38/ должно быть $C_1[(\ell,\alpha\gamma)] \neq 0$. Если $C[(\ell,\alpha\gamma)] \equiv 0$, то полагаем $\tilde{C}_1[(\ell,\alpha\gamma)] \equiv C_1[(\ell,\alpha\gamma)]$. Если же $C[(\ell,\alpha\gamma)] = 0$ на множестве нулевой меры, то можно, например, положить $\tilde{C}_1[(\ell,\alpha\gamma)] = C_1[(\ell,\alpha\gamma)] + C_2\{C[(\ell,\alpha\gamma)]\}^2$, где постоянная C_2 выбрана так, чтобы $\tilde{C}_1[(\ell,\alpha\gamma)] \neq 0$. Слагаемое $1/C[(\ell,\alpha\gamma)]\tilde{C}_1[(\ell,\alpha\gamma)]$ введено с целью исключения особенности в функции Λ при $C[(\ell,\alpha\gamma)] = 0$.

Функция $\Lambda[(i\ell,\alpha\gamma)]$ аналитична по построению. В формуле /3.41/ можно совершить предельный переход к $C[(\ell,\alpha\gamma)] = 0$ и получить следующее выражение.

$$\Lambda[(i\ell,\alpha\gamma)] = -\frac{C_1[(\ell,\alpha\gamma)]A[(i\ell,\alpha\gamma)] + L_1[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]}{C_1[(\ell,\alpha\gamma)]C_1[(\ell,\alpha\gamma)]}.$$

Легко понять, что производная $\Lambda_{(i,\alpha)}[(i\ell,\alpha\gamma)]$ не обращается в нуль, так как в выражении

$$\Lambda_{(i,\alpha)}[(i\ell,\alpha\gamma)] = -\frac{A_{(i,\alpha)}[(i\ell,\alpha\gamma)]\exp\{-C[(\ell,\alpha\gamma)]A[(i\ell,\alpha\gamma)]\}}{C[(\ell,\alpha\gamma)]L[(\ell,\alpha\gamma),(i,\gamma)]}$$

для производной не равен нулю ни один из сомножителей.

Перепишем уравнение /3.40/, воспользовавшись обозначением /3.41/ :

$$\hat{R}(ij)\hat{R}(\alpha\beta)\ell n\{\Lambda[(i\ell,\alpha\gamma)] - \Lambda[(k\ell,\alpha\gamma)]\} = 0 \qquad /3.42/$$

или в форме определителя

$$\begin{vmatrix} \Lambda[ik\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau] & \Lambda[ik\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau] & 1 \\ \Lambda[jk\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau] & \Lambda[jk\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau] & 1 \\ \Lambda[kk\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau] & \Lambda[kk\ldots v,\beta\gamma\delta\ldots\tau] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad /3.43/$$

Здесь также, как и в уравнении /3.39/, восстановлены все те элементы, которые были опущены в промежуточных формулах. Заметим, что любой минор второго порядка, содержащий столбец из единиц, в определителе /3.43/ в нуль не обращается. Поэтому отлична от нуля, например, производная левой части уравнения /3.43/ по переменной (i,α). Используя также уравнение /I.8/ легко показать, что любая первая производная левой части уравнения /3.43/ не обращается в нуль.

Уравнения /3.39/ для $CL=0$ и /3.43/ для $CL\neq 0$ являются следствием эквивалентности уравнений /2.13/ и /3.1/. Но, в действительности, окрестности точек $\mathcal{N}$, соответствующих недиагональным кортежам из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^n$, не могут задаваться уравнением /3.39/, так как возникает противоречие с аксиомами теории физических структур. В четвертом параграфе это обстоятельство будет выявлено для частного случая $n=2$, а в пятом параграфе для более общего случая $n \geqslant 3$.

§ 4. Частный случай: $m > n = 2$

Уравнение /3.39/ для случая $n = 2$ может быть записано в следующем виде:

$$\hat{R}(\alpha\beta)K[(\ell\ldots v,\alpha)]\left\{\frac{A[(j\ell\ldots v,\alpha)]-A[(i\ell\ldots v,\alpha)]}{L_2[(\ell\ldots v,\alpha)]-L_1[(\ell\ldots v,\alpha)]}-\right.$$

$$\left.-\frac{A[(j\ell\ldots v,\alpha)]-A[(k\ell\ldots v,\alpha)]}{L_2[(\ell\ldots v,\alpha)]-L_3[(\ell\ldots v,\alpha)]}\right\}+\hat{R}(\alpha\beta)C_4[(\ell\ldots v,\alpha)]=0\,, \qquad /4.1/$$

где, например, предполагается, что при переходе от уравнения /3.39/ к уравнению /4.1/ имеют место соответствия

$$L[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(i,\gamma\delta\ldots\tau)] \to L_1[(\ell\ldots v,\alpha)]\,,$$

$$L[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(j,\gamma\delta\ldots\tau)] \to L_2[(\ell\ldots v,\alpha)]\,,$$

$$L[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(k,\gamma\delta\ldots\tau)] \to L_3[(\ell\ldots v,\alpha)]\,,$$

причем все взаимные разности L_1-L_2 , L_1-L_3 , L_2-L_3 в нуль не обращаются. Поскольку такие $K\neq 0$ и $A_{(i,\alpha)}[(i\ell\ldots v,\alpha)]\neq 0$, уравнение /4.1/ может быть однозначно разрешено относительно аргумента (i,α) .

Запишем уравнение /4.1/ для кортежа $\langle ij_1k_1\ell_1\ldots v_1,\alpha\beta_1\rangle$, где $i\in P(i_1)$, $\alpha\in Q(\alpha_1)$:

$$\hat{R}(\alpha\beta_1)K[(\ell_1\ldots v_1,\alpha)]\left\{\frac{A[(j_1\ell_1\ldots v_1,\alpha)]-A[(i\ell_1\ldots v_1,\alpha)]}{L_2[(\ell_1\ldots v_1,\alpha)]-L_1[(\ell_1\ldots v_1,\alpha)]}-\right.$$

$$-\frac{A[(j_1 l_1 \dots \nu_1, \alpha)] - A[(k_1 l_1 \dots \nu_1, \alpha)]}{L_2[(l_1 \dots \nu_1, \alpha)] - L_3[(l_1 \dots \nu_1, \alpha)]} \Big\} + \hat{R}(\alpha\beta_1) C_4[(l_1 \dots \nu_1, \alpha)] = 0. \quad /4.2/$$

Разрешая уравнение /4.2/ относительно (i, α), получаем после некоторых удобных переобозначений следующее параматрическое представление для функции $a: P(i_1) \times Q(\alpha_1) \to R$:

$$(i, \alpha) = \Gamma\{(i, \beta_1), (l_1 \dots \nu_1, \alpha), \varphi[(j_1 k_1 l_1 \dots \nu_1, \alpha)]\}, \quad /4.3/$$

где параметры задаются открытыми отображениями $a[\beta_1]: P(i_1) \to R$ и $a[j_1 k_1 l_1 \dots \nu_1]: Q(\alpha_1) \to R^{m-1}$. Параметры $(j_1 k_1 l_1 \dots \nu_1, \alpha)$ входят в выражение /4.3/ несущественным образом, что приводит к противоречию с условием А. Действительно, возьмем в окрестности $P(i_1)$ $(m-1)$ различный элемент $i_2, i_3, \dots, i_m$ и подставим в представление /4.3/ на место i выбранные элементы:

$$\left.\begin{aligned}
&(i_2, \alpha) = \Gamma\{(i_2, \beta_1), (l_1 \dots \nu_1, \alpha), \varphi[(j_1 k_1 l_2 \dots \nu_1, \alpha)]\}, \\
&(i_3, \alpha) = \Gamma\{(i_3, \beta_1), (l_1 \dots \nu_1, \alpha), \varphi[(j_1 k_1 l_1 \dots \nu_1, \alpha)]\}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&(i_m, \alpha) = \Gamma\{(i_m, \beta_1), (l_1 \dots \nu_1, \alpha), \varphi[(j_1 k_1 l_1 \dots \nu_1, \alpha)]\}.
\end{aligned}\right\} \quad /4.4/$$

В соответствии с условием А, отображение $a[i_2 i_3 \dots i_m]: Q(\alpha_1) \to R^{m-1}$ должно быть открытым для недиагонального кортежа $\langle i_2 i_3 \dots i_m \rangle$. Однако, это невозможно, так как $(m-1)$ координата точки $(i_2 i_3 \dots i_m, \alpha) \in R^{m-1}$ согласно /4.4/ выражаются аналитически через $(m-2$ параметра $(l_1 \dots \nu_1, \alpha)$ и $\varphi[(j_1 k_1 l_2 \dots \nu_1, \alpha)]$. То есть, в действительности, множество точек $(i_2 i_3 \dots i_m, \alpha)$ при фиксированных различных элементах $i_2, i_3, \dots, i_m \in P(i_1)$ и $\alpha \in Q(\alpha_1)$ есть множество нулевой меры в R^{m-1}, следова-

тельно, не открыто в R^{m-1}, в противоречие с условием Λ.

Итак, было показано, что для $n = 2$ уравнение /3.39/ не может задавать некоторую окрестность точек $\mathcal{N}$, соответствующих недиагональным кортежам из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^2$, и остается, таким образом, возможность задания этой окрестности уравнением /3.43/. Для рассматриваемого случая $n = 2$ уравнение /3.43/ имеет вид

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(ilf\ldots v,\alpha)] & \Lambda[(ilf\ldots v,\beta)] & 1 \\ \Lambda[(jlf\ldots v,\alpha)] & \Lambda[(jlf\ldots v,\beta)] & 1 \\ \Lambda[(klf\ldots v,\alpha)] & \Lambda[(klf\ldots v,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad /4.5/$$

Для случая $m = 3$ уравнение /4.5/ запишется :

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(i,\alpha)] & \Lambda[(i,\beta)] & 1 \\ \Lambda[(j,\alpha)] & \Lambda[(j,\beta)] & 1 \\ \Lambda[(k,\alpha)] & \Lambda[(k,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad /4.6/$$

где аналитическая функция $\Lambda(t)$ определена в некоторой окрестности несовпадающих точек, задаваемых значениями функции $a : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1 \to R$, причем в каждой такой точке производная $\Lambda_t(t)$ отлична от нуля.

Запишем уравнение /4.6/ для кортежа $\langle i j_1 k_1, \alpha\beta_1 \rangle$, где $i \in P(i_1)$, $\alpha \in Q(\alpha_1)$, и разрешим его относительно (i,α), введя естественным образом параметры $x_i, \xi_\alpha^1, \xi_\alpha^2$:

$$(i,\alpha) = \psi^{-1}(x_i \xi_\alpha^1 + \xi_\alpha^2). \qquad /4.7/$$

Аналитическая функция $\psi(t)$ определена в некоторой окрестности точки $(i_1,\alpha_1) \in R$, где $\psi(t) \equiv \Lambda(t)$. Поскольку производная $\psi_t(t) \neq 0$, функция $\psi(t)$ имеет обратную ψ^{-1}. Если в дальнейшем предполагать, что $i,j,k \in P(i_1)$, $\alpha,\beta \in Q(\alpha_1)$,

то на множество значений функции $A:[P(i_1)]^3\times[Q(\alpha_1)]^2\to R^6$ может быть задано уравнением

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & 1 \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & 1 \\ \psi[(k,\alpha)] & \psi[(k,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad /4.8/$$

Так как $i_1\in P(i_0)$, $\alpha_1\in Q(\alpha_0)$, результаты /4.7/ и /4.8/ составляют содержание случая d / доказываемой теоремы для $m=n+1=3$. Этот случай ранее отдельно был рассмотрен автором параметрическим методом [4] , [7] и получен такой же результат. Заметим, что параметрическим методом полностью исследованы только простейшие случаи $m=n=2$ [6] и $m=n+1=3$ [4] , [7] .

При дальнейших преобразованиях уравнения /4.5/ будем предполагать, что $m\geq 4$. Переставим в уравнении /4.5/ элементы k , ℓ , то есть запишем его для кортежа $\langle ij\ell kf\dots v,\alpha\beta\rangle$:

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(ikf\dots v,\alpha)] & \Lambda[(ikf\dots v,\beta)] & 1 \\ \Lambda[(jkf\dots v,\alpha)] & \Lambda[(jkf\dots v,\beta)] & 1 \\ \Lambda[(\ell kf\dots v,\alpha)] & \Lambda[(\ell kf\dots v,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad /4.9/$$

В силу эквивалентности уравнения /4.5/ и /4.9/ определяют неявно, например, (j,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α) . Сравнивая два выражения для производной функции (j,β) по переменной (i,α) , найденные из неявных заданий /4.5/ и /4.9/, получаем :

$$\frac{\Lambda_{(i,\alpha)}[(i\ell f\dots v,\alpha)]}{\Lambda_{(i,\alpha)}[(ikf\dots v,\alpha)]}\cdot\frac{\Lambda[(ikf\dots v,\alpha)]-\Lambda[(\ell kf\dots v,\alpha)]}{\Lambda[(i\ell f\dots v,\alpha)]-\Lambda[(k\ell f\dots v,\alpha)]}=$$

$$\frac{\Lambda_{(j,\beta)}[(jlf\dots v,\beta)]}{\Lambda_{(j,\beta)}[(jkf\dots v,\beta)]}\cdot\frac{\Lambda[(jkf\dots v,\beta)]-\Lambda[(lkf\dots v,\beta)]}{\Lambda[(jlf\dots v,\beta)]-\Lambda[(klf\dots v,\beta)]}\cdot \qquad /4.10/$$

Равенство /4.10/ выполняется тождественно по всем входящим в него переменным, из-за отсутствия зависимости от (i,β) и (j,α), и потому представляет собой функционально-дифференциальное уравнение для Λ. Зафиксируем в равенстве /4.10/ значения переменных $(jklf\dots v,\beta)$:

$$\frac{\Lambda_{(i,\alpha)}[(ilf\dots v,\alpha)]}{\Lambda_{(i,\alpha)}[(ikf\dots v,\alpha)]}\cdot\frac{\Lambda[(ikf\dots v,\alpha)]-\Lambda[(lkf\dots v,\alpha)]}{\Lambda[(ilf\dots v,\alpha)]-\Lambda[(klf\dots v,\alpha)]}=a, \qquad /4.11/$$

где постоянная a отлична от нуля. Если в равенстве /4.11/ переставить элементы k, l, то правая часть должна остаться без изменения, а в левой части числитель и знаменатель поменяются местами:

$$\frac{\Lambda_{(i,\alpha)}[(ikf\dots v,\alpha)]}{\Lambda_{(i,\alpha)}[(ilf\dots v,\alpha)]}\cdot\frac{\Lambda[(ilf\dots v,\alpha)]-\Lambda[(klf\dots v,\alpha)]}{\Lambda[(ikf\dots v,\alpha)]-\Lambda[(lkf\dots v,\alpha)]}=a,$$

то есть $a^2=1$. Для постоянной a возможны два значения: $a=+1$ и $a=-1$.

В равенстве /4.11/ зафиксируем дополнительно значение переменной (k,α):

$$\Lambda_{(i,\alpha)}[(ilf\dots v,\alpha)]/\{\Lambda[(ilf\dots v,\alpha)]-B[(lf\dots v,\alpha)]\}=$$
$$=a\,\Delta_{(i,\alpha)}[(if\dots v,\alpha)]/\{\Delta[(if\dots v,\alpha)]-\Delta[(lf\dots v,\alpha)]\},$$

откуда после элементарного интегрирования получаем выражение для функции Λ :

$$\Lambda[(ilf\ldots v,\alpha)] = B[(lf\ldots v,\alpha)] + A[(lf\ldots v,\alpha)]\{\Delta[(if\ldots v,\alpha)] - \Delta[(lf\ldots v,\alpha)]\}^{a}. \qquad /4.12/$$

Отметим, что $A[(lf\ldots v,\alpha)] \neq 0$, $\Delta_{(i,\alpha)}[(if\ldots v,\alpha)] \neq 0$, $\Delta_{(l,\alpha)}[(lf\ldots v,\alpha)] \neq 0$ и отлична от нуля разность $\Delta[(if\ldots v,\alpha)] - \Delta[(lf\ldots v,\alpha)]$ в выражении /4.12/.

Подставим решение /4.12/ в исходное равенство /4.11/ :

$$\frac{\{\Delta[(if\ldots v,\alpha)] - \Delta[(kf\ldots v,\alpha)]\}^{a} - \{\Delta[(lf\ldots v,\alpha)] - \Delta[(kf\ldots v,\alpha)]\}^{a}}{\{\Delta[(if\ldots v,\alpha)] - \Delta[(lf\ldots v,\alpha)]\}^{a} - \{\Delta[(kf\ldots v,\alpha)] - \Delta[(lf\ldots v,\alpha)]\}^{a}} =$$

$$= \frac{\{\Delta[(if\ldots v,\alpha)] - \Delta[(kf\ldots v,\alpha)]\}^{a-1}}{\{\Delta[(if\ldots v,\alpha)] - \Delta[(lf\ldots v,\alpha)]\}^{a-1}}. \qquad /4.13/$$

Для постоянной a , как было отмечено выше, имеется всего два значения. Подставим первое из них $a = +1$ в равенство /4.13/:

$$\frac{\Delta[(if\ldots v,\alpha)] - \Delta[(lf\ldots v,\alpha)]}{\Delta[(if\ldots v,\alpha)] - \Delta[(kf\ldots v,\alpha)]} = 1,$$

то есть $\Delta[(kf\ldots v,\alpha)] - \Delta[(lf\ldots v,\alpha)] = 0$, что противоречит условию необращения в нуль этой разности. Таким образом, значение $a = +1$ должно быть исключено. С другой стороны, легко проверить, что равенство /4.13/ обращается в тождество при подстановке значения $a = -1$.

Для функции Λ из формулы /4.I2/, где должно быть $a = 1$, получаем выражение

$$\Lambda[(i\,lf\ldots v,\alpha)] = B[(lf\ldots v,\alpha)] + \\ + A[(lf\ldots v,\alpha)]\{\Delta[(if\ldots v,\alpha)] - \Delta[(lf\ldots v,\alpha)]\}^{-1}. \qquad /4.I4/$$

Подставим функцию /4.I4/ в уравнение /4.5/, исключая аддитивный член B и вынося из первого и второго столбца ненулевой множитель A :

$$\begin{vmatrix} \{\hat{R}(il)\Delta[(if w\ldots v,\alpha)]\}^{-1} & \{\hat{R}(il)\Delta[(if w\ldots v,\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(jl)\Delta[(jf w\ldots v,\alpha)]\}^{-1} & \{\hat{R}(jl)\Delta[(jf w\ldots v,\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(kl)\Delta[(kf w\ldots v,\alpha)]\}^{-1} & \{\hat{R}(kl)\Delta[(kf w\ldots v,\beta)]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad /4.I5/$$

Уравнение /4.I5/ является следствием эквивалентности уравнений /4.5/ и /4.9/. Аналитическая функция Δ имеет отличную от нуля производную по первому аргументу. Поскольку в определителе /4.I5/ не обращаются в нуль разности, стоящие в фигурных скобках, а также миноры второго порядка, содержащие столбец из единиц, производные левой части уравнения /4.I5/ по каждой из переменных $(ijk,\alpha\beta)$, а следовательно, и по всем остальным, отличны от нуля.

Выпишем уравнение /4.I5/ для случая $m = 4$:

$$\begin{vmatrix} \{\Delta[(i,\alpha)] - \Delta[(l,\alpha)]\}^{-1} & \{\Delta[(i,\beta)] - \Delta[(l,\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\Delta[(j,\alpha)] - \Delta[(l,\alpha)]\}^{-1} & \{\Delta[(j,\beta)] - \Delta[(l,\beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\Delta[(k,\alpha)] - \Delta[(l,\alpha)]\}^{-1} & \{\Delta[(k,\beta)] - \Delta[(l,\beta)]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad /4.I6/$$

где аналитическая функция $\Delta(t)$ определена и имеет отличную от нуля производную $\Delta_t(t)$ в некоторой окрестности каждой точки, задаваемой несовпадающим значениями функции $a: \mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_1 \to R$. Представим уравнение /4.16/ в виде, разрешенном относительно (i,α) и запишем его для кортежа $\langle i_1 k_1 l_1, \alpha\beta_1 \rangle$, где $i \in P(i_1)$, $\alpha \in Q(\alpha_1)$. Вводя удобным образом параметры x_i, ξ_α^1, ξ_α^2, ξ_α^3, получаем следующее параметрическое представление для функции $a: P(i_1) \times Q(\alpha_1) \to R$:

$$(i.\alpha) = \Psi^{-1}[(x_i \xi_\alpha^1 + \xi_\alpha^2)/(x_i + \xi_\alpha^3)], \qquad /4.17/$$

где $\Psi(t) \equiv \Delta(t)$ в некоторой окрестности точки $(i_1, \alpha_1) \in R$, Ψ^{-1} – обратная функция. Если предполагать далее, что $i,j,k,l \in P(i_1)$ и $\alpha,\beta \in Q(\alpha_1)$, то множество значений функции $A: [P(i_1)]^4 \times [Q(\alpha_1)]^2 \to R^8$ может быть задано уравнением

$$\begin{vmatrix} \Psi[(i,\alpha)] & \Psi[(i,\beta)] & \Psi[(i,\alpha)] \times \Psi[(i,\beta)] & 1 \\ \Psi[(j,\alpha)] & \Psi[(j,\beta)] & \Psi[(j,\alpha)] \times \Psi[(j,\beta)] & 1 \\ \Psi[(k,\alpha)] & \Psi[(k,\beta)] & \Psi[(k,\alpha)] \times \Psi[(k,\beta)] & 1 \\ \Psi[(l,\alpha)] & \Psi[(l,\beta)] & \Psi[(l,\alpha)] \times \Psi[(l,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad /4.18/$$

Поскольку $i_1 \in P(i_0)$ $\alpha_1 \in Q(\alpha_0)$, результаты /4.17/, /4.18/ составляют содержание случая в/ доказываемой теоремы. Уравнение /4.18/ впервые было обнаружено автором [4], однако попытка получить его параметрическим методом не была успешной из-за возникших трудностей, связанных с решением дифференциальных уравнений, в которые неизвестная функция входит нелинейным образом

При последующих преобразованиях результата /4.I5/ будем предполагать, что $m \geq 5$. Переставим в уравнении /4.I5/ элементы ℓ , f , то есть запишем его для кортежа $\langle ijkf\ell w \ldots v, \alpha\beta \rangle$:

$$\begin{vmatrix} \{\hat{R}(if)\Delta[i\ell w \ldots v,\alpha]\}^{-1} & \{\hat{R}(if)\Delta[i\ell w \ldots v,\beta]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(jf)\Delta[j\ell w \ldots v,\alpha]\}^{-1} & \{\hat{R}(jf)\Delta[j\ell w \ldots v,\beta]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(kf)\Delta[k\ell w \ldots v,\alpha]\}^{-1} & \{\hat{R}(kf)\Delta[k\ell w \ldots v,\beta]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad /4.I9/$$

В силу эквивалентности, уравнения /4.I5/ и /4.I9/ определяют, например, (j,α) как одну и ту же функцию переменной (i,α) . Сравнивая два выражения для производной функции (j,α) по переменной (i,α) , найденные из неявных заданий /4.I5/ и /4.I9/, получаем :

$$\hat{R}(\ell f)\frac{\dfrac{\Delta_{i,\alpha}[if w \ldots v,\alpha]}{\{\hat{R}(i\ell)\Delta[if w \ldots v,\alpha]\}^2}\cdot\begin{vmatrix} \{\hat{R}(j\ell)\Delta[jf w \ldots v,\beta]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(k\ell)\Delta[kf w \ldots v,\beta]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix}}{\dfrac{\Delta_{j,\alpha}[jf w \ldots v,\alpha]}{\{\hat{R}(j\ell)\Delta[jf w \ldots v,\alpha]\}^2}\cdot\begin{vmatrix} \{\hat{R}(i\ell)\Delta[if w \ldots v,\beta]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(k\ell)\Delta[kf w \ldots v,\beta]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix}} = 0.$$

Воспользуемся дополнительно уравнениями /4.I5/ и /4.I9/, чтобы исключить из полученного равенства элемент β :

$$\hat{R}(\ell f)\{\Delta_{i,\alpha}[if w \ldots v,\alpha]/\Delta_{j,\alpha}[jf w \ldots v,\alpha]\}\times$$

$$\times\frac{\{\hat{R}(jk)\Delta[jf w \ldots v,\alpha]\}}{\{\hat{R}(ik)\Delta[if w \ldots v,\alpha]\}}\cdot\frac{\{\hat{R}(j\ell)\Delta[jf w \ldots v,\alpha]\}}{\{\hat{R}(i\ell)\Delta[if w \ldots v,\alpha]\}} = 0. \qquad /4.20/$$

Равенство /4.20/ выполняется тождественно по всем входящим в него переменным и потому представляет собой функционально-дифференциальное уравнение для Δ . В равенстве /4.20/ зафиксируем значение переменных (i,j,ρ,α) , вводя удобные обозначения функций A , B , B_1 , B_2 :

$$\{\Delta[(kjw\ldots v,\alpha)] + B_1[(jw\ldots v,\alpha)]\}\times$$

$$\times\{A[(kw\ldots v,\alpha)] + B[(jw\ldots v,\alpha)]\} = B_2[(jw\ldots v,\alpha)] , \qquad /4.21/$$

причем $A_{1k,\alpha}[(kw\ldots v,\alpha)] \neq 0$ и $B_2[(jw\ldots v,\alpha)] \neq 0$.

Перепишем уравнение /4.15/, преобразуя очевидным образом определитель третьего порядка в определитель четвертого порядка :

$$\begin{vmatrix} \Delta[(ijw\ldots v,\alpha)] & \Delta[(ijw\ldots v,\beta)] & \Delta[(ijw\ldots v,\alpha)]\times\Delta[(ijw\ldots v,\beta)] & 1 \\ \Delta[(jjw\ldots v,\alpha)] & \Delta[(jjw\ldots v,\beta)] & \Delta[(jjw\ldots v,\alpha)]\times\Delta[(jjw\ldots v,\beta)] & 1 \\ \Delta[(kjw\ldots v,\alpha)] & \Delta[(kjw\ldots v,\beta)] & \Delta[(kjw\ldots v,\alpha)]\times\Delta[(kjw\ldots v,\beta)] & 1 \\ \Delta[(ljw\ldots v,\alpha)] & \Delta[(ljw\ldots v,\beta)] & \Delta[(ljw\ldots v,\alpha)]\times\Delta[(ljw\ldots v,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad /4.22/$$

Преобразуем уравнение /4.22/, воспользовавшись связью /4.21/. Сначала умножим первый столбец на $B_2[(jw\ldots v,\beta)]$, второй - на $B_2[(jw\ldots v,\alpha)]$ и сложим с третьим столбцом. Затем столбец из единиц умножаем на $B_1[(jw\ldots v,\alpha)]$, $B_1[(jw\ldots v,\beta)]$, $B_1[(jw\ldots v,\alpha)]\cdot B_1[(jw\ldots v,\beta)]$ и складываем его с первым, вторым и третьим столбцами, соответственно. В результате приходим к определителю /4.22/, в котором вместо функции Δ стоит сумма $\Delta + B_1$. Далее, умножим первую строку на произведение $\{A[(iw\ldots v,\alpha)] + B[(jw\ldots v,\alpha)]\}\times\{A[(iw\ldots v,\beta)] + B[(jw\ldots v,\beta)]\}$ и аналогично следующие строки. После несложных преобразований, учитывая, что $B_2 \neq 0$, получаем:

$$\begin{vmatrix} A[(iw\ldots v,\alpha)] & A[(iw\ldots v,\beta)] & A[(iw\ldots v,\alpha)]\times A[(iw\ldots v,\beta)] & 1 \\ A[(jw\ldots v,\alpha)] & A[(jw\ldots v,\beta)] & A[(jw\ldots v,\alpha)]\times A[(jw\ldots v,\beta)] & 1 \\ A[(kw\ldots v,\alpha)] & A[(kw\ldots v,\beta)] & A[(kw\ldots v,\alpha)]\times A[(kw\ldots v,\beta)] & 1 \\ A[(lw\ldots v,\alpha)] & A[(lw\ldots v,\beta)] & A[(lw\ldots v,\alpha)]\times A[(lw\ldots v,\beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad /4.23/$$

Уравнение /4.23/, в действительности, является тождеством по всем входящим в него переменным, так как отсутствует зависимость от (f,α) и (f,β). Продифференцируем тождество /4.16/ последовательно по переменным (i,α), (i,β), (j,α), (k,β):

$$A_{(i,\alpha)}[(iw\ldots v,\alpha)]\times A_{(i,\beta)}[(iw\ldots v,\beta)]\times$$

$$\times A_{(j,\alpha)}[(jw\ldots v,\alpha)]\times A_{(k,\beta)}[(kw\ldots v,\beta)] = 0,$$

что противоречит условию необращения в нуль каждого из четырех сомножителей. Установленное противоречие означает, что нельзя записать уравнение, задающее множество $\mathcal{N}$ в случае $m \geq 5$, $n = 2$, то есть бинарные физические структуры ранга $(m,2)$ для $m \geq 5$ не существуют. Последнее утверждение не исчерпывает всего случая е/ доказываемой теоремы, а является его частью только для $n = 2$. В последующих параграфах, где рассматриваются физические структуры ранга (m,n) для $m \geq n \geq 3$, доказательство случая е/ основной теоремы будет завершено.

§ 5. Общие преобразования: $m \geq n \geq 3$

В третьем параграфе было показано, что уравнения /3.39/ и /3.43/ являются следствием эквивалентности уравнений /2.13/ и /3.1/, то есть для $m \geq n \geq 3$ множество $\mathcal{N}$ в окрестности точек, соответствующих недиагональным кортежам из $\mathcal{T}_1^m \times \mathcal{T}_1^n$ может быть задано, вообще говоря, либо уравнением /3.39/, либо уравнением /3.43/. Предположим для определенности, что в некоторой окрестности точки $(i_1 j_1 k_1 l_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \dots \tau_1) \in R^{mn}$ множество $\mathcal{N}$ задается уравнением /3.39/. При перестановке элементов β, γ это уравнение может сохранить свою форму, но может и изменить ее, то есть в соответствующей окрестности канонически сопряженной точки $(i_1 j_1 k_1 l_1 \dots v_1, \alpha_1 \gamma_1 \beta_1 \delta_1 \dots \tau_1) \in R^{mn}$ множество $\mathcal{N}$ задается одним из уравнений /3.39/, /3.43/.

Рассмотрим сначала случай, когда при перестановке элементов β, γ уравнение /3.39/ изменяет свою форму в разъясненном выше смысле и множество $\mathcal{N}$ в окрестности сопряженной точки задается уравнением

$$\begin{vmatrix} \Lambda[il\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau] & \Lambda[il\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau] & 1 \\ \Lambda[jl\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau] & \Lambda[jl\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau] & 1 \\ \Lambda[kl\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau] & \Lambda[kl\dots v,\gamma\beta\delta\dots\tau] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad /5.1/$$

В силу эквивалентности уравнения /3.39/ и /5.1/ определяют неявно, например, (j,α) как одну и ту же функцию переменной (i,α). Найдем из неявных заданий /3.39/ и /5.1/ производную функции (j,α) по переменной (i,α) и приравняем два выражения для этой производной :

$$\frac{\Lambda(i,\alpha)[ikl\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau]}{\Lambda(j,\alpha)[jkl\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau]}\cdot\frac{L[(kl\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(j,\gamma\delta\ldots\tau)]-L[(kl\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(k,\gamma\delta\ldots\tau)]}{L[(kl\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(i,\gamma\delta\ldots\tau)]-L[(kl\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(k,\gamma\delta\ldots\tau)]}=$$

$$=\frac{\Lambda(i,\alpha)[ikl\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau]}{\Lambda(j,\alpha)[jkl\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau]}\cdot\frac{\Lambda[jkl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau]-\Lambda[ikl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau]}{\Lambda[ikl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau]-\Lambda[jkl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau]}\quad /5.2/$$

Равенство /5.2/ инвариантно относительно перестановок элементов i, j, k, так как и в уравнении /3.39/ и в уравнении /5.1/ можно свободно переставлять эти элементы. Равенство /5.2/ есть тождество по всем входящим в него переменным, вследствие отсутствия зависимости от (k,α).

Продифференцируем тождество /5.2/ по переменной (k,β). Учитывая, что отлична от нуля производная функции Λ по первому аргументу, а также не обращаются в нуль разности, стоящие в числителе и знаменателе правой части равенства /5.2/, получаем :

$$\Lambda(k,\beta)[ikl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau]=0,$$

то есть функция $\Lambda[ikl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau]$ не зависит от переменной (k,β). Точно также, используя инвариантность равенства /5.2/ относительно перестановок элементов i, j, k, находим, что $\Lambda(i,\beta)[ikl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau]=0$, $\Lambda(j,\beta)[jkl\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau]=0$

Пусть γ' некоторый элемент из окрестности $\rho(\gamma_i)$, которой принадлежит также элемент γ. Запишем уравнение /5.1/ для кортежа $\langle ijkl\ldots v,\alpha\gamma'\beta\delta\ldots\tau\rangle$, то есть вместо элемента γ подставим γ' :

$$\begin{vmatrix} \Lambda[ki\ell\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau] & \Lambda[ki\ell\ldots v,\gamma'\beta\delta\ldots\tau] & 1 \\ \Lambda[j\ell\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau] & \Lambda[j\ell\ldots v,\gamma'\beta\delta\ldots\tau] & 1 \\ \Lambda[k\ell\ldots v,\alpha\beta\delta\ldots\tau] & \Lambda[k\ell\ldots v,\gamma'\beta\delta\ldots\tau] & 1 \end{vmatrix} = 0 , \qquad /5.3/$$

причем производные $\Lambda_{i,\beta}[i\ell\ldots v,\gamma'\beta\delta\ldots\tau]$, $\Lambda_{j,\beta}[j\ell\ldots v,\gamma'\beta\delta\ldots\tau]$ и $\Lambda_{k,\beta}[k\ell\ldots v,\gamma'\beta\delta\ldots\tau]$ равны нулю. Рассматривая уравнения /5.I/ и /5.3/ совместно, можно получить третье уравнение, в котором отсутствует элемент α :

$$\begin{vmatrix} \Lambda[i\ell\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau] & \Lambda[i\ell\ldots v,\gamma'\beta\delta\ldots\tau] & 1 \\ \Lambda[j\ell\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau] & \Lambda[j\ell\ldots v,\gamma'\beta\delta\ldots\tau] & 1 \\ \Lambda[k\ell\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau] & \Lambda[k\ell\ldots v,\gamma'\beta\delta\ldots\tau] & 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad /5.4/$$

Уравнение /5.4/, в действительности, является тождеством из-за отсутствия переменных (i,j,k,β) , так как производная функции Λ по второму аргументу равна нулю. Продифференцируем тождество /5.4/ по переменным (i,γ) и (j,γ') :

$$\Lambda_{i,\gamma}[i\ell\ldots v,\gamma\beta\delta\ldots\tau]\,\Lambda_{j,\gamma'}[j\ell\ldots v,\gamma'\beta\delta\ldots\tau] = 0 ,$$

что противоречит условию необращения в нуль производной функции Λ по первому аргументу. Установленное противоречие доказывает, что если и возможно задание некоторой окрестности точки $(i_1,j_1,k_1,\ell_1\ldots v_1,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1\ldots\tau_1)$ на множестве $\mathcal{N}$ уравнением /3.39/, то оно при перестановке элементов β , γ не может переходить в уравнение /5.I/.

Приступим теперь к рассмотрению второго случая, когда при перестановке элементов β , γ уравнение /3.39/ сохраняет свою

форму. Иначе говоря, множество $\mathcal{N}$ в окрестности сопряженной точки $(i_1 j_1 k_1 l_1 \dots v_1, \alpha_1 \gamma_1 \beta_1 \delta_1 \dots \tau_1)$ задается уравнением

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\gamma)\frac{K[(l\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau),(j,\beta\delta\dots\tau)]\{A[(jl\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau)]-A[(il\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau)]\}}{L[(l\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau),(j,\beta\delta\dots\tau)]-L[(l\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau),(i,\beta\delta\dots\tau)]}+$$

$$+\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\gamma)C_3[(l\dots v,\alpha\beta\delta\dots\tau),(ij,\beta\delta\dots\tau)]=0 \qquad /5.5/$$

В силу эквивалентности уравнения /3.39/ и /5.5/ определяют неявно (j,α) как одну и ту же функцию переменной (i,α). Сравнивая два выражения для производной функции (j,α) по переменной (i,α), получаем

$$\hat{R}(\gamma\beta)\{A_{(i,\alpha)}[(il\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)]/A_{(j,\alpha)}[(jl\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau)]\}\times$$

$$\times\frac{L[(l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau),(j,\gamma\delta\dots\tau)]-L[(l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau),(k,\gamma\delta\dots\tau)]}{L[(l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau),(i,\gamma\delta\dots\tau)]-L[(l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau),(k,\gamma\delta\dots\tau)]}=0. \qquad /5.6/$$

Равенство /5.6/, очевидно, есть тождество по всем входящим в него переменным. Продифференцируем тождество /5.6/ по переменной (k,γ), произведя сокращение на множители, не обращающиеся в нуль:

$$L_{(k,\gamma)}[(l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau),(k,\gamma\delta\dots\tau)]=0,$$

то есть функция $L[(l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau),(k,\gamma\delta\dots\tau)]$, в действительности, не зависит от переменной (k,γ). Поскольку равенство /5.6/ инвариантно относительно перестановки элементов i, j, k, аналогично можно установить, что
$L_{(j,\gamma)}[(l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau),(j,\gamma\delta\dots\tau)]=0$, $L_{(i,\gamma)}[(l\dots v,\alpha\gamma\delta\dots\tau),(i,\gamma\delta\dots\tau)]=0$.

Изучим теперь, как ведет себя уравнение /3.39/ при перестановке элементов β , δ . Переход к уравнению типа /3.43/ невозможен, так как приводит к противоречию, аналогичному тому, которое было выявлено при сопоставлении уравнений /3.39/ и /5.1/. Если же уравнение /3.39/ сохраняет свою форму, то функция $L[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(i,\gamma\delta\ldots\tau)]$, например, не должна зависеть также и от переменной (i,δ) . Рассматривая последовательно перестановки в уравнении /3.39/ элемента β с каждым из элементов $\gamma,\delta,\ldots,\tau$, необходимо получаем :

$$\left.\begin{aligned} L[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(i,\gamma\delta\ldots\tau)] &= L_1[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)] \\ L[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(j,\gamma\delta\ldots\tau)] &= L_2[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)] \\ L[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(k,\gamma\delta\ldots\tau)] &= L_3[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)] \end{aligned}\right\} \qquad /5.7/$$

причем разности L_1-L_2 , L_1-L_3 , L_2-L_3 являются отличными от нуля аналитическими функциями. Аналогичный результат может быть получен и при рассмотрении перестановок в уравнении /3.39/ элемента α с каждым из элементов $\gamma,\delta,\ldots,\tau$. Это означает, что в выражениях /5.7/ для функций L вместо α можно подставить β .

Перепишем уравнение /3.39/, используя выражения /5.7/ :

$$\hat{R}(\alpha\beta)K[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(j,\gamma\delta\ldots\tau)]\left\{\frac{A[(j\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]-A[(i\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]}{L_2[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]-L_1[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]}-\right.$$

$$\left.\frac{A[(j\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]-A[(k\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]}{L_2[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]-L_3[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau)]}\right\}+$$

$$+\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)C_3[(\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\tau),(ij,\gamma\delta\ldots\tau)]=0. \qquad /5.8/$$

Поскольку $K \neq 0$, $A(i,\alpha)[ijk\ldots v,\alpha\beta\gamma\ldots\tau] \neq 0$, уравнение /5.8/ может быть однозначно разрешено относительно (i,α). Записав уравнение /5.8/ для кортежа $\langle ij_1k_1l_1\ldots v_1,\alpha\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots\tau_1\rangle$, где $i \in P(i_1)$, $\alpha \in Q(\alpha_1)$, получаем такое параметрическое представление функции $a: P(i_1)\times Q(\alpha_1) \to R$:

$$(i,\alpha) = \Gamma\{(i,\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots\tau_1),(l_1\ldots v_1,\alpha),\varphi[ij_1k_1l_1\ldots v_1,\alpha]\}, \qquad /5.9/$$

в котором независимые параметры задаются открытыми отображениями $\alpha(\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots\tau_1]: P(i_1)\to R^{n-1}$ и $\alpha[jk_1l_1\ldots v_1]: Q(\alpha_1)\to R^{m-1}$. Замечаем, что параметры $(j_1k_1l_1\ldots v_1,\alpha)$ входят в представление /5.9/ несущественным образом. Как и в случае /4.8/, легко показать, что отображение $\alpha[i_2i_3\ldots i_m]: Q(\alpha_1)\to R^{m-1}$ не может быть открытым для недиагонального кортежа $\langle i_2i_3\ldots i_m\rangle \in [P(i_1)]^{m-1}$, в противоречие с условием А. Это противоречие доказывает, что невозможно также и сохранение формы уравнения /3.39/ при перестановке элементов β, γ, то есть, в действительности, множество $\mathcal{N}$ в некоторой окрестности точки $(i_1j_1k_1l_1\ldots v_1,\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\ldots\tau_1)$ не может быть задано уравнением /3.39/.

Таким образом, в некоторой окрестности каждой точки $\mathcal{N}$, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{R}_1^m \times \mathcal{R}_1^n$, и в случае $m \geq n \geq 3$ множество $\mathcal{N}$ может быть задано только уравнением /3.43/. Это означает, в частности, что при перестановке элементов β, γ уравнение /3.43/, сохраняя свою форму, переходит в уравнение /5.1/. В силу эквивалентности, уравнения /3.43/ и /5.1/ определяют неявно, например, (j,α) как одну и ту же функцию переменной (i,α). Найдем из неявных заданий /3.43/ и /5.1/ два выражения для производной функции (j,α) по переменной (i,α) и сравним их :

$$\hat{R}(\beta\gamma)\,\frac{\Lambda_{(i,\alpha)}[(i\ell,\alpha\gamma\delta)]}{\Lambda_{(j,\alpha)}[(j\ell,\alpha\gamma\delta)]}\cdot\frac{\Lambda[(j\ell,\beta\gamma\delta)]-\Lambda[(k\ell,\beta\gamma\delta)]}{\Lambda[(i\ell,\beta\gamma\delta)]-\Lambda[(k\ell,\beta\gamma\delta)]}=0\,. \qquad /5.10/$$

где в целях сокращения записи внутри данного параграфа опущены "неподвижные" элементы, следующие за элементами ℓ и δ. В конечных результатах опущенные элементы будут восстановлены.

Равенство /5.10/ выполняется тождественно из-за отсутствия переменной (k,α) и представляет собой функционально дифференциальное уравнение для Λ. Зафиксируем в уравнении /5.10/ значения всех переменных, кроме $(i\ell\ldots v,\alpha\gamma\delta\ldots\gamma)$:

$$\Lambda_{(i,\alpha)}[(i\ell,\alpha\gamma\delta)]=A_{(i,\alpha)}[(i\ell,\alpha\delta)]A_2[(\ell,\alpha\gamma\delta)]B[(i\ell,\gamma\delta)]\,, \qquad /5.11/$$

причем ни один из сомножителей в нуль не обращается. Заметим, что из первого столбца определителя /3.43/ можно вынести общий множитель $A_2[(\ell,\alpha\gamma\delta)]\neq 0$, а из второго столбца - множитель $A_1[(\ell,\beta\gamma\delta)]\neq 0$. Поэтому удобно провести переопределение функции Λ, чтобы исключить ненулевой множитель A_2. С учетом сделанного замечания для функции $\Lambda[(i\ell,\alpha\gamma\delta)]$ после интегрирования соотношения /5.11/ по переменной (i,α) получаем следующее выражение :

$$\Lambda[(i\ell,\alpha\gamma\delta)]=A[(i\ell,\alpha\delta)]B[(i\ell,\gamma\delta)]+C[(i,\gamma\delta),(\ell,\alpha\gamma\delta)]\,. \qquad /5.12/$$

Чтобы найти аналитические функции A,B,C, подставим полученное выражение /5.12/ в исходное уравнение /5.10/ :

$$\hat{R}(\beta\gamma)\,\frac{B[(i\ell,\gamma\delta)]}{B[(j\ell,\gamma\delta)]}\cdot\frac{\Lambda[(j\ell,\beta\gamma\delta)]-\Lambda[(k\ell,\beta\gamma\delta)]}{\Lambda[(i\ell,\beta\gamma\delta)]-\Lambda[(k\ell,\beta\gamma\delta)]}=0\,. \qquad /5.13/$$

В уравнении /5.I3/ зафиксируем значение переменных $(jk.\beta\gamma\delta..\tau)$:

$$\frac{B[(il.\gamma\delta)]}{\Lambda[(il.\beta\gamma\delta)]-C_1[(il.\beta\gamma\delta)]} = \frac{a[(il.\beta\gamma\delta)]\,B[(il.\beta\delta)]}{\Lambda[(il.\gamma\beta\delta)]-C_1[(il.\gamma\beta\delta)]}\,, \qquad /5.I4/$$

где коэффициент $a[(il.\beta\gamma\delta)] \neq 0$ и введено обозначение $C_1[(il.\beta\gamma\delta)] = \Lambda[(kl.\beta\gamma\delta)]|_{(k.\beta\gamma\delta..\tau)=const}$.

В равенстве /5.I4/ переставим местами числитель и знаменатель в правой и левой частях и раскроем его полностью, подставляя выражение /5.I2/ для функции Λ :

$$A[(il.\beta\delta)] + \{C[(i.\gamma\delta).(l.\beta\gamma\delta)] - C_1[(il.\beta\gamma\delta)]\}/B[(il.\gamma\delta)] =$$

$$= \frac{A[(il.\gamma\delta)]}{a[(il.\beta\gamma\delta)]} + \frac{C[(i.\beta\delta).(l.\gamma\beta\delta)] - C_1[(il.\gamma\beta\delta)]}{a[(il.\beta\gamma\delta)]\,B[(il.\beta\delta)]}\,. \qquad /5.I5/$$

Из равенства /5.I5/, фиксируя дополнительно значение переменной $(i.\beta)$, получаем связь

$$A[(il.\gamma\delta)]/a[(il.\beta\gamma\delta)] + E[(i.\delta).(l.\beta\gamma\delta)] =$$

$$= \{C[(i.\gamma\delta).(l.\beta\gamma\delta)] - C_1[(il.\beta\gamma\delta)]\}/B[(il.\gamma\delta)]\,. \qquad /5.I6/$$

Воспользуемся связью /5.I6/ для некоторых преобразований выражения /5.I2/ :

$$\Lambda[(il.\beta\gamma\delta)] = C_1[(il.\beta\gamma\delta)] + B[(il.\gamma\delta)] \times$$

$$\times \{E[(i.\delta).(l.\beta\gamma\delta)] + A[(il.\beta\delta)] + A[(il.\gamma\delta)]/a[(il.\beta\gamma\delta)]\}. \qquad /5.I7/$$

Введем для сокращения записи обозначение

$$F[(il),\beta\gamma\delta] = E[(i,\delta),(l),\beta\gamma\delta] + A[(il),\beta\delta] + A[(il),\gamma\delta]/a[(l),\beta\gamma\delta] \qquad /5.18/$$

и тогда

$$\Lambda[(il),\beta\gamma\delta] = C_1[(l),\beta\gamma\delta] + B[(il),\gamma\delta]\,F[(il),\beta\gamma\delta]\,. \qquad /5.17'/$$

Подставим выражение /5.17'/ для функции Λ в уравнение /5.18/ :

$$\hat{R}(\beta\gamma)\,\frac{F[(jl),\beta\gamma\delta]/B[(kl),\gamma\delta] - F[(kl),\beta\gamma\delta]/B[(jl),\gamma\delta]}{F[(il),\beta\gamma\delta]/B[(kl),\gamma\delta] - F[(kl),\beta\gamma\delta]/B[(il),\gamma\delta]} = 0. \qquad /5.19/$$

Продифференцируем равенство /5.19/ по переменной (j,β) и в результате переставим местами числитель и знаменатель :

$$\frac{F[(il),\gamma\beta\delta]/B[(kl),\beta\delta] - F[(kl),\gamma\beta\delta]/B[(il),\beta\delta]}{A_{(j,\beta)}[(jl),\beta\delta]/a[(l),\gamma\beta\delta]\,B[(kl),\beta\delta] - F[(kl),\gamma\beta\delta]\cdot\{1/B[(jl),\beta\delta]\}_{(j,\beta)}} =$$

$$= \frac{F[(il),\beta\gamma\delta]/B[(kl),\gamma\delta] - F[(kl),\beta\gamma\delta]/B[(il),\gamma\delta]}{A_{(j,\beta)}[(jl),\beta\delta]/B[(kl),\gamma\delta]}\,, \qquad /5.20/$$

Продифференцируем результат /5.20/ по переменной (i,β) :

$$\frac{A_{(i,\beta)}[(il),\beta\delta]/a[(l),\gamma\beta\delta]\,B[(kl),\beta\delta] - F[(kl),\gamma\beta\delta]\times\{1/B[(il),\beta\delta]\}_{(i,\beta)}}{A_{(j,\beta)}[(jl),\beta\delta]/a[(l),\gamma\beta\delta]\,B[(kl),\beta\delta] - F[(kl),\gamma\beta\delta]\times\{1/B[(jl),\beta\delta]\}_{(j,\beta)}} =$$

$$= A_{(i,\beta)}[(il),\beta\delta]/A_{(j,\beta)}[(jl),\beta\delta]\,,$$

откуда легко получаем

$$F[(k\ell,\gamma\rho\delta)]\{1/B[(i\ell,\rho\delta)]\}_{(i,\rho)}/A_{(i,\rho)}[(i\ell,\rho\delta)] =$$

$$= F[(k\ell,\gamma\rho\delta)]\{1/B[(j\ell,\rho\delta)]\}_{(j,\rho)}/A_{(j,\rho)}[(j\ell,\rho\delta)]. \qquad /5.21/$$

Дифференцируя далее равенство /5.21/ по переменной (k,γ) и производя сокращение на множитель $A_{(k,\gamma)}[(k\ell,\gamma\delta)] \neq 0$, получаем:

$$\frac{\{1/B[(i\ell,\rho\delta)]\}_{(i,\rho)}}{A_{(i,\rho)}[(i\ell,\rho\delta)]} = \frac{\{1/B[(j\ell,\rho\delta)]\}_{(j,\rho)}}{A_{(j,\rho)}[(j\ell,\rho\delta)]} = B[(\ell,\rho\delta)], \qquad /5.22/$$

откуда после интегрирования по переменной (i,ρ), например, получаем связь между функциями $A[(i\ell,\rho\delta)]$ и $B[(i\ell,\rho\delta)]$:

$$1/B[(i\ell,\rho\delta)] = B[(\ell,\rho\delta)]A[(i\ell,\rho\delta)] + H[(i,\delta),(\ell,\rho\delta)]. \qquad /5.23/$$

В формуле /5.23/ вместо i можно подставлять элементы j, k, а вместо β элементы α, γ, так как исходное равенство /5.19/ инвариантно относительно перестановок этих элементов. Поскольку $B[(i\ell,\rho\delta)] \neq 0$, коэффициент $B[(\ell,\rho\delta)]$ и слагаемое $H[(i,\delta),(\ell,\rho\delta)]$ являются аналитическими функциями. Если при некоторых значениях переменных $(\ell\ldots\nu,\rho\delta\ldots\tau)$ коэффициент $B[(\ell,\rho\delta)]$ обращается в нуль, то при этом слагаемое $H[(i,\delta),(\ell,\rho\delta)]$ должно быть отличным от нуля, так как аналитическая функция $B[(i\ell,\rho\delta)]$ не имеет особенностей и $1/B[(i\ell,\rho\delta)] \neq 0$.

Равенство /5.20/ продифференцируем по переменной (i,γ) и упростим результат, используя связь /5.22/ между производными:

$$\{1/B[(k\ell,\rho\delta)]\}\cdot\{1/B[(k\ell,\gamma\delta)]\} =$$

$$= \{1/a[(\ell,\chi\rho\delta)]B[(k\ell,\rho\delta)] - B[(\ell,\rho\delta)]F[(k\ell,\chi\rho\delta)]\}\times$$

$$\times\{1/a[(\ell,\beta\gamma\delta)]B[(k\ell,\gamma\delta)]-b[(\ell,\gamma\delta)]F[(k\ell,\beta\gamma\delta)]\}. \qquad /5.24/$$

Раскроем полностью результат /5.24/, подставив в него обозначение /5.18/ и связь /5.23/ :

$$\{b[(\ell,\beta\delta)]A[(k\ell,\beta\delta)]+H[(k,\delta_1,(\ell,\beta\delta)]\}\times$$

$$\times\{b[(\ell,\gamma\delta)]A[(k\ell,\gamma\delta)]+H[(k,\delta_1,(\ell,\gamma\delta)]\}=$$

$$=\{b[(\ell,\beta\delta)]\cdot[A[(k\ell,\gamma\delta)]+E[(k,\delta_1,(\ell,\gamma\beta\delta)]-H[(k,\delta_1,(\ell,\beta\delta)]/a[(\ell,\gamma\beta\delta)]\}\times$$

$$\times\{b[(\ell,\gamma\delta)]\cdot[A[(k\ell,\beta\delta)]+E[(k,\delta_1,(\ell,\beta\gamma\delta)]-H[(k,\delta_1,(\ell,\gamma\delta)]/a[(\ell,\beta\gamma\delta)]\}. \qquad /5.25/$$

Если равенство /5.25/ продифференцировать по переменной (k,γ), учитывая, что $H_{(k,\gamma)}[(k\ell,\gamma\delta)]\neq 0$, то получим связь:

$$b[(\ell,\beta\delta)]\,b[(\ell,\gamma\delta)]\,E[(k,\delta_1,(\ell,\beta\gamma\delta)]=$$

$$=b[(\ell,\beta\delta)]H[(k,\delta_1,(\ell,\gamma\delta)]/a[(\ell,\beta\gamma\delta)]+b[(\ell,\gamma\delta)]H[(k,\delta_1,(\ell,\beta\delta)]. \qquad /5.26/$$

Связь /5.26/ выполняется также и в случае перестановки элементов β, γ, в чем можно убедиться, дифференцируя равенство /5.25/ по переменной (k,β).

Из установленной связи /5.26/ вытекает следующий вывод. Пусть коэффициент $b[(\ell,\beta\delta)]$ при некоторых значениях переменных $(\ell\ldots v,\beta\delta\ldots\varepsilon)$, входящих в него, обращается в нуль. Тогда связь /5.26/ приводит к соотношению

$$b[(\ell,\gamma\delta)]H[(k,\delta_1,(\ell,\beta\delta)]=0.$$

Выше, однако, было отмечено, что при $b[(\ell,\beta\delta)]=0$ функция $H[(k,\delta_1,(\ell,\beta\delta)]$ в нуль не обращается, и потому коэффициент $b[(\ell,\gamma\delta)]$ должен быть равен нулю. Верно также и обратное утверждение, что при $b[(\ell,\gamma\delta)]=0$ коэффициент $b[(\ell,\beta\delta)]$

обращается в нуль. Таким образом, коэффициенты $B[(\ell,\beta\delta)]$ и $B[(\ell,\gamma\delta)]$ либо одновременно равны нулю, либо одновременно отличны от нуля. Поскольку эти коэффициенты есть аналитические функции, обращение их в нуль в окрестности определения может быть либо тождественным, либо на множестве нулевой меры. Во втором случае всегда можно выбрать такую подокрестность, в которой коэффициенты $B[(\ell,\beta\delta)]$ и $B[(\ell,\gamma\delta)]$ всюду отличны от нуля. В соответствии с этим обстоятельством, можно отдельно рассматривать такие два случая :

1. $$B[(\ell,\beta\delta)]=0,\ B[(\ell,\gamma\delta)]=0, \qquad /5.27/$$

2. $$B[(\ell,\beta\delta)]\neq 0,\ B[(\ell,\gamma\delta)]\neq 0. \qquad /5.28/$$

Поскольку условие /5.27/ выполняется тождественно или всюду в окрестности имеет место условие /5.28/, никаких дополнительных ограничений и связей на переменные условия /5.27/ и /5.28/ не порождает.

Если соотношение /5.26/ подставить в исходное равенство /5.25/, то легко устанавливаем еще одну дополнительную связь

$$H[(k,\delta_1),(\ell,\beta\delta)]\,H[(k,\delta_1),(\ell,\gamma\delta)] =$$

$$=\{B[(\ell,\beta\delta)]E[(k,\delta_1),(\ell,\gamma\beta\delta)]-H[(k,\delta_1),(\ell,\beta\delta)]/a[(\ell,\gamma\beta\delta)]\}\times$$

$$\times\{B[(\ell,\gamma\delta)]E[(k,\delta_1),(\ell,\beta\gamma\delta)]-H[(k,\delta_1),(\ell,\gamma\delta)]/a[(\ell,\beta\gamma\delta)]\}. \qquad /5.29/$$

Третью связь, необходимую для дальнейших рассуждений, можно получить из равенства /5.20/. Предварительно заметим, что знаменатель правой части этого равенства не зависит от переменной (k,β), в чем легко убедиться, воспользовавшись выражениями /5.18/ и /5.23/. Продифференцируем равенство /5.20/ по переменной (k,β) с учетом только что сделанного замечания :

$$\frac{B[ke,\gamma\delta]}{B[ie,\gamma\delta]} = \frac{1/\alpha[e,\gamma\beta\delta]B[ie,\beta\delta] - b[e,\beta\delta]F[ie,\gamma\beta\delta]}{1/\alpha[e,\gamma\beta\delta]B[ke,\beta\delta] - b[e,\beta\delta]F[ke,\gamma\beta\delta]}$$

или после подстановки выражений /5.18/ и /5.23/

$$\hat{R}(ik)\{B[ke,\gamma\delta]A[ie,\gamma\delta] + H[i,\delta,e,\gamma\delta]\}\times$$

$$\times\{B[ke,\beta\delta][A[ke,\gamma\delta] + E[k,\delta,e,\gamma\beta\delta]] - H[k,\delta,e,\beta\delta]/\alpha[e,\gamma\beta\delta]\} = 0. \quad /5.30/$$

Результат /5.30/ можно значительно упростить, если дополнительно воспользоваться связью /5.26/ :

$$\hat{R}(ik)H[i,\delta,e,\gamma\delta]\times$$

$$\times\{B[e,\beta\delta]E[k,\delta,e,\gamma\beta\delta] - H[k,\delta,e,\beta\delta]/\alpha[e,\gamma\beta\delta]\} = 0. \quad /5.31/$$

Полученная связь /5.31/ справедлива, разумеется, и при переставленных элементах β , γ .

Запишем выражение для функции $\Lambda[ie,\beta\gamma\delta]$, используя формулу /5.17/ и связь /5.23/ между A и B :

$$\Lambda[ie,\beta\gamma\delta] = C_1[e,\beta\gamma\delta] +$$

$$+ \frac{H[ie,\beta\delta] + A[ie,\gamma\delta]/\alpha[e,\beta\gamma\delta] + E[i,\delta,e,\beta\gamma\delta]}{b[e,\gamma\delta]A[ie,\gamma\delta] + H[i,\delta,e,\gamma\delta]}, \quad /5.32/$$

причем между функциями E, H, α, b , входящими в выражение /5.32/, имеются связи, задаваемые соотношениями /5.26/, /5.29/, /5.31/.

Как было уже отмечено, связь /5.26/ приводит к четкому выделению двух случаев /5.27/ и /5.28/. Рассмотрим сначала первый

из этих случаев :

I. $$B[(l,\beta\delta)] = 0\,,\quad B[(l,\gamma\delta)] = 0\,. \qquad /5.27/$$

Связь /5.26/ превращается при этом в тождество $0 \equiv 0$, а две другие связи /5.29/ и /5.31/ принимают более простой вид :

$$a[(l,\beta\gamma\delta)]\,a[(l,\gamma\beta\delta)] = 1\,, \qquad /5.33/$$

$$\hat{R}(ik)\,H[(i,\delta),(l,\gamma\delta)]\,H[(k,\delta),(l,\beta\delta)] = 0\,. \qquad /5.34/$$

Подставим условия /5.27/ и связь /5.34/ в равенство /5.20/ :

$$\hat{R}(ik)\{F[(il,\beta\gamma\delta)] - a[(l,\gamma\beta\delta)]\,F[(i,l,\gamma\beta\delta)]\}\,H[(k,\delta),(l,\beta\delta)] = 0\,. \qquad /5.35/$$

В полученное соотношение подставим выражение /5.18/, имея в виду связь /5.33/ :

$$\hat{R}(ik)\{E[(i,\delta),(l,\beta\gamma\delta)] - a[(l,\gamma\beta\delta)]\,E[(i,\delta),(l,\gamma\beta\delta)]\}\,H[(k,\delta),(l,\beta\delta)] = 0\,. \qquad /5.36/$$

В соотношении /5.34/ зафиксируем значение переменных $(k,\delta\ldots\tau)$ и $(l\ldots\upsilon,\gamma)$:

$$H[(i,\delta),(l,\beta\delta)] = H_1[(il,\delta)]\,/\,H_2[(l,\beta\delta)]\,, \qquad /5.37/$$

причем из свойств функции H при $B = 0$ следует, что $H_1 \neq 0$, $H_2 \neq 0$. Фиксируя далее в равенстве /5.36/ значения переменных $(k,\delta\ldots\tau)$, устанавливаем свойство функции $E[(i,\delta),(l,\beta\gamma\delta)]$ по перестановкам элементов β , γ :

$$a[(l,\gamma\beta\delta)]\,E[(i,\delta),(l,\gamma\beta\delta)] =$$

$$= E[(i,\delta),(l,\beta\gamma\delta)] + c[(l,\gamma\beta\delta)]\,H_1[(il,\delta)] \qquad /5.38/$$

Для функции $\Lambda[(il,\beta\gamma\delta)]$ в рассматриваемом случае /5.27/, согласно формуле /5.32/ и равенству /5.37/, можно выписать следующее выражение

$$\Lambda[(il,\beta\gamma\delta)] = C_1[(l,\beta\gamma\delta)] + \tilde{\Lambda}[(il,\beta\gamma\delta)]\,/\,H_2[(l,\gamma\delta)]\,, \qquad /5.39/$$

где для сокращения записи введено новое обозначение

$$\tilde{\Lambda}[ii\ell,\beta\gamma\delta] = \{A[ii\ell,\beta\delta] +$$

$$+ A[ii\ell,\gamma\delta]/a[ii\ell,\beta\gamma\delta] + E[ii,\delta,i\ell,\beta\gamma\delta]\}/H_2[ii\ell,\delta] . \qquad /5.40/$$

Используя перестановочное свойство /5.38/, легко установить, что функция $\Lambda[ii\ell,\gamma\beta\delta]$ с переставленными элементами β, γ связана с функцией $\tilde{\Lambda}[ii\ell,\beta\gamma\delta]$ без переставленных элементов β, γ следующим образом :

$$\Lambda[ii\ell,\gamma\beta\delta] = C_2[i\ell,\gamma\beta\delta] +$$

$$+ a[i\ell,\beta\gamma\delta]\{\tilde{\Lambda}[ii\ell,\beta\gamma\delta] + c[i\ell,\gamma\beta\delta]\}/H_2[i\ell,\beta\delta] . \qquad /5.41/$$

Подставим выражения /5.39/ и /5.41/ для функции Λ в уравнения /3.43/ и /5.1/, произведя некоторые простые преобразования :

$$\begin{vmatrix} \tilde{\Lambda}[ii\ell,\alpha\gamma\delta] & \tilde{\Lambda}[ii\ell,\beta\gamma\delta] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[ij\ell,\alpha\gamma\delta] & \tilde{\Lambda}[ij\ell,\beta\gamma\delta] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[ik\ell,\alpha\gamma\delta] & \tilde{\Lambda}[ik\ell,\beta\gamma\delta] & 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad /5.42/$$

$$\begin{vmatrix} \tilde{\Lambda}[ii\ell,\alpha\beta\delta] & \tilde{\Lambda}[ii\ell,\beta\gamma\delta] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[ij\ell,\alpha\beta\delta] & \tilde{\Lambda}[ij\ell,\beta\gamma\delta] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[ik\ell,\alpha\beta\delta] & \tilde{\Lambda}[ik\ell,\beta\gamma\delta] & 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad /5.43/$$

Заметим, что уравнения /5.42/ и /5.43/ обладают всеми свойствами исходных уравнений /3.43/ и /5.1/, так как при получении первых производилось сокращение на ненулевые множители. Аддитив-

ные слагаемые в первых двух столбцах исчезали в линейной комбинации со столбцом из единиц. Из выражений /5.39/ и /5.40/ следует, что в рассматриваемом случае /5.27/ функции Λ и $\tilde{\Lambda}$ имеют отличные от нуля производные по первым двум аргументам, например, $\tilde{\Lambda}_{i,\beta,}[(i\ell.\beta\gamma\delta)] \neq 0$.

В определителях /5.42/ и /5.43/ совпадают вторые и третьи столбцы. Вычтем левую часть уравнения /5.43/ из соответствующей части уравнения /5.42/ :

$$\begin{vmatrix} \tilde{\Lambda}[(i\ell.\alpha\gamma)] - \tilde{\Lambda}[(i\ell.\alpha\beta)] & \tilde{\Lambda}[(i\ell.\beta\gamma)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(j\ell.\alpha\gamma)] - \tilde{\Lambda}[(j\ell.\alpha\beta)] & \tilde{\Lambda}[(j\ell.\beta\gamma)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(k\ell.\alpha\gamma)] - \tilde{\Lambda}[(k\ell.\alpha\beta)] & \tilde{\Lambda}[(k\ell.\beta\gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad /5.44/$$

Из обозначения /5.40/ следует, что первый столбец определителя /5.44/ не содержит переменных (ijk,α) , то есть соотношение /5.44/ должно выполняться тождественно по каждой переменной, входящей в него.

Продифференцируем тождество /5.44/ по переменным (i,β) и (j,γ) , подставляя выражение /5.40/ для функции $\tilde{\Lambda}$ и используя перестановочное свойство /5.33/ коэффициента a :

$$a[(\ell.\gamma\beta\delta)] = -a[(\ell.\gamma\alpha\delta)]/a[(\ell.\beta\alpha\delta)].$$

Фиксируя значения переменных $(\ell \ldots \vartheta,\alpha)$, находим выражение для коэффициента $a[(\ell.\gamma\beta\delta)]$:

$$a[(\ell.\gamma\beta\delta)] = -a_{,}[(\ell.\gamma\delta)]/a_{,}[(\ell.\beta\delta)]. \qquad /5.45/$$

Тождество /5.44/ теперь продифференцируем только по переменной (i,β) :

$$\begin{vmatrix} -a[(\ell,\beta\alpha\delta)] & 1 & 0 \\ \tilde{\Lambda}[(j\ell.\alpha\gamma\delta)]-\tilde{\Lambda}[(j\ell.\alpha\beta\delta)] & \tilde{\Lambda}[(j\ell.\beta\gamma\delta)] & 1 \\ \tilde{\Lambda}[(k\ell,\alpha\gamma\delta)]-\tilde{\Lambda}[(k\ell,\alpha\beta\delta)] & \tilde{\Lambda}[(k\ell,\beta\gamma\delta)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad /5.46/$$

Умножим второй столбец определителя /5.46/ на коэффициент $a[(\ell,\beta\alpha\delta)]$, прибавим его к первому и раскроем определитель :

$$\hat{R}(jk)\{\tilde{\Lambda}[(j\ell.\alpha\gamma\delta)]-\tilde{\Lambda}[(j\ell.\alpha\beta\delta)]+a[(\ell,\beta\alpha\delta)]\tilde{\Lambda}[(j\ell,\beta\gamma\delta)]\}=0. \qquad /5.47/$$

В результат /5.47/ подставим выражение /5.40/ для функции $\tilde{\Lambda}$ и воспользуемся связью

$$-1/a[(\ell,\alpha\gamma\delta)] = a[(\ell,\beta\alpha\delta)]/a[(\ell,\beta\gamma\delta)],$$

вытекающей из представления /5.45/ :

$$\hat{R}(jk)\{E[(j,\delta),(\ell.\alpha\gamma\delta)]-E[(j,\delta),(\ell.\alpha\beta\delta)]+$$

$$+a[(\ell,\beta\alpha\delta)]E[(j,\delta),(\ell,\beta\gamma\delta)]\}/H_1[(j\ell,\delta)]=0. \qquad /5.48/$$

В полученном соотношении зафиксируем значение переменных $(k,\delta\ldots\tau)$ и $(\ell\ldots\upsilon,\gamma)$:

$$a_1[(\ell,\alpha\delta)]E[(j,\delta),(\ell,\alpha\beta\delta)]/H_1[(j\ell,\delta)] =$$

$$=E_1[(j,\delta),(\ell,\alpha\delta)]-E_1[(j,\delta),(\ell,\beta\delta)]+E_2[(\ell,\alpha\beta\delta)]. \qquad /5.49/$$

Воспользуемся результатом /5.49/, чтобы представить функцию /5.40/ в следующем виде :

$$\tilde{\Lambda}[(i\ell,\beta\gamma\delta)] =$$

$$=\{a_1[(\ell,\beta\delta)]A[(i\ell,\beta\delta)]/H_1[(i\ell,\delta)]-a_1[(\ell,\gamma\delta)]A[(i\ell,\gamma\delta)]/H_1[(i\ell,\delta)]+$$

$$+E_1[(i,\delta),(\ell,\beta\delta)]-E_1[(i,\delta),(\ell,\gamma\delta)]+E_2[(\ell,\beta\gamma\delta)]\}/a_1[(\ell,\beta\delta)].$$

Если ввести дополнительно обозначение

$$\Pi[(i\ell,\beta\delta)] =$$

$$=a_1[(\ell,\beta\delta)]A[(i\ell,\beta\delta)]/A_1[(i\ell,\delta)]+E_1[(i,\delta),(\ell,\beta\delta)], \qquad /5.50/$$

то для функции $\tilde{\Lambda}$ получаем

$$\tilde{\Lambda}[(i\ell,\beta\gamma\delta)] =$$

$$=\{\Pi[(i\ell,\beta\delta)]-\Pi[(i\ell,\gamma\delta)]+E_2[(\ell,\beta\gamma\delta)]\}/a_1[(\ell,\beta\delta)]. \qquad /5.51/$$

Из обозначения /5.50/ следует, что производная функции Π по первому аргументу не обращается в нуль.

Подставим выражение /5.51/ для функции $\tilde{\Lambda}$ в уравнение /5.42/, произведя сокращения в первом и втором столбцах на ненулевой множитель $1/a_1$ и переходя к определителю четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} \Pi[(i\ell f\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)] & \Pi[(i\ell f\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] & \Pi[(i\ell f\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \\ \Pi[(jef\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)] & \Pi[(jef\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] & \Pi[(jef\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \\ \Pi[(kef\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)] & \Pi[(kef\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] & \Pi[(kef\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad /5.52/$$

В исходном определителе /5.42/ были отличны от нуля все миноры второго порядка, содержащие столбец из единиц. В построенном определителе /5.52/ это приводит к необращению в нуль любого минора третьего порядка, окаймленного столбцом из единиц справа и строкой из единиц снизу. Поскольку, например,

$\Pi_{ii,\alpha}[ilf\ldots\nu,\alpha\delta\ldots\tau]\neq 0$, производная левой части уравнения /5.52/ по переменной (i,α) отлична от нуля. Используя дополнительно уравнение /I.8/ легко проверить, что любая первая производная левой части уравнения /5.52/ не равна нулю. То есть уравнение /5.52/ можно однозначно разрешить относительно любого аргумента.

Перейдем теперь к рассмотрению второго более простого случая.

2. $$B[ie,\beta\delta]\neq 0\ ,\ B[ie,\gamma\delta]\neq 0 \qquad /5.28/$$

Соотношение /5.26/ тогда можно переписать в несколько иной форме :

$$E[ik,\delta_1,le,\beta\gamma\delta] = H[ik,\delta_1,ie,\beta\delta]/B[ie,\beta\delta] + H[ik,\delta_1,ie,\gamma\delta]/A[ie,\beta\gamma\delta]B[ie,\gamma\delta]. \qquad /5.53/$$

Заметим, что соотношения /5.29/ и /5.3I/ в рассматриваемом случае /5.28/ являются только следствиями соотношения /5.53/.

Выражение /5.32/ для функции Λ при выполнении связи /5.53/ записывается следующим образом :

$$\Lambda[ie,\beta\gamma\delta] = C_2[ie,\beta\gamma\delta] + \frac{T[ie,\beta\delta]+T[ie,\gamma\delta]/A[ie,\beta\gamma\delta]}{B[ie,\gamma\delta]\,T[ie,\gamma\delta]}\ , \qquad /5.54/$$

если ввести обозначение

$$T[ie,\beta\delta] = A[ie,\beta\delta] + H[ii,\delta_1,ie,\beta\delta]/B[ie,\beta\delta].$$

Заметим, что производная функции T по первому аргументу, как

это следует из введенного обозначения, отлична от нуля. Кроме того, $T \neq 0$.

Подставим функцию /5.54/ в уравнение /3.43/, произведя некоторые простые преобразования :

$$\begin{vmatrix} T[ilj\ldots\nu,\alpha\beta\ldots\tau] & T[ilj\ldots\nu,\beta\beta\ldots\tau] & T[ilj\ldots\nu,\gamma\beta\ldots\tau] \\ T[jlj\ldots\nu,\alpha\beta\ldots\tau] & T[jlj\ldots\nu,\beta\beta\ldots\tau] & T[jlj\ldots\nu,\gamma\beta\ldots\tau] \\ T[klj\ldots\nu,\alpha\beta\ldots\tau] & T[klj\ldots\nu,\beta\beta\ldots\tau] & T[klj\ldots\nu,\gamma\beta\ldots\tau] \end{vmatrix} = 0, \qquad /5.55/$$

где, также как и в уравнении /5.52/, восстановлены все "неподвижные" элементы, которые были опущены в данном параграфе в целях сокращения записи. В определителе /3.43/ отличны от нуля все миноры второго порядка, содержащие столбец из единиц. Соответственно в определителе /5.55/ все миноры второго порядка не обращаются в нуль. Поскольку также $T \neq 0$, то есть миноры первого порядка отличны от нуля, можно сказать, что в определителе /5.55/ миноры всех порядков, кроме третьего, в нуль не обращаются.

Уравнения /5.52/ для $b[ilj\ldots\nu,\alpha\beta\ldots\tau] = 0$ и /5.55/ для $b[ilj\ldots\nu,\alpha\beta\ldots\tau] \neq 0$ являются следствием эквивалентности уравнений /3.43/ и /5.1/. Если $m = n = 3$, то множество $\mathcal{N}$ в окрестности любой точки, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{M}_3^3 \times \mathcal{M}_3^3$ может быть задано либо уравнением /5.52/, когда $b = 0$, либо уравнением /5.55/, когда $b \neq 0$. Поскольку для $m = n = 3$ коэффициент b превращается в константу, то для всех точек $\mathcal{N}$, соответствующих недиагональным кортежам из $\mathcal{M}_3^3 \times \mathcal{M}_3^3$ либо $b = 0$, либо $b \neq 0$.

Несколько иная ситуация возникает в случае $m \geq 4$, который будет подробно рассмотрен в следующем параграфе. Там будет

показано, что для $m \geqslant 4$, в действительности, уравнение /5.52/ не может задавать множество $\mathcal{N}$ в окрестности точек, соответствующих недиагональным кортежам из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^n$, так как при перестановке, например, элементов k , ℓ выявляются противоречия с исходными условиями.

Запишем уравнения /5.52/ и /5.55/ для $m = n = 3$:

$$\begin{vmatrix} \Pi[(i,\alpha)] & \Pi[(i,\beta)] & \Pi[(i,\gamma)] & 1 \\ \Pi[(j,\alpha)] & \Pi[(j,\beta)] & \Pi[(j,\gamma)] & 1 \\ \Pi[(k,\alpha)] & \Pi[(k,\beta)] & \Pi[(k,\gamma)] & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad /5.56/$$

$$\begin{vmatrix} T[(i,\alpha)] & T[(i,\beta)] & T[(i,\gamma)] \\ T[(j,\alpha)] & T[(j,\beta)] & T[(j,\gamma)] \\ T[(k,\alpha)] & T[(k,\beta)] & T[(k,\gamma)] \end{vmatrix} = 0, \qquad /5.57/$$

где $\Pi(t)$ и $T(t)$ аналитические функции одной переменной, определенные и имеющие отличные от нуля производные в некоторой окрестности каждой точки, задаваемой значениями функции $\alpha : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1 \to R$.

Запишем уравнения /5.56/ и /5.57/ для кортежа $\langle i_1 j_1 k_1, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \rangle$, где $i \in P(i_1)$, $\alpha \in Q(\alpha_1)$, и разрешим их относительно (i,α) , введя удобным образом параметры $x_i^1, x_i^2, \xi_\alpha^1, \xi_\alpha^2$:

$$(i,\alpha) = \psi^{-1}(x_i^1 \xi_\alpha^1 + x_i^2 + \xi_\alpha^2), \qquad /5.58/$$

$$(i,\alpha) = \psi^{-1}(x_i^1 \xi_\alpha^1 + x_i^2 \xi_\alpha^2). \qquad /5.59/$$

Введенная функция $\psi(t)$ определена в некоторой окрестности

точки $(i_1, \alpha_1) \in R$, где либо $\Psi(t) \equiv \Pi(t)$, либо $\Psi(t) \equiv T(t)$. Поскольку $\Psi_t(t) \neq 0$, функция $\Psi(t)$ имеет обратную Ψ^{-1} . Если теперь предположить, что $i, j, k \in P(i_1)$, $\alpha, \beta, \gamma \in Q(\alpha_1)$, то используя параметрические представления /5.58/ и /5.59/ для функции $a : P(i_1) \times Q(\alpha_1) \to R$, находим, что множество значений функции $A : [P(i_1)]^3 \times [Q(\alpha_1)]^3 \to R^9$ может быть задано либо уравнением

$$\begin{vmatrix} \Psi[(i,\alpha)] & \Psi[(i,\beta)] & \Psi[(i,\gamma)] & 1 \\ \Psi[(j,\alpha)] & \Psi[(j,\beta)] & \Psi[(j,\gamma)] & 1 \\ \Psi[(k,\alpha)] & \Psi[(k,\beta)] & \Psi[(k,\gamma)] & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 , \qquad /5.60/$$

либо

$$\begin{vmatrix} \Psi[(i,\alpha)] & \Psi[(i,\beta)] & \Psi[(i,\gamma)] \\ \Psi[(j,\alpha)] & \Psi[(j,\beta)] & \Psi[(j,\gamma)] \\ \Psi[(k,\alpha)] & \Psi[(k,\beta)] & \Psi[(k,\gamma)] \end{vmatrix} = 0 , \qquad /5.61/$$

соответственно. Результаты /5.58/, /5.60/ и /5.59/, /5.61/ составляют часть случая с/ доказываемой теоремы для $m = n = 3$.

§ 6. Продолжение: $m \geq 4$

В предыдущем параграфе было показано, что уравнения /5.52/ и /5.55/ являются следствием эквивалентности уравнений /3.43/ и /5.I/. Это означало, что множество $\mathcal{N}$ в некоторой окрестности каждой точки, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^n$, для $m \geq n \geq 3$ задается, вообще говоря, либо уравнением /5.52/, либо – /5.55/. Но ниже будет показано, что при переходе к рассматриваемому в данном параграфе случаю, когда $m \geq 4$, остается только уравнение /5.55/. Предположим, например, что в некоторой окрестности точки $(i_1 j_1 k_1 l_1 f_1 \dots v_1 . \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \dots \tau_1) \in R^{mn}$ множество $\mathcal{N}$ задается уравнением /5.52/. При перестановке элементов k, l это уравнение может сохранить свою форму, но может и изменить ее. Иначе говоря, в соответствующей окрестности канонически сопряженной точки $(i_1 j_1 l_1 k_1 f_1 \dots v_1 . \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1 \dots \tau_1)$ множество $\mathcal{N}$ может задаваться одним из уравнений /5.52/ и /5.55/.

Рассмотрим сначала случай, когда при перестановке элементов k, l уравнение /5.52/ сохраняет свою форму :

$$\begin{vmatrix} \Pi[ikf\dots v,\alpha\delta\dots\tau] & \Pi[ikf\dots v,\beta\delta\dots\tau] & \Pi[ikf\dots v,\gamma\delta\dots\tau] & 1 \\ \Pi[jkf\dots v,\alpha\delta\dots\tau] & \Pi[jkf\dots v,\beta\delta\dots\tau] & \Pi[jkf\dots v,\gamma\delta\dots\tau] & 1 \\ \Pi[lkf\dots v,\alpha\delta\dots\tau] & \Pi[lkf\dots v,\beta\delta\dots\tau] & \Pi[lkf\dots v,\gamma\delta\dots\tau] & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad /6.I/$$

В силу эквивалентности уравнения /5.52/ и /6.I/ определяют неявно (i,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α). Найдем из неявных заданий /5.52/ и /6.I/ два выражения для произ-

водной функции (i,β) по переменной (i,α) и сравним их :

$$\hat{R}(ik\ell)\frac{\Pi(i,\alpha)[i\ell f,\alpha\delta]\hat{R}(jk)\hat{R}(\beta\gamma)\Pi[j\ell f,\beta\delta]}{\Pi(i,\beta)[i\ell f,\beta\delta]\hat{R}(jk)\hat{R}(\alpha\gamma)\Pi[j\ell f,\alpha\delta]}=0. \qquad /6.2/$$

где для сокращения записи опущены "неподвижные" элементы, следующие за f и δ и использован оператор альтернирования $\hat{R}$. Полученное равенство есть тождество по всем входящим в него переменным.

Продифференцируем тождество /6.2/ по переменной (j,β) и переставим в результате местами числитель и знаменатель :

$$\hat{R}(ik\ell)\frac{\Pi(i,\beta)[i\ell f,\beta\delta]\hat{R}(jk)\hat{R}(\alpha\gamma)\Pi[j\ell f,\alpha\delta]}{\Pi(i,\alpha)[i\ell f,\alpha\delta]\Pi(j,\beta)[j\ell f,\beta\delta]}=0. \qquad /6.3/$$

Дополнительно продифференцируем результат /6.3/ по переменной (j,γ) :

$$\hat{R}(ik\ell)\frac{\Pi(i,\beta)[i\ell f,\beta\delta]\Pi(j,\gamma)[j\ell f,\gamma\delta]}{\Pi(i,\alpha)[i\ell f,\alpha\delta]\Pi(j,\beta)[j\ell f,\beta\delta]}=0. \qquad /6.4/$$

В соотношении /6.4/ зафиксируем значения всех переменных, кроме $(i\ell f\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)$:

$$\Pi(i,\alpha)[i\ell f,\alpha\delta]=A(i,\alpha)[if,\alpha\delta]B[i\ell f,\delta],$$

откуда после интегрирования по переменной (i,α) получаем выражение для функции Π :

$$\Pi[(ilf,\alpha\delta)] = A[(if,\alpha\delta)]\,B[(ilf,\delta)] + C[(i,\delta),(lf,\alpha\delta)]. \qquad /6.5/$$

Заметим, что в соответствии с введенным обозначением, $A_{(i,\alpha)}[(if,\alpha\delta)] \neq 0$, $B[(ilf,\delta)] \neq 0$.

Продифференцируем теперь равенство /6.3/ по переменной (k,γ) :

$$-\frac{\Pi_{(i,\beta)}[(ilf,\beta\delta)]\,\Pi_{(k,\gamma)}[(klf,\gamma\delta)]}{\Pi_{(i,\alpha)}[(ilf,\alpha\delta)]\,\Pi_{(j,\beta)}[(jlf,\beta\delta)]} =$$

$$= \frac{\Pi_{(i,\beta)}[(ikf,\beta\delta)]\{\Pi_{(k,\gamma)}[(jkf,\gamma\delta)] - \Pi_{(k,\gamma)}[(lkf,\gamma\delta)]\}}{\Pi_{(i,\alpha)}[(ikf,\alpha\delta)]\,\Pi_{(j,\beta)}[(jkf,\beta\delta)]} . \qquad /6.6/$$

Если ниже предполагать, что $i,j,k,l \in P(i_s)$. $\alpha,\beta,\gamma \in \Omega(\alpha_s)$, то также будут иметь место уравнения /5.52/, /6.1/ и их следствие /6.6/. Но в таком случае можно выражение /6.5/ для функции Π подставить в равенство /6.6/ :

$$-A_{(k,\gamma)}[(kf,\gamma\delta)]\,B[(klf,\delta)]/B[(jlf,\delta)] =$$

$$= \{C_{(k,\gamma)}[(j,\delta),(kf,\gamma\delta)] - C_{(k,\gamma)}[(l,\delta),(kf,\gamma\delta)]\}/B[(jkf,\delta)] . \qquad /6.7/$$

Зафиксируем в результате /6.7/ значения переменных $(l,\delta,\ldots,\tau)$:

$$C_{(k,\gamma)}[(j,\delta),(kf,\gamma\delta)] = C_s[(kf,\gamma\delta)] -$$

$$- \Pi_{(k,\gamma)}[(kf,\gamma\delta)]\,B[(jkf,\delta)]\,B_s[(kf,\delta)]/B_s[(jf,\delta)] . \qquad /6.8/$$

где $B_s[(jf,\delta)] = B[(jlf,\delta)]|_{(l,\delta,\ldots,\tau)=\mathrm{const}}$. Подставим выражение /6.8/ для производной в равенство /6.7/ :

$$B[ijkf..\delta]\{B_1[klf..\delta]/B_1[ijf..\delta] - B[klef..\delta]/B[ijef..\delta]\} =$$

$$= B_1[klf..\delta]\, B[ijklf..\delta]/B_1[ijef..\delta] . \qquad /6.9/$$

Зафиксируем снова в равенстве /6.9/ значения переменных $(e, \delta \ldots \tau)$, беря те же значения, что и в первом случае при получении соотношения /6.8/. При этом левая часть равенства /6.9/ обращается в нуль и, следовательно,

$$B_1[klf..\delta]\, B[ijklf..\delta]/B_1[ijef..\delta]\,|_{(e,\delta\ldots\tau)=const} = 0 ,$$

что противоречит условию необращения в нуль аналитических функций B и B_1. Полученное противоречие доказывает, что при перестановке элементов k, e уравнение /5.52/ не может сохранять своей формы.

Рассмотрим теперь второй случай, когда при перестановке элементов k, e уравнение /5.52/ изменяет свою форму. То есть в соответствующей окрестности сопряженной точки множество $\mathcal{N}$ задается уравнением

$$\begin{vmatrix} T[ikf..\nu,\alpha\delta\ldots\tau] & T[ikf..\nu,\beta\delta..\tau] & T[ikf..\nu,\gamma\delta\ldots\tau] \\ T[jkf..\nu,\alpha\delta..\tau] & T[jkf..\nu,\beta\delta\ldots\tau] & T[jkf..\nu,\gamma\delta\ldots\tau] \\ T[ekf..\nu,\alpha\delta\ldots\tau] & T[ekf..\nu,\beta\delta\ldots\tau] & T[ekf..\nu,\gamma\delta\ldots\tau] \end{vmatrix} = 0 . \qquad /6.10/$$

В силу эквивалентности уравнения /5.52/ и /6.10/ определяют неявно (i,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α). Сравнивая два выражения для производной функции (i,β) по переменной (i,α), получаем :

$$\frac{\Pi_{(i,\alpha)}[iklf,\alpha\delta]\,\hat{R}(ijk)\,\hat{R}(\beta\chi)\,\Pi[jklf,\beta\delta]}{\Pi_{(i,\beta)}[iklf,\beta\delta]\,\hat{R}(ijk)\,\hat{R}(\alpha\chi)\,\Pi[jklf,\alpha\delta]} =$$

$$= \frac{T(i,\alpha)[(ikf,\alpha\delta)]\,\hat{R}(je)\,T[(jkf,\beta\delta)]\,T[(ekf,\gamma\delta)]}{T(i,\beta)[(ikf,\beta\delta)]\,\hat{R}(je)\,T[(jkf,\alpha\delta)]\,T[(ekf,\gamma\delta)]} \,. \qquad /6.11/$$

Равенство /6.11/ продифференцируем по переменной (j,β) и в результате поменяем местами числитель и знаменатель :

$$\frac{\Pi(i,\beta)[(ief,\beta\delta)]\,\hat{R}(jk)\hat{R}(\alpha\gamma)\,\Pi[(jef,\alpha\delta)]}{\Pi(i,\alpha)[(ief,\alpha\delta)]\,\Pi(j,\beta)[(jef,\beta\delta)]} =$$

$$= \frac{T(i,\beta)[(ikf,\beta\delta)]\,\hat{R}(je)\,T[(jkf,\alpha\delta)]\,T[(ekf,\gamma\delta)]}{T(i,\alpha)[(ikf,\alpha\delta)]\,T(j,\beta)[(jkf,\beta\delta)]\,T[(ekf,\gamma\delta)]} \,. \qquad /6.12/$$

Дополнительное дифференцирование по переменной (j,γ) приводит к соотношению

$$\frac{\Pi(i,\beta)[(ief,\beta\delta)]\,\Pi(j,\gamma)[(jef,\gamma\delta)]}{\Pi(i,\alpha)[(ief,\alpha\delta)]\,\Pi(j,\beta)[(jef,\beta\delta)]} =$$

$$= \frac{T(i,\beta)[(ikf,\beta\delta)]\,T(j,\gamma)[(jkf,\gamma\delta)]\,T[(ekf,\alpha\delta)]}{T(i,\alpha)[(ikf,\alpha\delta)]\,T(j,\beta)[(jkf,\beta\delta)]\,T[(ekf,\gamma\delta)]} \,. \qquad /6.13/$$

Зафиксируем в соотношении /6.13/ значения всех переменных, кроме $(ekf\ldots\vartheta,\alpha\delta\ldots\tau)$, и разрешим его относительно функции $T[(ekf,\alpha\delta)]$, убирая ненулевые множители, которые можно вынести из строк и столбцов определителя /6.10/ :

$$T[(ekf,\alpha\delta)] = A[(ef,\alpha\delta)] \,. \qquad /6.14/$$

Заметим, что $A_{(e,\alpha)[(ef,\alpha\delta)]} \neq 0$.

Будем ниже предполагать, что $i,j,e \in P(e_i)$ и $\alpha,\beta,\gamma \in Q(\alpha_i)$. Уравнение /6.10/ будет иметь место и в него можно подставить выражение /6.14/ :

$$\begin{vmatrix} A[(if,\alpha\delta)] & A[(if,\beta\delta)] & A[(if,\gamma\delta)] \\ A[(jf,\alpha\delta)] & A[(jf,\beta\delta)] & A[(jf,\gamma\delta)] \\ A[(ef,\alpha\delta)] & A[(ef,\beta\delta)] & A[(ef,\gamma\delta)] \end{vmatrix} = 0 . \qquad /6.15/$$

Соотношение /6.15/ не содержит переменных $(k,\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau)$ и поэтому по всем входящим в него переменным является тождеством. Продифференцируем тождество /6.15/ по переменным (i,α) , (j,β) , (e,γ) :

$$A_{(i,\alpha)[(if,\alpha\delta)]} A_{(j,\beta)[(jf,\beta\delta)]} A_{(e,\gamma)[(ef,\gamma\delta)]} = 0 .$$

что противоречит необращению в нуль производной функции A по первому аргументу. Установленное противоречие доказывает, что уравнение /5.52/ при перестановке элементов k , e не может изменять своей формы. Выше было показано, что это уравнение не может и сохранить своей формы при перестановке k , e . Но с другой стороны, возможность перестановки любой пары элементов является допустимой. Возникновение же при этом противоречий означает, что для $m \geq 4$ множество $\mathcal{N}$ не может быть задано уравнением /5.52/.

Итак, было показано, что для $m \geq 4$ множество $\mathcal{N}$ в окрестности каждой точки, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{T}\mathcal{B}_1^m \times \mathcal{T}\mathcal{B}_1^n$, может быть задано только уравнением /5.55/, которое при перестановке элементов k , e сохраняет свою форму. Иначе говоря, соответствующая окрестность сопряженной точки

задается уравнением /6.I0/.

В силу эквивалентности уравнения /5.55/ и /6.I0/ определяют (i,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α). Сравнивая два выражения для производной функции (i,β) по переменной (i,α), найденные из неявных заданий /5.55/ и /6.I0/, получаем :

$$\hat{R}(ke)\,\frac{T(i,\alpha)[(ief,\alpha\delta)]\,\hat{R}(jk)\,T'(jef,\beta\delta)]\,T'(kef,\gamma\delta)]}{T'(i,\beta)[(ief,\beta\delta)]\,\hat{R}(jk)\,T'(jef,\alpha\delta)]\,T'(kef,\gamma\delta)]}=0. \qquad /6.I6/$$

Зафиксируем в равенстве /6.I6/ значения всех переменных, кроме $(ief\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)$:

$$T'(i,\alpha)[(ief,\alpha\delta)]=A(i,\alpha)[(if,\alpha\delta)]\,B_1[(ef,\alpha\delta)]\,B_2[(ief,\delta)],$$

причем ни один из сомножителей в нуль не обращается. Поскольку в определителе /5.55/ из каждой строки можно вынести ненулевой множитель B_2, а из каждого столбца ненулевой множитель B_1, можно произвести несущественное переопределение функции T, исключив множители B_1 и B_2. После интегрирования по переменной (i,α) получаем следующее выражение для функции T :

$$T'(ief,\alpha\delta)]=A[(if,\alpha\delta)]+C[(i,\delta),(ef,\alpha\delta)]. \qquad /6.I7/$$

Заметим, что функция /6.I7/ обладает следующим очевидным свойством :

$$T'(i,\alpha)[(ief,\alpha\delta)]=T'(i,\alpha)[(ikf,\alpha\delta)]. \qquad /6.I8/$$

Продифференцируем равенство /6.I6/ по переменной (j,β), учитывая свойство /6.I8/ и переставим в полученном результате числитель и знаменатель :

$$\hat{R}(ke)\frac{\hat{R}(jk)\,T[(jef.\alpha\delta)]\,T[(kef.\gamma\delta)]}{T[(kef.\gamma\delta)]}=0 \qquad /6.19/$$

после чего дополнительно продифференцируем по переменной $(j.\gamma)$:

$$\hat{R}(ke)\,T[(kef.\alpha\delta)]/T[(kef.\gamma\delta)]=0.$$

Зафиксируем в последнем результате значения переменных $(kef.\nu.\gamma)$:

$$T[(ekf.\alpha\delta)]=a[(kef.\delta)]\,T[(kef.\alpha\delta)]. \qquad /6.20/$$

причем коэффициент $a[(kef.\delta)]$ не обращается в нуль. Воспользуемся свойством перестановки /6.20/ и перепишем равенство /6.19/:

$$\hat{R}(\alpha\gamma)\,T[(kef.\alpha\delta)]\,\hat{R}(ke)\,T[(jkf.\gamma\delta)]=0. \qquad /6.21/$$

Соотношение /6.21/ продифференцируем по переменной $(k.\gamma)$:

$$T[(kef\ \alpha\delta)]\,T_{ik.\gamma}[(jkf.\gamma\delta)]=$$

$$=T_{ik.\gamma}[(kef.\gamma\delta)]\{T[(jkf.\alpha\delta)]-T[(jef.\alpha\delta)]\} \qquad /6.22/$$

Производная $T_{ik.\gamma}[(jkf.\gamma\delta)]\neq 0$, так как в соответствии с перестановочным свойством /6.20/ $T_{ik.\gamma}[(jkf.\gamma\delta)]=$
$=a[(kjf.\delta)]\,T_{ik.\gamma}[(kjf.\gamma\delta)]\neq 0$.

Зафиксируем в равенстве /6.22/ значения переменных $(j.\alpha\gamma\delta.\nu)$, $(kef.\nu.\gamma)$:

$$T[(kef\ \alpha\delta)]=a_1[(kf.\delta)]\{P[(kf.\alpha\delta)]-P[(ef.\alpha\delta)]\} \qquad /6.23/$$

В полученном выражении для функции $T[(kef.\alpha\delta)]$ коэффициент $a_1[(kf.\delta)]$ и разность $P[(kf.\alpha\delta)]-P[(ef.\alpha\delta)]$ в нуль не обращаются. Аналитическая функция P имеет отличную от нуля производную по первому аргументу.

Подставим функцию /6.23/ в уравнение /5.55/, вынося из каждой строки ненулевой множитель a_1 и переходя к определителю

четвертого порядка :

$$\begin{vmatrix} P[(if\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)] & P[(if\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] & P[(if\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \\ P[(jf\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)] & P[(jf\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] & P[(jf\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \\ P[(kf\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)] & P[(kf\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] & P[(kf\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \\ P[(lf\ldots v,\alpha\delta\ldots\tau)] & P[(lf\ldots v,\beta\delta\ldots\tau)] & P[(lf\ldots v,\gamma\delta\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad /6.24/$$

В определителе /6.24/ отличны от нуля миноры второго и третьего порядка, содержащие справа столбец из единиц, так как не обращаются в нуль миноры первого и второго порядка в определителе /5.55/. Уравнение /6.24/ является естественным следствием эквивалентности уравнений /5.55/ и /6.10/.

§ 7. Частный случай $m > n = 3$

Перепишем уравнение /6.24/ для рассматриваемого случая $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} P[(ijw\ldots v,\alpha)] & P[(ijw\ldots v,\beta)] & P[(ijw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ P[(jjw\ldots v,\alpha)] & P[(jjw\ldots v,\beta)] & P[(jjw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ P[(kjw\ldots v,\alpha)] & P[(kjw\ldots v,\beta)] & P[(kjw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ P[(ljw\ldots v,\alpha)] & P[(ljw\ldots v,\beta)] & P[(ljw\ldots v,\gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad /7.1/$$

и для $m = 4$:

$$\begin{vmatrix} P[(i,\alpha)] & P[(i,\beta)] & P[(i,\gamma)] & 1 \\ P[(j,\alpha)] & P[(j,\beta)] & P[(j,\gamma)] & 1 \\ P[(k,\alpha)] & P[(k,\beta)] & P[(k,\gamma)] & 1 \\ P[(l,\alpha)] & P[(l,\beta)] & P[(l,\gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad /7.2/$$

где аналитическая функция $P(t)$ определена в некоторой окрестности каждой точки, задаваемой значениями функции $a : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_1 \to R$. Производная $P_t(t)$ в нуль не обращается.

Запишем уравнение /7.2/ для кортежа $\langle ijk_1l_1, \alpha\beta_1\gamma_1 \rangle$, где $i \in P(i_1)$, $\alpha \in Q(\alpha_1)$, и разрешим его относительно (i,α) , введя естественным образом параметры $x_i^1, x_i^2, \xi_\alpha^1$, $\xi_\alpha^2, \xi_\alpha^3$:

$$(i,\alpha) = \psi^{-1}(x_i^1 \xi_\alpha^1 + x_i^2 \xi_\alpha^2 + \xi_\alpha^3) \qquad /7.3/$$

Аналитическая функция $\psi(t)$ определена в некоторой окрестности точки $(i_1,\alpha_1) \in R$, где $\psi(t) \equiv P(t)$ и $\psi_t(t) \neq 0$.

ψ^{-1} – обратная функция. Если в дальнейшем предполагать, что $i,j,k,\ell \in P(i_1)$, $\alpha,\beta,\gamma \in Q(\alpha_1)$, то множество значений функции $\Pi:[P(i_1)]^4\times[Q(\alpha_1)]^3 \to R^{12}$ может быть задано уравнением

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & \psi[(i,\gamma)] & 1 \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & \psi[(j,\gamma)] & 1 \\ \psi[(k,\alpha)] & \psi[(k,\beta)] & \psi[(k,\gamma)] & 1 \\ \psi[(\ell,\alpha)] & \psi[(\ell,\beta)] & \psi[(\ell,\gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad /7.4/$$

Так как $i_1 \in P(i_0)$, $\alpha_1 \in Q(\alpha_0)$, результаты /7.3/ и /7.4/ составляют содержание случая α / доказываемой теоремы для $m = n+1 = 4$.

При последующих преобразованиях результата /7.I/ будем предполагать, что $m \geq 5$. Переставим в уравнении /7.I/ элементы ℓ, f:

$$\begin{vmatrix} P[(i\ell w..v,\alpha)] & P[(i\ell w..v,\beta)] & P[(i\ell w..v,\gamma)] & 1 \\ P[(j\ell w..v,\alpha)] & P[(j\ell w..v,\beta)] & P[(j\ell w..v,\gamma)] & 1 \\ P[(k\ell w..v,\alpha)] & P[(k\ell w..v,\beta)] & P[(k\ell w..v,\gamma)] & 1 \\ P[(f\ell w..v,\alpha)] & P[(f\ell w..v,\beta)] & P[(f\ell w..v,\gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad /7.5/$$

Эквивалентные уравнения /7.I/ и /7.5/ определяют неявно, например, (i,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α). Сравнивая выражения для производной функции (i,β) по перемен-

ной (i,α) , найденные из неявных заданий /7.1/ и /7.5/, получаем

$$\hat{R}(ef)\,\frac{P_{(i,\alpha)}[(ifw\ldots v,\alpha)]\,\bar{P}[(ifw\ldots v,\alpha)]}{P_{(i,\beta)}[(ifw\ldots v,\beta)]\,\bar{P}[(ifw\ldots v,\beta)]}=0, \qquad /7.6/$$

где через $\bar{P}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей /7.1/ и /7.5/.

В равенстве /7.6/ зафиксируем значения всех переменных, кроме $(ifw\ldots v,\alpha)$:

$$P_{(i,\alpha)}[(ifw\ldots v,\alpha)]=A_{(i,\alpha)}[(iw\ldots v,\alpha)]\,B[(fw\ldots v,\alpha)],$$

откуда после интегрирования по переменной (i,α) получаем выражение для функции P :

$$P[(ifw\ldots v,\alpha)]=$$

$$=A[(iw\ldots v,\alpha)]\,B[(fw\ldots v,\alpha)]+C[(fw\ldots v,\alpha)] \qquad /7.7/$$

Заметим, что $A_{(i,\alpha)}[(iw\ldots v,\alpha)]\neq 0$, $B[(fw\ldots v,\alpha)]\neq 0$.

Подставим функцию /7.7/ в уравнение /7.1/. Слагаемое C исчезает в линейной комбинации со столбцом из единиц, а ненулевой множитель B можно вынести из первых трех столбцов :

$$\begin{vmatrix} A[(iw\ldots v,\alpha)] & A[(iw\ldots v,\beta)] & A[(iw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ A[(jw\ldots v,\alpha)] & A[(jw\ldots v,\beta)] & A[(jw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ A[(kw\ldots v,\alpha)] & A[(kw\ldots v,\beta)] & A[(kw\ldots v,\gamma)] & 1 \\ A[(lw\ldots v,\alpha)] & A[(lw\ldots v,\beta)] & A[(lw\ldots v,\gamma)] & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad /7.8/$$

Соотношение /7.8/, в действительности, является тождеством по всем входящим в него переменным, вследствие отсутствия зависимости от переменных $(f, \alpha\beta\gamma)$. Продифференцируем тождество /7.8/ по переменным (i,α) , (i,β) , (k,γ) :

$$A_{(i,\alpha)[(iw\ldots v,\alpha]} A_{(j,\beta)[(jw\ldots v,\beta]} A_{(k,\gamma)[(kw\ldots v,\gamma]} = 0,$$

что противоречит условию необращения в нуль каждого из сомножителей. То есть уравнение /7.1/ несовместно по перестановкам элементов ℓ , f и бинарные физические структуры ранга $(m,3)$ для $m \geq 5$ не существуют. Доказанное утверждение является частью случая е/ основной теоремы, когда $n = 3$. Результаты данного параграфа изложены также автором в работе "Об одном функциональном уравнении с двухиндексными переменными" [11] .

Интересно сравнить результаты четвертого и седьмого параграфов. Если $n = 2$, то бинарные физические структуры ранга $(m,2)$ существуют для $m = 3,4,2$ и не существуют для $m \geq 5$. Если же $n = 3$, то бинарные физические структуры ранга $(m,3)$ существуют только для $m = 3,4$ и не существуют для $m \geq 5$. Заметно различие этих случаев, так как существует физическая структура ранга $(4,2)$, когда $m = n+2$, и не существует физической структуры ранга $(5,3)$, когда тоже $m = n+2$. В этом смысле случай $n = 2$ является особым. Метод индукции поэтому удобнее применить после получения результатов /5.52/ и /5.55/, что и будет сделано в следующем параграфе.

§ 8. Метод индукции : $m \geq n \geq n' \geq 3$

В пятом параграфе было показано, что для $m \geq n \geq 3$ множество $\mathcal{N}$ в некоторой окрестности каждой точки $(i_1 j_1 k_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \tau_1)$, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{N}\mathcal{B}_1^m \times \mathcal{B}_1^n$, может быть задано одним из уравнений /5.52/, /5.55/. В определителе четвертого порядка /5.52/ отличен от нуля любой минор второго и третьего порядков, окаймленный строкой из единиц снизу и столбцом из единиц справа. В определителе же третьего порядка /5.55/ отличны от нуля все миноры первого и второго порядков. Производные функций Π и T по первому аргументу в нуль не обращаются. Но в таком случае любая производная левых частей уравнений /5.52/ и /5.55/ отлична от нуля, то есть эти уравнения можно однозначно разрешить относительно любого из аргументов. Однако в шестом параграфе было доказано, что в случае $m \geq 4$ уравнение /5.52/ оказывается несовместным по перестановкам элементов k, ℓ и потому остается только уравнение /5.55/.

Будем далее использовать метод индукции. Пусть n' есть произвольное число, удовлетворяющее условию $n \geq n' \geq 3$. Предположим, что для $m \geq n \geq n'$ множество $\mathcal{N}$ в некоторой окрестности каждой точки $(i_1 j_1 k_1 \dots s_1 \tau_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \delta_1 \varepsilon_1 \dots \tau_1)$, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{N}\mathcal{B}_1^m \times \mathcal{B}_1^{n'}$, может быть задано одним из двух уравнений, имеющих такое же строение, как и уравнения /5.52/, /5.55/:

$$\begin{vmatrix} \Pi[(ipq..v,\alpha\mu..\tau)] & \dots & \Pi[(ipq..v,\beta\mu..\tau)] & \Pi[(ipq..v,\varepsilon\mu..\tau)] & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi[(spq..v,\alpha\mu..\tau)] & \dots & \Pi[(spq..v,\beta\mu..\tau)] & \Pi[(spq..v,\varepsilon\mu..\tau)] & 1 \\ \Pi[(rpq..v,\alpha\mu..\tau)] & \dots & \Pi[(rpq..v,\beta\mu..\tau)] & \Pi[(rpq..v,\varepsilon\mu..\tau)] & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad /8.1/$$

$$\begin{vmatrix} T[(ipq..v,\alpha\mu..\tau)] & \dots & T[(ipq..v,\beta\mu..\tau)] & T[(ipq..v,\varepsilon\mu..\tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T[(spq..v,\alpha\mu..\tau)] & \dots & T[(spq..v,\beta\mu..\tau)] & T[(spq..v,\varepsilon\mu..\tau)] \\ T[(rpq..v,\alpha\mu..\tau)] & \dots & T[(rpq..v,\beta\mu..\tau)] & T[(rpq..v,\varepsilon\mu..\tau)] \end{vmatrix} = 0 \quad /8.2/$$

В определителе $(n'+1)$ -го порядка /8.I/ отличны от нуля все миноры 2-го, 3-го,..., n'-го порядка, окаймленные строкой из единиц снизу и столбцом из единиц справа. В определителе n' -го порядка /8.2/ отличны от нуля все миноры I-го, 2-го,..., $(n'-1)$-го порядка. Производные функций Π и T по первому аргументу не обращаются в нуль и, как легко понять, уравнения /8.I/, /8.2/ могут быть однозначно разрешены относительно любого из аргументов. Предположим также, что в случае $m \geq n'+1$ уравнение /8.I/ несовместно по перестановкам элементов τ , ρ и потому остается только уравнение /8.2/.

Докажем, что для $m \geq n \geq n'+1$ множество $\mathcal{N}$ в некоторой окрестности каждой точки $(i_1 j_1 k_1 \dots s_1 \tau_1 \rho_1 \dots \vartheta_1$, $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \delta_1 \varepsilon_1 \mu_1 \dots \tau_1)$, соответствующей недиагональному кор-

тежу из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{M}_1^n$, может быть задано одним из двух уравнений, имеющих такое же строение, как и уравнения /8.1/, /8.2/ :

$$\begin{vmatrix} \Pi[ip\,q\,h\ldots v,\alpha\nu\ldots\tau] & \ldots & \Pi[ip\,q\,h\ldots v,\varepsilon\nu\ldots\tau] & \Pi[ip\,q\,h\ldots v,\mu\nu\ldots\tau] & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Pi[rq\,h\ldots v,\alpha\nu\ldots\tau] & \ldots & \Pi[rq\,h\ldots v,\varepsilon\nu\ldots\tau] & \Pi[rq\,h\ldots v,\mu\nu\ldots\tau] & 1 \\ \Pi[pq\,h\ldots v,\alpha\nu\ldots\tau] & \ldots & \Pi[pq\,h\ldots v,\varepsilon\nu\ldots\tau] & \Pi[pq\,h\ldots v,\mu\nu\ldots\tau] & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 , \quad /8.3/$$

$$\begin{vmatrix} T[ip\,q\,h\ldots v,\alpha\nu\ldots\tau] & \ldots & T[ip\,q\,h\ldots v,\varepsilon\nu\ldots\tau] & T[ip\,q\,h\ldots v,\mu\nu\ldots\tau] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ T[rq\,h\ldots v,\alpha\nu\ldots\tau] & \ldots & T[rq\,h\ldots v,\varepsilon\nu\ldots\tau] & T[rq\,h\ldots v,\mu\nu\ldots\tau] \\ T[pq\,h\ldots v,\alpha\nu\ldots\tau] & \ldots & T[pq\,h\ldots v,\varepsilon\nu\ldots\tau] & T[pq\,h\ldots v,\mu\nu\ldots\tau] \end{vmatrix} = 0 . \quad /8.4/$$

В определителе $(n'+2)$ –го порядка /8.3/ будут при этом отличны от нуля все миноры 2–го, 3–го,..., n' –го, $(n'+1)$ –го порядка, окаймленные строкой из единиц снизу и столбцом из единиц справа. В определителе $(n'+1)$ –го порядка /8.4/ будут отличны от нуля все миноры 1–го, 2–го,..., $(n'-1)$ –го, n' –го порядка. Производные функций Π и T по первому аргументу в нуль не обращаются и уравнения /8.3/, /8.4/ могут быть однозначно разрешены относительно любого из аргументов. Покажем, кроме того, что для случая $m \geq n'+2$ уравнение /8.3/ оказывается несовместным по перестановкам элементов p , q и остается только уравнение /8.4/.

Приступим к доказательству. Пусть $m \geq n'+1$ и множество $\mathcal{N}$

в окрестности каждой точки, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{N}_1^m \times \mathcal{N}_1^n$ задается уравнением /8.2/. Переставим в уравнении /8.2/ элементы τ , ρ :

$$\begin{vmatrix} T[(i\tau q..\nu,\alpha\mu..\tau)] & ..... & T[(i\tau q..\nu,\beta\mu..\tau)] & T[(i\tau q..\nu,\varepsilon\mu..\tau)] \\ .. & .. & .. & .. \\ T[(s\tau q..\nu,\alpha\mu..\tau)] & ..... & T[(s\tau q..\nu,\beta\mu..\tau)] & T[(s\tau q..\nu,\varepsilon\mu..\tau)] \\ T[(\rho\tau q..\nu,\alpha\mu..\tau)] & ..... & T[(\rho\tau q..\nu,\beta\mu..\tau)] & T[(\rho\tau q..\nu,\varepsilon\mu..\tau)] \end{vmatrix} = 0. \quad /8.5/$$

Эквивалентные уравнения /8.2/ и /8.5/ определяют, например, (i,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α) . Сравнивая два выражения для производной функции (i,β) по переменной (i,α) , найденные из неявных заданий /8.2/ и /8.5/, получаем

$$\hat{R}(\tau\rho)\frac{T_{i,\alpha}[(i\rho q,\alpha\mu)]\,\overline{T}[(i\rho q,\alpha\mu)]}{T_{i,\beta}[(i\rho q,\beta\mu)]\,\overline{T}[(i\rho q,\beta\mu)]} = 0, \qquad /8.6/$$

где через $\overline{T}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей /8.2/ и /8.5/. В равенстве /8.6/ в целях сокращения записи опущены "неподвижные" элементы, следующие за элементами q и μ .

Равенство /8.6/, очевидно есть тождество по всем входящим в него переменным, так как отсутствуют переменные $(i,\gamma..\delta\varepsilon)$. Зафиксируем в тождестве /8.6/ значения всех переменных, кроме $(i\rho q..\nu,\alpha\mu..\tau)$:

$$T_{i,\alpha}[(i\rho q,\alpha\mu)] = A_{i..\alpha}[(iq,\alpha\mu)]\,B_1[(\rho q,\alpha\mu)]\,B_2[(i\rho q,\mu)],$$

причем ни один из сомножителей в правой части в нуль не обращается. Заметим, что в определителе /8.2/ можно произвести несущественное переопределение функции T , вынося из каждой строки ненулевой множитель B_2 , а из каждого столбца – ненулевой множитель B_1 . Интегрируя последнее соотношение по переменной (i,α) с учетом упомянутого переопределения получаем следующее выражение для функции T :

$$T[(ipq,\alpha\mu)] = A[(iq,\alpha\mu)] + C[(i,\mu),(pq,\alpha\mu)] . \qquad /8.7/$$

Из полученного выражения /8.7/ следует, что $T(i,\alpha)[(ipq,\alpha\mu)] = T(i,\alpha)[(iiq,\alpha\mu)] = A(i,\alpha)[(iq,\alpha\mu)]$. Поэтому соотношение /8.6/ можно переписать в следующем виде :

$$\hat{R}(\tau\rho)\,\overline{T}[(ipq,\alpha\mu)]\,\overline{T}[(i\tau q,\beta\mu)] = 0 . \qquad /8.8/$$

Будем понижать порядок алгебраических дополнений $\overline{T}$, входящих в соотношение /8.8/. Продифференцируем сначала его по переменной (j,α) . Эта операция понизит на единицу порядок алгебраических дополнений $\overline{T}[(ipq,\beta\mu)]$ и $\overline{T}[(i\tau q,\beta\mu)]$. Затем произведем дифференцирование по переменной (j,β) , что приведет к понижению на единицу порядка алгебраических дополнений $\overline{T}[(ipq,\alpha\mu)]$ и $\overline{T}[(i\tau q,\alpha\mu)]$. Продолжим процесс понижения порядка, продифференцировав полученный результат сначала по переменной (k,γ) , а затем по (k,δ) . Повторяя этот несложный процесс, легко получаем следующий результат :

$$\hat{R}(\tau\rho)\,\frac{\hat{R}(s\tau)\,T[(spq,\beta\mu)]\,T[(\tau\rho q,\varepsilon\mu)]}{\hat{R}(s\tau)\,T[(spq,\delta\mu)]\,T[(\tau\rho q,\varepsilon\mu)]} = 0$$

и с учетом связи $T(i,\alpha)[(ipq,\alpha\mu)] = T(i,\alpha)[(irq,\alpha\mu)]$

$$\hat{R}(rp)\frac{T(i,\sigma)[(ipq,\sigma\mu)]\hat{R}(sr)T[(spq,\beta\mu)]T[(rpq,\varepsilon\mu)]}{T(i,\rho)[(ipq,\beta\mu)]\hat{R}(sr)T[(spq,\sigma\mu)]T[(rpq,\varepsilon\mu)]} = 0. \quad /8.9/$$

Сравнивая уравнения /8.9/ и /6.I6/ устанавливаем полную их эквивалентность. Поэтому для функции $T[(rpq,\sigma\mu)]$ можно выписать выражение /6.23/, повторив все предыдущие вкладки :

$$T[(rpq,\sigma\mu)] = a_1[(rq,\mu)]\{P[(rq,\sigma\mu)] - P[(pq,\sigma\mu)]\}, \quad /8.10/$$

причем $T[(rpq,\sigma\mu)] \neq 0$, $P[(rq,\sigma\mu)] - P[(pq,\sigma\mu)] \neq 0$.
Аналитическая функция P имеет отличную от нуля производную по первому аргументу.

Подставим функцию /8.I0/ в уравнение /8.2/ :

$$\begin{vmatrix} P[(iq,\nu,\alpha\mu\nu..\tau)] & \dots & P[(iq,..\nu,\sigma\mu\nu..\tau)] & P[(iq,..\nu,\varepsilon\mu\nu..\tau)] & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P[(sq,\nu,\alpha\mu\nu..\tau)] & \dots & P[(sq,..\nu,\sigma\mu\nu..\tau)] & P[(sq,..\nu,\varepsilon\mu\nu..\tau)] & 1 \\ P[(rq,..\nu,\alpha\mu\nu..\tau)] & \dots & P[(rq,\nu,\sigma\mu\nu..\tau)] & P[(rq,..\nu,\varepsilon\mu\nu..\tau)] & 1 \\ P[(pq,..\nu,\alpha\mu\nu..\tau)] & \dots & P[(pq,..\nu,\sigma\mu\nu..\tau)] & P[(pq,..\nu,\varepsilon\mu\nu..\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad /8.11/$$

В определителе $(n'+1)$ -го порядка /8.II/ отличны от нуля все миноры до порядка n' включительно, содержащие справа столбец из единиц.

Дальнейшие преобразования результата /8.II/ будем проводить по уже хорошо знакомой схеме. Переставим в уравнении /8.II/ элементы ε , μ :

$$\begin{vmatrix} P[(iq\ldots\nu,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)] \ldots P[(iq\ldots\nu,\beta\varepsilon\nu\ldots\tau)] & P[(iq\ldots\nu,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ P[(sq\ldots\nu,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)] \ldots P[(sq\ldots\nu,\beta\varepsilon\nu\ldots\tau)] & P[(sq\ldots\nu,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \\ P[(rq\ldots\nu,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)] \ldots P[(rq\ldots\nu,\beta\varepsilon\nu\ldots\tau)] & P[(rq\ldots\nu,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \\ P[(pq\ldots\nu,\alpha\varepsilon\nu\ldots\tau)] \ldots P[(pq\ldots\nu,\beta\varepsilon\nu\ldots\tau)] & P[(pq\ldots\nu,\mu\varepsilon\nu\ldots\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad /8.12/$$

Эквивалентные уравнения /8.II/ и /8.I2/ определяют, например, (j,α) как одну и ту же функцию переменной (i,α). Сравнивая два выражения для производной функции (j,α) по переменной (i,α), найденные из неявных заданий /8.II/, /8.I2/, получаем :

$$\hat{R}(\mu\varepsilon)\frac{P_{(i,\alpha)}[(iq,\alpha\mu\nu)]\,\bar{P}[(iq,\alpha\mu\nu)]}{P_{(j,\alpha)}[(jq,\alpha\mu\nu)]\,\bar{P}[(jq,\alpha\mu\nu)]} = 0, \qquad /8.13/$$

где через $\bar{P}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей /8.II/ и /8.I2/. Кроме того, как обычно, опущены "неподвижные" элементы, следующие за q и ν.

В равенстве /8.I3/ зафиксируем значения всех переменных, кроме $(iq\ldots\nu,\alpha\mu\nu\ldots\tau)$:

$$P_{(i,\alpha)}[(iq,\alpha\mu\nu)] = A_{(i,\alpha)}[(iq,\alpha\nu)]\,B[(iq,\mu\nu)]\,B_1[(q,\alpha\mu\nu)],$$

причем ни один из сомножителей в правой части не обращается в нуль. Например, $A_{(i,\alpha)}[(iq,\alpha\nu)] \neq 0$. Поскольку из каждого столбца определителя /8.I1/, кроме столбца из единиц, можно вынести общий ненулевой множитель B_1, удобно провести несу-

щественное переопределение функции P , исключив этот множитель. Тогда для функции P после интегрирования последнего соотношения по переменной (i,α) и исключения множителя B_1 можно выписать следующее выражение

$$P[(iq,\alpha\mu\nu)] = A[(iq,\alpha\nu)]B[(iq,\mu\nu)] + C[(i,\mu\nu),(q,\alpha\mu\nu)] . \quad /8.14/$$

Преобразуем равенство /8.13/, используя выражение /8.14/ для функции P :

$$\hat{R}(\mu\varepsilon)B[(iq,\mu\nu)]B[(jq,\varepsilon\nu)]\bar{P}[(iq,\alpha\mu\nu)]\bar{P}[(jq,\alpha\varepsilon\nu)] = 0 . \quad /8.15/$$

Будем понижать порядок алгебраических дополнений, входящих в равенство /8.15/, по схеме, аналогичной той, которая была применена к соотношению /8.8/. Продифференцируем сначала равенство /8.15/ по переменной (j,β) . Это приведет к понижению на единицу порядка алгебраических дополнений $\bar{P}[(iq,\alpha\mu\nu)]$ и $\bar{P}[(iq,\alpha\varepsilon\nu)]$. Затем результат продифференцируем по переменной (k,β) , что приведет к понижению на единицу порядка алгебраических дополнений $\bar{P}[(jq,\alpha\mu\nu)]$ и $\bar{P}[(jq,\alpha\varepsilon\nu)]$. Далее продифференцируем полученный результат сначала по переменной (k,γ) , а потом (ℓ,γ) , что приведет к понижению порядка всех алгебраических дополнений еще на единицу. Продолжим этот простой и наглядный процесс понижения порядка алгебраических дополнений, пока в результате не появятся алгебраические дополнения третьего порядка :

$$\hat{R}(\mu\varepsilon)\,\frac{\begin{vmatrix} P[(sq,\sigma\mu\nu)] & P[(sq,\varepsilon\mu\nu)] & 1 \\ P[(\tau q,\sigma\mu\nu)] & P[(\tau q,\varepsilon\mu\nu)] & 1 \\ P[(pq,\sigma\mu\nu)] & P[(pq,\varepsilon\mu\nu)] & 1 \end{vmatrix}}{B[(sq,\mu\nu)]\begin{vmatrix} P[(iq,\sigma\mu\nu)] & P[(iq,\varepsilon\mu\nu)] & 1 \\ P[(\tau q,\sigma\mu\nu)] & P[(\tau q,\varepsilon\mu\nu)] & 1 \\ P[(pq,\sigma\mu\nu)] & P[(pq,\varepsilon\mu\nu)] & 1 \end{vmatrix}} = 0 . \qquad /8.16/$$

Продифференцируем равенство /8.16/ дополнительно по переменной (s,σ) и переставим в результате местами числитель и знаменатель :

$$\hat{R}(\mu\varepsilon)\,\frac{\begin{vmatrix} P[(iq,\sigma\mu\nu)] & P[(iq,\varepsilon\mu\nu)] & 1 \\ P[(\tau q,\sigma\mu\nu)] & P[(\tau q,\varepsilon\mu\nu)] & 1 \\ P[(pq,\sigma\mu\nu)] & P[(pq,\varepsilon\mu\nu)] & 1 \end{vmatrix}}{B[(iq,\mu\nu)]\,\hat{R}(\tau p)\,P[(\tau q,\varepsilon\mu\nu)]} = 0 \qquad /8.17/$$

И, наконец, продифференцируем равенство /8.17/ по переменной (τ,σ) :

$$\hat{R}(\mu\varepsilon)\,\frac{B[(iq,\mu\nu)]\;P[(\tau q,\varepsilon\mu\nu)]-P[(pq,\varepsilon\mu\nu)]}{B[(\tau q,\mu\nu)]\;P[(iq,\varepsilon\mu\nu)]-P[(pq,\varepsilon\mu\nu)]} = 0$$

и с учетом выражения /8.14/ для P :

$$\hat{R}(\mu\varepsilon)\frac{P_{\alpha\alpha}[(iq.\alpha\mu\nu)]}{P_{\alpha\alpha}[(q.\alpha\mu\nu)]}\cdot\frac{\hat{P}[(q.\varepsilon\mu\nu)]-P[(pq.\varepsilon\mu\nu)]}{\hat{P}[(q.\varepsilon\mu\nu)]-P[(pq.\varepsilon\mu\nu)]}=0. \qquad /8.18/$$

Равенство /8.I8/ фактически есть функционально-дифференциальное уравнение для ρ . Сравнивая уравнения /8.I8/ и /5.I0/, устанавливаем их полную эквивалентность. То есть уравнение /8.I8/ имеет два решения, которые можно выписать аналогично результатам /5.39/, /5.40/ с дополнительными соотношениями /5.38/, /5.38/ и результату /5.54/.

Рассмотрим сначала подробно первое решение :

$$P[(q.\varepsilon\mu\nu)]=C_1[(q\,\varepsilon\mu\nu)]+\hat{P}[(q.\varepsilon\mu\nu)]/H_2[(q.\mu\nu)]. \qquad /8.19/$$

где

$$\tilde{P}[(q.\varepsilon\mu\nu)]=\{A[(q.\varepsilon\nu)]+$$

$$+B[(q.\mu\nu)]/a[(q.\varepsilon\mu\nu)]+E[(\nu.q.\varepsilon\mu\nu)]\}/H_2[(q.\nu)]. \qquad /8.20/$$

При этом дополнительно имеют место следующие связи :

$$a[(q.\varepsilon\mu\nu)]\,a[(q.\mu\varepsilon\nu)]=1, \qquad /8.21/$$

$$a[(q.\mu\varepsilon\nu)]\,E[(\alpha\nu).(q.\mu\varepsilon\nu)]=$$

$$=E[(\alpha.\nu).(q.\varepsilon\mu\nu)]+c[(q.\mu\varepsilon\nu)]\,H_2[(q.\nu)]. \qquad /8.22/$$

Из сравнения выражений /8.I4/ и /8.I9/, /8.20/ получаем

$$B[(q.\mu\nu)]=1/H_2[(q.\nu)]\,H_2[(q.\mu\nu)]. \qquad /8.23/$$

Подставим функцию /8.I9/ в уравнение /8.I7/, используя также выражение /8.23/ :

$$\hat{R}(\mu\varepsilon)\frac{\begin{vmatrix} \tilde{\rho}[(iq.\sigma\mu\nu)] & \tilde{\rho}[(iq.\varepsilon\mu\nu)] & 1 \\ \tilde{\rho}[(\tau q.\sigma\mu\nu)] & \tilde{\rho}[(\tau q.\varepsilon\mu\nu)] & 1 \\ \tilde{\rho}[(\rho q.\sigma\mu\nu)] & \tilde{\rho}[(\rho q.\varepsilon\mu\nu)] & 1 \end{vmatrix}}{\tilde{\rho}[(\tau q.\varepsilon\mu\nu)]-\tilde{\rho}[(\rho q.\varepsilon\mu\nu)]}=0. \qquad /8.24/$$

Функция $\tilde{\rho}[(iq.\varepsilon\mu\nu)]$, как легко понять из обозначения /8.20/ и дополнительных связей /8.21/, /8.22/, выражается через функцию $\tilde{\rho}[(iq.\mu\varepsilon\nu)]$ с переставленными элементами μ, ε следующим образом

$$\tilde{\rho}[(iq.\mu\varepsilon\nu)]=a[(q.\varepsilon\mu\nu)]c[(q.\mu\varepsilon\nu)]+a[(q.\varepsilon\mu\nu)]\tilde{\rho}[(iq.\varepsilon\mu\nu)]$$

Равенство /8.24/ в этом случае может быть приведено к следующей форме:

$$\begin{vmatrix} \tilde{\rho}[(iq.\sigma\mu\nu)]-\tilde{\rho}[(iq.\sigma\varepsilon\nu)] & \tilde{\rho}[(iq.\varepsilon\mu\nu)] & 1 \\ \tilde{\rho}[(\tau q.\sigma\mu\nu)]-\tilde{\rho}[(\tau q.\sigma\varepsilon\nu)] & \tilde{\rho}[(\tau q.\varepsilon\mu\nu)] & 1 \\ \tilde{\rho}[(\rho q.\sigma\mu\nu)]-\tilde{\rho}[(\rho q.\sigma\varepsilon\nu)] & \tilde{\rho}[(\rho q.\varepsilon\mu\nu)] & 1 \end{vmatrix}=0. \qquad /8.25/$$

Соотношения /5.44/ и /8.25/ эквивалентны. Тождественны также выражения /5.40/ и /8.20/ для функций $\tilde{\Lambda}$ и $\tilde{\rho}$. Поэтому можно использовать результаты /5.50/, /5.51/ уже решенной задачи, для того, чтобы выписать выражение для функции $\tilde{\rho}$:

$$\tilde{\rho}[(iq.\varepsilon\mu\nu)]=$$

$$=\{\Pi[(iq.\varepsilon\nu)]-\Pi[(iq,\mu\nu)]+E_2[(q.\varepsilon\mu\nu)]\}/O_2[(q.\varepsilon\nu)], \qquad /8.26/$$

где

$$\Pi[(q.\varepsilon\nu)] =$$

$$= O_1[(q.\varepsilon\nu)]\, H[(q.\varepsilon\nu)]/H_1[(q.\nu)] + E_1[(\alpha.\nu).(q.\varepsilon\nu)], \qquad /8.27/$$

причем $\Pi_{\alpha.\varepsilon}[(q.\varepsilon\nu)] \neq 0$.

В соответствии с формулами /8.I9/ и /8.26/ выражение для исходной функции $P[(q.\varepsilon\mu\nu)]$ будет следующим :

$$P[(q.\varepsilon\mu\nu)] = C_1[(q.\varepsilon\mu\nu)] +$$

$$+ \frac{\Pi[(q.\varepsilon\nu)] - \Pi[(q.\mu\nu)] + E_2[(q.\varepsilon\mu\nu)]}{O_1[(q.\varepsilon\nu)]\, H_2[(q.\mu\nu)]} \qquad /8.28/$$

Подставим функцию /8.23/ в уравнение /8.II/. После некоторых простых преобразований приходим, очевидно, к уравнению /8.3/. В определителе /8.3/ отличны от нуля все миноры, окаймленные строкой и столбцом из единиц, так как они возникли из ненулевых миноров определителя /8.II/, содержащих столбец из единиц и имеющих на единицу меньший порядок. Поскольку также $\Pi_{\alpha.\varepsilon}[(q\ \vartheta\ \varepsilon\nu).\tau\nu] \neq 0$, уравнение /8.3/ может быть однозначно разрешено относительно любого аргумента.

Рассмотрим теперь второе решение уравнения /8.I8/, аналогичное результату /5.54/ :

$$P[(q.\varepsilon\mu\nu)] = C_1[(q.\varepsilon\mu\nu)] +$$

$$+ \frac{T[(q.\varepsilon\nu)] + T[(q.\mu\nu)]/O[(q.\varepsilon\mu\nu)]}{B[(q.\mu\nu)]\, T[(q.\nu\nu)]} \qquad /8.29/$$

причем $\Gamma[(i_q, \varepsilon_{vl}] \neq 0$, $\Gamma[(i_p, \varepsilon_{vl}] \neq 0$.

Подставляя функцию /8.29/ в определитель /8.II/ после простых преобразований приходим к уравнению /8.4/. Очевидно, из связи миноров определителей /8.II/ и /8.4/ следует, что все миноры до порядка n' включительно в определителе /8.4/ отличны от нуля.

Итак, было показано, что для $m > n > n'+1$ множество N в некоторой окрестности точек, соответствующих недиагональным кортежам из $\Pi b_i^m \times \Pi b_i^n$, действительно задается одним из уравнений /8.3/, /8.4/, если для $m > n > n'$ эти же окрестности задавались одним из уравнений /8.I/, /8.2/. Свойства уравнений /8.I/, /8.2/ и /8.3/, /8.4/ совпадают. Только порядок определителей /8.3/, /8.4/ на единицу больше порядка определителей /8.I/, /8.2/, соответственно.

Покажем далее, что для $m > n'+2$ уравнение /8.3/ несовместно по перестановкам элементов p , q .

Предположим сначала, что при перестановке элементов p , q уравнение /8.3/ сохраняет свою форму:

$$\begin{vmatrix} \Pi\Phi p.\ v_{l_1 \ldots l_n} & \ldots & \Pi\Phi p.\ v_{\varepsilon_{vl} \ldots l_n} & \Pi\Phi p.\ v_{p \ldots l_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Pi\Phi p.\ v_{l_1 \ldots l_n} & \ldots & \Pi\Phi p.\ v_{\varepsilon_{vl} \ldots l_n} & \Pi\Phi p.\ v_{q \ldots l_n} \\ \Pi\Phi p.\ v_{l_1 \ldots l_n} & \ldots & \Pi\Phi p.\ v_{\varepsilon_{vl} \ldots l_n} & \Pi\Phi p.\ v_{i \ldots l_n} \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad /8.30/$$

Эквивалентные уравнения /8.3/ и /8.30/ определяют неявно (i, β) как одну и ту же функцию переменной (i, α) . Сравни-

вая выражения для соответствующей производной, легко получаем

$$\sum_{igr} \frac{\Pi_{i,\dots,igh,\dots} \Pi_{igh,\dots}}{\Pi_{i,\dots,igh,p,\dots} \Pi_{igh,p,\dots}} = 0 \qquad /8.31/$$

где через Π , как обычно, обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей /8.3/, /8.30/ и опущены для сокращения записи элементы, следующие за h и v . В равенстве /8.31/ зафиксируем значения всех переменных, кроме $(igh\dots v.dv.2)$:

$$\Pi_{i,\dots,igh,\dots} = A_{i,\dots,igh,\dots}/E_{igh,\dots} F_{igh,\dots} ,$$

причем $A_{i,\dots,igh,\dots} \neq 0$, $E \neq 0$, $F \neq 0$. После интегрирования по переменной $(i.d)$ получаем выражение для функции $\Pi_{igh,\dots}$:

$$\Pi_{igh,\dots} = C_{i,\dots,igh,\dots} + \\ - A_{igh,\dots}/E_{igh,\dots} F_{igh,\dots} . \qquad /8.32/$$

Перепишем равенство /8.31/ в более удобной для дальнейших преобразований форме :

$$\sum_{igr} \frac{\Pi_{igh,\dots} \Pi_{igh,p,\dots}}{\Pi_{igh,p,\dots} \Pi_{i,\dots,igh,\dots}} = 0 . \qquad /8.33/$$

Используя выражение /8.32/ для функций $\Pi_{igh,\dots}$, будем понижать порядок алгебраических дополнений, входящих в равенство /8.33/, по уже знакомой схеме. Продифференцируем равенство /8.33/ сначала по переменной $(j.d)$. Это приведет к понижению на единицу порядка алгебраических дополнений $\Pi_{igh,p,\dots}$

и $\Pi(ipk\ \rho v)$. Последующее дифференцирование по переменной $(j\cdot g)$ уменьшит на единицу порядок алгебраических дополнений $\Pi(gk\ \alpha v)$ и $\Pi(ipk\ \alpha v)$. Дифференцирование по переменным $(k\cdot g)$ и $(k\cdot\delta)$ приведет к уменьшению еще на единицу порядка указанных алгебраических дополнений. Продолжая описанный процесс понижения порядка, приходим к равенству, в котором останутся только миноры третьего порядка, которые удобно записать с помощью оператора альтернирования :

$$\hat{R}(qr)\frac{\Pi(i\varepsilon gk\ \varepsilon v)\hat{R}(ri)\hat{R}(ej)\Pi(ej\ \rho v)}{\Pi(ipk\ \rho v)\hat{R}(rj)\hat{R}(ej)\Pi(ej\ \varepsilon v)}=0. \qquad /8.34/$$

Сравнивая соотношения /8.34/ и /6.2/, устанавливаем их полную эквивалентность. То есть обе задачи тождественны и можно воспользоваться результатом задачи /6.2/. Но последовательное рассмотрение этой задачи привело к противоречию, означающему, что функционально-дифференциальное уравнение /6.2/ не имеет решения. Аналогично не имеет решения и уравнение /8.34/. Это означает, что при перестановке элементов ρ , q уравнение /8.3/ не может сохранять своей формы.

Предположим теперь, что при перестановке элементов ρ , q уравнение /8.3/ изменяет свою форму :

$$\begin{vmatrix} \Pi(ipk\ v\alpha v\cdot\sigma) & \dots & \Pi(ipk\ v\varepsilon v\cdot\sigma) & \Pi(ipk\ v\rho v\cdot\sigma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi(qrk\ v\alpha v\cdot\sigma) & \dots & \Pi(qrk\ v\varepsilon v\cdot\sigma) & \Pi(qrk\ v\rho v\cdot\sigma) \\ \Pi(ipk\ v\alpha v\cdot\gamma) & \dots & \Pi(ipk\ v\varepsilon v\cdot\gamma) & \Pi(ipk\ v\rho v\cdot\gamma) \end{vmatrix} = 0. \qquad /8.35/$$

Эквивалентные уравнения /8.3/ и /8.35/ определяют неявно, например, (i,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α). Сравнивая выражения для соответствующей производной, получаем

$$\frac{\Pi_{i,\alpha}[(ip),\alpha\nu]\,\Pi[(ip),\alpha\nu]}{\Pi_{i,\beta}[(ip),\beta\nu]\,\Pi[(ip),\beta\nu]} = \frac{T_{i,\alpha}[(ip),\alpha\nu]\,T[(ip),\alpha\nu]}{T_{i,\beta}[(ip),\beta\nu]\,T[(ip),\beta\nu]}. \qquad /8.36/$$

где через Π и T обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей /8.3/ и /8.35/.

Выражения для функций $\Pi[(ip),\alpha\nu]$ и $T[(ip),\alpha\nu]$ могут быть получены из равенства /8.36/ по схеме, аналогичной той, которая была использована для нахождения функции /8.32/ из равенства /8.31/. Выражение для функции $\Pi[(ip),\alpha\nu]$ будет совпадать с /8.31/. Вводя несущественное переопределение функции $T_{i}[(ip),\alpha\nu]$, связанное с тем, что из строк и столбцов определителя /8.35/ всегда можно вынести общие ненулевые множители, получаем :

$$T[(ip),\alpha\nu] = A[(ip),\alpha\nu] + B[(i,\nu-ip),\alpha\nu]. \qquad /8.37/$$

Используя выражения /8.31/ и /8.37/ для функций Π и T, будем понижать порядок алгебраических дополнений, входящих в равенство /8.36/ по схеме, примененной к равенству /8.31/. В результате приходим к соотношению

$$\frac{\Pi_{i,\varepsilon}[(iq),\varepsilon\nu]\,\hat{R}(\gamma\rho)\hat{R}(\beta\rho)\,\Pi[(rq),\beta\nu]}{\Pi_{i,\beta}[(iq),\beta\nu]\,\hat{R}(\gamma\rho)\hat{R}(\varepsilon\rho)\,\Pi[(rq),\varepsilon\nu]} =$$

$$\frac{T[ip,\alpha][jq,\beta]\dots[rq,\varepsilon][qp,\mu]}{T[jp,\beta][iq,\alpha]\dots[rq,\varepsilon][qp,\mu]} \qquad /8.38/$$

которое эквивалентно равенству /6.II/. Но тогда для функции T можно выписать выражение /6.I4/ :

$$T[qp,\mu\nu] = A[qp,\mu\nu], \qquad /8.39/$$

где $A[q,\mu|qp,\mu\nu] \neq 0$.

Подставим функцию /8.39/ в уравнение /8.35/. Уравнение превращается в тождество по всем входящим в него переменным из-за отсутствия зависимости от $(p,\alpha\beta\dots\varepsilon)$. Продифференцировав это тождество по переменным (i,α) , (j,β) ,..., (r,ε) , (q,μ), получаем

$$A[i,\alpha|ip,\alpha\nu]\times\dots\times A[r,\varepsilon|rp,\varepsilon\nu]\times A[q,\mu|qp,\mu\nu] = 0.$$

что противоречит необращению в нуль каждого из сомножителей. Установление противоречия доказывает, что при перестановке элементов p , q уравнение /8.3/ не может переходить в уравнение /8.35/. Поскольку это уравнение не может также и сохранить своей формы, оно оказывается несовместным по перестановкам элементов p , q . То есть для $m \geq n'+2$ уравнение /8.3/ не может задавать некоторую окрестность точки, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{N}_1^m \times \mathcal{N}_1^n$ и остается только уравнение /8.4/.

Итак, методом индукции было показано, что для $m \geq n \geq n' \geq 3$ одно из уравнений /8.I/ и /8.2/ задает некоторую окрестность каждой точки N , соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{N}_1^m \times \mathcal{N}_1^n$. Если $m \geq n'+1$, то остается только уравнение /8.2/, которое может быть приведено к уравнению /8.II/.

§ 9. Завершение доказательства основной теоремы

Общий случай $m \geqslant n \geqslant 3$, рассматренный в §§ 5,6,7,8 разобъем на три непересекающихся подслучая $m = n \geqslant 3$, $m = n+1 \geqslant 4$, $m \geqslant n+2 \geqslant 5$ для завершения доказательства основной теоремы.

Рассмотрим сначала первый случай

I. $$m = n \geqslant 3 \qquad /9.1/$$

Запишем уравнения /8.I/ и /8.2/, полагая $n' = n$:

$$\begin{vmatrix} \Pi[(i,\alpha)] & \Pi[(i,\beta)] & \dots & \Pi[(i,\tau)] & 1 \\ \Pi[(j,\alpha)] & \Pi[(j,\beta)] & \dots & \Pi[(j,\tau)] & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi[(v,\alpha)] & \Pi[(v,\beta)] & \dots & \Pi[(v,\tau)] & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad /9.2/$$

$$\begin{vmatrix} T[(i,\alpha)] & T[(i,\beta)] & \dots & T[(i,\tau)] \\ T[(j,\alpha)] & T[(j,\beta)] & \dots & T[(j,\tau)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T[(v,\alpha)] & T[(v,\beta)] & \dots & T[(v,\tau)] \end{vmatrix} = 0, \qquad /9.3/$$

где аналитические функции Π и T одной переменной определены и имеют отличные от нуля производные в некоторой окрестности каждой точки, задаваемой значением функции $O : \mathcal{N}_{b_1} \times \mathcal{N}_{b_1} \to R$.

Запишем уравнения /9.2/ и /9.3/ для кортежа $\langle i j_1 k_1 \dots v_1, \alpha\beta_1\gamma_1 \dots \tau_1 \rangle$, где $i \in P(i_1)$, $\alpha \in O(\alpha_1)$, и разрешим их

относительно (i,α), вводя естественным образом параметры x_i^1, $x_i^2, \ldots, x_i^{m-1}$, ξ_α^1, $\xi_\alpha^2, \ldots, \xi_\alpha^{m-1}$:

$$(i,\alpha) = \psi^{-1}(x_i^1 \xi_\alpha^1 + \ldots + x_i^{m-2}\xi_\alpha^{m-2} + x_i^{m-1} + \xi_\alpha^{m-1}), \qquad /9.4/$$

$$(i,\alpha) = \psi^{-1}(x_i^1 \xi_\alpha^1 + \ldots + x_i^{m-2}\xi_\alpha^{m-2} + x_i^{m-1}\xi_\alpha^{m-1}) \qquad /9.5/$$

Аналитическая функция ψ строго монотонна, определена в некоторой окрестности точки $(i_1,\alpha_1) \in R$, где либо $\psi \equiv \Gamma$, либо $\psi \equiv T$, и имеет обратную ψ^{-1}. Используя параметрические представления /9.4/ и /9.5/ функции $a: P(i,) \times Q(\alpha,) \to R$, легко можно найти уравнения, задающие множество значений функции $A: [P(i,)]^m \times [Q(\alpha,)]^m \to R^{m\times m}$:

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & \ldots & \psi[(i,\tau)] & 1 \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & \ldots & \psi[(j,\tau)] & 1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ \psi[(v,\alpha)] & \psi[(v,\beta)] & \ldots & \psi[(v,\tau)] & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad /9.6/$$

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,\alpha)] & \psi[(i,\beta)] & \ldots & \psi[(i,\tau)] \\ \psi[(j,\alpha)] & \psi[(j,\beta)] & \ldots & \psi[(j,\tau)] \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ \psi[(v,\alpha)] & \psi[(v,\beta)] & \ldots & \psi[(v,\tau)] \end{vmatrix} = 0 \qquad /9.7/$$

Заметим, что во всех точках множества N, удовлетворяющих условиям основной теоремы, имеет место только один тип урав-

нения из /9.6/, /9.7/. Результаты /9.4/, /9.6/ и /9.5/, /9.7/, очевидно, исчерпывают содержание случая с/ основной теоремы, включая в себя результаты /5.58/, /5.60/ и /5.59/, /5.6I/ как частный случай, когда $m = n = 3$.

Перейдем теперь к рассмотрению второго случая, когда

2. $$m = n + 1 \geq 4 \qquad /9.8/$$

Запишем уравнение /8.II/, полагая $n' = n$:

$$\begin{vmatrix} \rho[(i,\alpha)] & \rho[(i,\beta)] & \dots & \rho[(i,\tau)] & 1 \\ \rho[(j,\alpha)] & \rho[(j,\beta)] & \dots & \rho[(j,\tau)] & 1 \\ \rho[(k,\alpha)] & \rho[(k,\beta)] & \dots & \rho[(k,\tau)] & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho[(v,\alpha)] & \rho[(v,\beta)] & & \rho[(v,\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad /9.9/$$

где аналитическая функция ρ одной переменной определена и имеет отличную от нуля производную ρ' в некоторой окрестности каждой из несовпадающих точек, задаваемых значениями функции $\alpha : \mathcal{V}_{i_1} \times \mathcal{V}_{\alpha_1} \to R$. Уравнение /9.9/ запишем для кортежа $\langle i j k_1 \dots v_1, \alpha \beta_1 \dots \tau_1 \rangle$, где $i \in \rho(i_1)$, $\alpha \in \Omega(\alpha_1)$, и разрешим их относительно (i,α), вводя естественным образом параметры $x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{m-2}, \xi_\alpha^1, \xi_\alpha^2, \dots, \xi_\alpha^{m-2}, \xi_\alpha^{m-1}$:

$$(i,\alpha) = \psi^{-1}(x_i^1 \xi_\alpha^1 + \dots + x_i^{m-2} \xi_\alpha^{m-2} + \xi_\alpha^{m-1}). \qquad /9.10/$$

Функция ψ определена в некоторой окрестности точки $(i_1, \alpha_1) \in R$, где $\psi \equiv \rho$, строго монотонна, так как $\psi' \neq 0$, и имеет обратную ψ^{-1}. Используя параметрическое представление

/9.10/ для функции $O:P(i,)\times Q(\alpha,)\to R$, легко находим уравнение, задающее множество значений функции $A:[P(i,)]^m\times[Q(\alpha,)]^{m-1}\to R^{m(m-1)}$:

$$\begin{vmatrix} \Psi[(i,\alpha)] & \Psi[(i,\beta)] & \dots & \Psi[(i,\tau)] & 1 \\ \Psi[(j,\alpha)] & \Psi[(j,\beta)] & \dots & \Psi[(j,\tau)] & 1 \\ \Psi[(k,\alpha)] & \Psi[(k,\beta)] & \dots & \Psi[(k,\tau)] & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi[(v,\alpha)] & \Psi[(v,\beta)] & \dots & \Psi[(v,\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad /9.11/$$

Заметим, что результат /7.3/, /7.4/ является частным случаем только что полученного, когда $m=n+1=4$. С другой стороны, результат /9.10/, /9.11/ не содержит результата /4.7/, /4.8/, когда $m=n+1=3$. Однако, строение определителей /9.11/ и /4.8/ одинаковое. Поэтому можно объединить в одной записи результаты /4.7/, /4.8/ и /9.10/, /9.11/, которые, очевидно, и составляют содержание случая d / доказываемой теоремы.

Перейдем, наконец, к рассмотрению последнего, третьего, случая, когда

3. $$m\geqslant n+2\geqslant 5 \qquad /312/$$

Запишем уравнение /8.11/, полагая $n'=n$:

$$\begin{vmatrix} P[(ijqh\dots v,\alpha)] & P[(ijqh\dots v,\beta)] & \dots & P[(ijqh\dots v,\tau)] & 1 \\ P[(ijqh\dots v,\alpha)] & P[(ijqh\dots v,\beta)] & \dots & P[(ijqh\dots v,\tau)] & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P[(rqh\dots v,\alpha)] & P[(rqh\dots v,\beta)] & \dots & P[(rqh\dots v,\tau)] & 1 \\ P[(pqh\dots v,\alpha)] & P[(pqh\dots v,\beta)] & \dots & P[(pqh\dots v,\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad /9.13/$$

Поскольку $m \geq n+2$, в уравнении /9.I3/ можно переставить элементы p , q :

$$\begin{vmatrix} P[(iph\ldots v,\alpha)] & P[(iph\ldots v,\beta)] & \ldots & P[(rph\ldots v,\tau)] & 1 \\ P[(jph\ldots v,\alpha)] & P[(jph\ldots v,\beta)] & \ldots & P[(jph\ldots v,\tau)] & 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ P[(trph\ldots v,\alpha)] & P[(trph\ldots v,\beta)] & \ldots & P[(trph\ldots v,\tau)] & 1 \\ P[(qph\ldots v,\alpha)] & P[(qph\ldots v,\beta)] & \ldots & P[(qph\ldots v,\tau)] & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad /9.I4/$$

Эквивалентные уравнения /9.I3/ и /9.I4/ определяют, например, (i,β) как одну и ту же функцию переменной (i,α) . Сравнивая два выражения для производной функции (i,β) по переменной (i,α) , найденные из неявных заданий /9.I3/ и /9.I4/, получаем

$$\hat{P}[(qp)] - \frac{P_{(i,\alpha)}[(iqh\ldots v,\alpha)]\,\bar{P}[(iqh\ldots v,\alpha)]}{P_{(i,\beta)}[(iqh\ldots v,\beta)]\,\bar{P}[(iqh\ldots v,\beta)]} = 0, \qquad /9.I5/$$

где через $\bar{P}$ обозначены алгебраические дополнения к соответствующим элементам определителей /9.I3/ и /9.I4/. Зафиксируем в равенстве /9.I5/ значения всех переменных, кроме $(iqh\ldots v,\alpha)$:

$$P_{(i,\alpha)}[(iqh\ldots v,\alpha)] = A_{(i,\alpha)}[(ih\ldots v,\alpha)]\,B[(qh\ldots v,\alpha)],$$

причем $A_{(i,\alpha)}[(ih\ldots v,\alpha)] \neq 0$, $B[(qh\ldots v,\alpha)] \neq 0$. Интегрируя последнее соотношение по переменной (i,α) , получаем выражение для функции P :

$$P[(iqh\ldots v,\alpha)] =$$

$$= A[ih\ldots v.\alpha]\,B[qh\ldots v.\alpha] + C[qh\ldots v.\alpha]. \qquad /9.16/$$

Подставим функцию /9.16/ в уравнение /9.13/. Слагаемое C исчезает в каждом столбце в линейной комбинации со столбцом из единиц. Ненулевой множитель B может быть вынесен из каждого столбца. В результате получаем

$$\begin{vmatrix} A[ih\ldots v.\alpha] & A[ih\ldots v.\beta] & \ldots & A[ih\ldots v.\tau] & 1 \\ A[jh\ldots v.\alpha] & A[jh\ldots v.\beta] & \ldots & A[jh\ldots v.\tau] & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A[rh\ldots v.\alpha] & A[rh\ldots v.\beta] & \ldots & A[rh\ldots v.\tau] & 1 \\ A[ph\ldots v.\alpha] & A[ph\ldots v.\beta] & \ldots & A[ph\ldots v.\tau] & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad /9.17/$$

Уравнение /9.17/ в действительности, есть тождество по всем входящим в него переменным, так как нет зависимости от $(\gamma.\delta\rho\chi\ldots\tau)$. Продифференцируем тождество /9.17/ по переменным $(i.\alpha)$, $(j.\beta)$ $(k.\chi)$ $\ldots$, $(r.\tau)$:

$$A_{i.\alpha}[ih.v.\alpha]\cdot A_{j.\beta}[jh\ldots v.\beta]\cdot\ldots\cdot A_{r.\tau}[rh\ldots v.\tau] = 0,$$

что противоречит необращению в нуль каждого из сомножителей. Установление противоречия означает, что уравнение /9.13/ для $m \geq n+2 \geq 5$ несовместно по перестановкам элементов p, q. То есть физические структуры ранга $(m.n)$ для $m \geq n+2 \geq 5$ не существуют.

В конце седьмого параграфа было доказано, что не существуют физические структуры ранга $(m,3)$ для $m \geq 5$, то есть для $m \geq n+2 = 5$. Очевидно, что это есть частный случай только что полученного результата. Однако, в конце четвертого

параграфа было доказано несуществование физических структур ранга $(m,2)$ для $m \geq 5$.Объединяя два результата конца четвертого и настоящего параграфов, можем сказать, что бинарные физические структуры ранга (m,n) для $m \geq n+2 \geq 4$, кроме случая $m = n+2 = 4$, не существуют. Это утверждение и составляет содержание случая e/ основной теоремы.

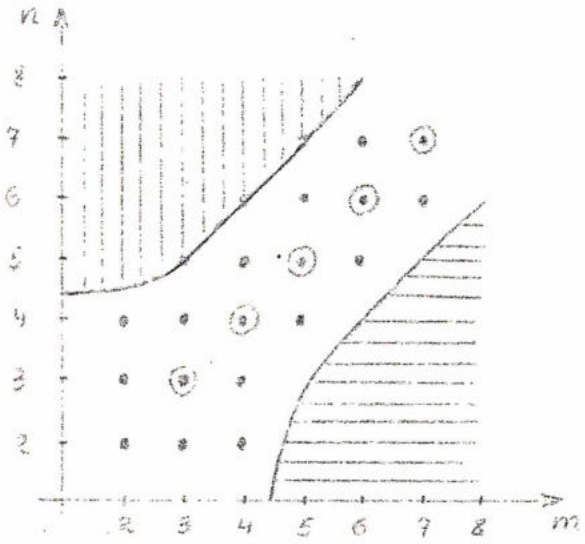
Напомним, что результаты /2.15/, /2.16/ составляют содержание случая a/ основной теоремы, результаты /4.17/, /4.18/ - случая b/, результаты /9.4/, /9.6/ и /9.5/, /9.7/ - случая c/, результаты /4.7/, /4.8/ и /9.10/, /9.11/ - случая d/.

Таким образом, основная теорема данной работы полностью доказана.

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

§ I. Некоторые замечания

В основной части данной работы рассмотрены бинарные физические структуры ранга (m,n) при условии $m \geq n \geq 2$. Установлено, что физические структуры существуют для $m = n \geq 2$ $m = n+1 \geq 3$, $m = n+2 = 4$ и не существуют для всех других пар значений целых чисел m и n. Ограничение $m \geq n$ было введено для многочисленных оговорок. Полученные результаты могут быть естественным образом распространены на все пары значении целых чисел $m \geq 2$ и $n \geq 2$. Для наглядности удобно содержание основной теоремы представить на диаграме:



На диаграме точкой отмечены физические структуры, существующие в одном варианте. Кружочком с точкой в центре - физические структуры, существующие в двух вариантах. В заштрихованной области физические структуры не существуют.

В настоящей работе рассмотрены бинарные физические структуры ранга (m,n) на двух множествах M_1 и M_2. Этот случай является одним из возможных в логической схеме, предназначенной для математической формулировки основной идеи теории физических структур - идеи "равноправия" физических объектов по отношению к физическому закону, записанному в феноменологически инвариантной форме. На рассмотренном бинарном случае можно увидеть и понять характерные особенности излагаемого математического формализма. Однако, для того чтобы описать с

единой точки зрения все возможные физические теории феноменологического типа, необходимо рассмотреть исходный принцип феноменологической симметрии в его наиболее общем виде [3] .

В обобщенной формулировке имеется числовая функция, определенная на прямом произведении не двух, а, вообще говоря, k множеств:

$$a: \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \ldots \times \mathcal{M}_k \to R ,$$

то есть каждому кортежу $\langle i_1, i_2, \ldots, i_k \rangle \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \ldots \times \mathcal{M}_k$ ставится в соответствие некоторое число $a_{i_1 i_2 \ldots i_k} \equiv$ $\equiv (i_1, i_2 \ldots i_k) \in R$. Кортежу $\langle i_1 j_2 \ldots v_1, i_2 j_2 \ldots v_2, \ldots, i_k j_k \ldots v_k \rangle$ из прямого произведения $\mathcal{M}_1^{m_1} \times \mathcal{M}_2^{m_2} \times \ldots \times \mathcal{M}_k^{m_k}$, где $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_k \geq 2$, будет при этом соответствовать числовая матрица размера $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$

$$(i_1 j_1 \ldots v_1, i_2 j_2 \ldots v_2, \ldots, i_k j_k \ldots v_k) \in R^{m_1 m_2 \ldots m_k} ,$$

рассматриваемая как точка $m_1 m_2 \ldots m_k$ -мерного пространства $R^{m_1 m_2 \ldots m_k}$. Основное условие состоит в том, чтобы множество значений построенной функции

$$A: \mathcal{M}_1^{m_1} \times \mathcal{M}_2^{m_2} \times \ldots \times \mathcal{M}_k^{m_k} \to R^{m_1 m_2 \ldots m_k}$$

представляло собой поверхность в $R^{m_1 m_2 \ldots m_k}$, задаваемую уравнением $\Phi = 0$, где Φ - аналитическая функция $m_1 m_2 \ldots m_k$ переменных.

Как показали предварительные исследования, при некоторых дополнительных условиях, обобщающих аксиомы A и C, для $k \geq 3$ физические структуры ранга $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ существуют только в простейшем случае $m_1 = m_2 = \ldots = m_k = 2$ в форме тривиальных аддитивных соотношений, обобщающих результат /I.3/. Для всех других сочетаний значений целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$

k -арные физические структуры ранга $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ с $k \geq 3$ не существуют, в то время как бинарные физические структуры ранга (m, n) с $k = 2$ существуют не только в простейшем случае $m = n = 2$. Указанное отличие позволяет понять особую роль, которую играют бинарные отношения в физике и математике. Например, тернарные физические структуры ранга (m, n, ℓ) на трех множествах M, N, K существуют только для $m = n = \ell = 2$ и не существуют для всех других троек значений целых чисел m, n, ℓ, в частности, для $m = n = \ell \geq 3$. Возможно в этом следует искать причину несодержательности теории трехмерных определителей. С другой стороны заметим, что определители /I.5/ и /I.6/, с помощью которых описываются бинарные физические структуры ранга (m, n) для $m = n \geq 3$, имеют строение определителей Грама и Кэли-Менгера, соответственно.

§ 2. Геометрические следствия

В основной теореме между множествами $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, кроме аксиом физической структуры, никакой дополнительной связи не предполагалось. Предположим теперь, что множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ совпадают. В этом случае основную теорему естественно сформулировать для $m = n \geq 3$.

СЛЕДСТВИЕ. Если пара $\langle \mathcal{M}, O: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to R \rangle$ образует бинарную физическую структуру ранга $(m.m)$, где $m \geq 3$, то в любых окрестностях $P(i_0), P(i'_0)$ произвольных точек $i_0, i'_0 \in \mathcal{M}$ найдутся элементы $i_1 \in P(i_0), i'_1 \in P(i'_0)$, для некоторых окрестностей $P(i_1), P(i'_1)$ которых множество значений функции $A: [P(i_1)]^m \times [P(i'_1)]^m \to R^{mm}$ может быть задано либо уравнением

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,i')] & \psi[(i,j')] & \dots & \psi[(i,v')] \\ \psi[(j,i')] & \psi[(j,j')] & \dots & \psi[(j,v')] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi[(v,i')] & \psi[(v,j')] & \dots & \psi[(v,v')] \end{vmatrix} = 0, \qquad /1/$$

либо

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \psi[(i,i')] & \psi[(i,j')] & \dots & \psi[(i,v')] \\ 1 & \psi[(j,i')] & \psi[(j,j')] & \dots & \psi[(j,v')] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \psi[(v,i')] & \psi[(v,j')] & \dots & \psi[(v,v')] \end{vmatrix} = 0, \qquad /2/$$

где $i, j, k, \dots, v \in P(i_1)$, $i', j', k', \dots, v' \in P(i'_1)$, ψ – строго монотонная аналитическая функция одной переменной, определённая в некоторой окрестности точки $(i_1, i'_1) \in R$.

В полученном следствии элементы i_1 и i_1' могут быть различными, а их окрестности $P(i_1)$ и $P(i_1')$ не обязательно пересекаются. Интересные выводы из результатов /I/, /2/ могут быть сделаны, если предположить, что окрестности $P(i_1)$ и $P(i_1')$ пересекаются. Это возможно, например, тогда, когда $i_1 = i_1'$ или если функция ψ продолжается аналитически на всё множество значений исходной функции $a: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to R$. В этом случае в уравнениях /I/, /2/ можно положить $i = i'$, $j = j'$, ..., $v = v'$:

$$\begin{vmatrix} \psi[(i,i)] & \psi[(i,j)] & \dots & \psi[(i,v)] \\ \psi[(j,i)] & \psi[(j,j)] & \dots & \psi[(j,v)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi[(v,i)] & \psi[(v,j)] & \dots & \psi[(v,v)] \end{vmatrix} = 0, \qquad /3/$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \psi[(i,i)] & \psi[(i,j)] & \dots & \psi[(i,v)] \\ 1 & \psi[(j,i)] & \psi[(j,j)] & \dots & \psi[(j,v)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \psi[(v,i)] & \psi[(v,j)] & \dots & \psi[(v,v)] \end{vmatrix} = 0. \qquad /4/$$

Заметим, что определители /3/, /4/ имеют строение определителей Грама и Кэли-Менгера соответственно. Поэтому соотношения /3/, /4/ могут быть интерпретированы как некоторые известные связи в геометрии.

Пусть, например, множество $\mathcal{M}$ есть $(m-2)$ - мерная сфера радиуса R и $\psi[(i,j)] = \cos(\ell_{ij}/R)$, где ℓ_{ij} есть расстояние между точками $i, j \in \mathcal{M}$, определяемое длиной дуги большого круга. Обращение в нуль определителя /3/ означает, что объём $(m-1)$ - мерного сферического симплекса, построенного на m про-

извольных точках сферы, всегда равен нулю. Аналогичная связь имеет место для псевдосферы, а также для пространства отрицательной кривизны, когда $\psi[(i,j)] = ch(\ell_{ij}/R)$.

Если же $\mathcal{M}$ - евклидовое $(m-2)$ -мерное пространство и $\psi[(i,j)] = \ell_{ij}^2$ есть квадрат расстояния ℓ_{ij} между точками $i,j \in \mathcal{M}$, то обращение в нуль определителя Кэли-Менгера /4/ фактически означает, что объём $(m-1)$ -мерного симплекса, построенного на любых m точках, всегда равен нулю. Заметим, что соотношение /4/ с $\psi[(i,j)] = \ell_{ij}^2$ имеет место и для псевдоевклидовых пространств, например, для четырёхмерного пространства-времени Минковского.

Блюменталь [1] в своей монографии рассматривал метрические пространства и множества, взаимные расстояния между точками которых удовлетворяют соотношениям типа /3/, /4/. Результаты настоящей работы в каком-то смысле предваряют исследования Блюменталя. Действительно, уравнения /3/, /4/ являются частными следствиями основной теоремы, то есть вытекают из аксиом физической структуры /принципа феноменологической симметрии/. В то же время Блюменталь постулирует эти уравнения, рассматривая именно их как исходные аксиомы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Blumenthal L.M., Theory and application of distance geometry, Oxford, 1953.

2. Гельфанд И.М., Лекции по линейной алгебре, М., I966.

3. Кулаков Ю.И., Элементы теории физических структур, Новосибирск, НГУ, I968, стр. 3-I74.

4. Михайличенко Г.Г., Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур, Дополнение к [3] , Новосибирск, НГУ, I968, стр. I75-226.

5. Кулаков Ю.И., Об одном принципе, лежащем в основании классической физики, ДАН, I93, № I, 72, /I970/.

6. Кулаков Ю.И., Математическая формулировка теории физических структур, Сиб. математ. ж., I2, № 5, II42 /I97I/.

7. Михайличенко Г.Г., Бинарная физическая структура ранга (3,2) , Сиб. математ. ж., I4, № 5, I057 /I973/.

8. Михайличенко Г.Г., Решение функциональных уравнений в теории физических структур, ДАН, 206, № 5, I056 /I972/.

9. Бурбаки Н., Общая топология, основные структуры, М., I968.

I0. Михайличенко Г.Г., Решение функциональных уравнений с двухиндексными переменными, Тезисы докладов по алгебре, математической логике и вычислительной математике на конференции педагогических вузов Центральной зоны РСФСР, Иваново, I970, стр. I65-I67.

II. Михайличенко Г.Г., Об одном функциональном уравнении с двухиндексными переменными, Укр. матем. ж., 25, № 5, 589 /I973/.

I2. Кулаков Ю.И., Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур, I93, № 5, 985 /I970/.