НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

На правах рукописи

Г.Г. Михайличенко

УДК 512.816 + 514.774

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

01.01.04 Геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск, 1990

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

§ I. Некоторые примеры из геометрии и физики . 5
§ 2. Основные определения и результаты диссертации I5

ГЛАВА I. Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии

§ I. Феноменологическая симметрия в геометрии 29
§ 2. Групповая симметрия в геометрии и ее эквивалентность феноменологической симметрии 39
§ 3. Группы движений феноменологически инвариантных плоских метрик 6I
§ 4. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости 78
§ 5. Метрика плоской (двумерной) геометрии как двухточечный инвариант I03

ГЛАВА II. Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур)

§ I. Феноменологическая симметрия физических структур и ее эквивалентность групповой симметрии в геометрии двух множеств II9

§ 2. Группы движений в геометрии двух множеств I49
§ 3. Об изоморфизме и подобии, слабой эквивалентности и эквивалентности групп преобразований, их взаимном расширении и двухточечных инвариантах I67
§ 4. Четырехмерные алгебры Ли преобразований плоскости I86
§ 5. Групповые свойства физической структуры ранга (3,3) 206
§ 6. Групповые свойства физических структур ранга ($n+1,2$) 2I6

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

§ I. Групповые свойства произвольных физических структур 23I
§ 2. Некоторые вопросы и замечания 245

Литература 248

В В Е Д Е Н И Е

§ I. Некоторые примеры из геометрии и физики

Рассмотрим сначала в качестве простого и наглядного примера евклидову плоскость. В декартовой прямоугольной системе координат квадрат расстояния между двумя произвольными точками $i = (x(i), y(i))$ и $j = (x(j), y(j))$ задаётся известным выражением:

$$f(ij) = (x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2. \qquad (I)$$

Заметим, что метрика (I) невырождена, то есть координаты точек i и j входят в неё существенным образом. Последнее означает, что запись метрики (I) в виде $f(ij) = \psi(x(i), y(i), \varphi(x(j), y(j)))$ или $f(ij) = \psi(\varphi(x(i), y(i)), x(j), y(j))$ невозможна ни для каких гладких функций φ и ψ от двух и трёх переменных.

По метрике (I) можно найти группу всех гладких преобразований евклидовой плоскости

$$x' = \lambda(x, y), \; y' = \sigma(x, y), \qquad (2)$$

относительно которой эта метрика является двухточечным инвариантом, то есть сохраняется. В самом деле, если преобразования (2) сохраняют расстояние (I) для любых двух точек i и j, то относительно функций λ и σ получаем уравнение

$$(x'(i) - x'(j))^2 + (y'(i) - y'(j))^2 = (x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2, \qquad (3)$$

решение которого находится без каких-либо дополнительных ограничений на свойства этих функций (в частности, без предположения об их линейности или аналитичности):

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= \mp bx \pm ay + d, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

приём $\alpha^2+\beta^2=1$ (см. § 3, гл. I).

Трёхпараметрическая группа преобразований (4) координатной плоскости $\{x,y\}$ определяет по Клейну /I/ геометрию евклидовой плоскости. Можно показать, что, с точностью до одной произвольной функции от одной переменной, метрика (I) является единственным двухточечным инвариантом группы (4). С другой стороны, групповая симметрия евклидовой плоскости, задаваемая преобразованиями (4), есть однозначное следствие условия сохранения метрики (I). Таким образом, невырожденная метрика (I) определяет геометрию евклидовой плоскости в той же мере и с той же степенью полноты, как её определяет группа преобразований (4).

Возьмём на евклидовой плоскости четыре произвольные точки i, j, k, ℓ, между которыми по метрике (I) найдём шесть взаимных расстояний. Известно (см. /44/, с. 290), что эти шесть расстояний функционально связаны, обращая в нуль определитель Кэли-Менгера пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & f(ij) & f(ik) & f(i\ell) \\ 1 & f(ij) & 0 & f(jk) & f(j\ell) \\ 1 & f(ik) & f(jk) & 0 & f(k\ell) \\ 1 & f(i\ell) & f(j\ell) & f(k\ell) & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Геометрический смысл соотношения (5) состоит в том, что объём тетраэдра с вершинами i, j, k, ℓ, лежащими на плоскости, равен нулю. По терминологии Ю.И.Кулакова /2/, соотношение (5), справедливое для любой четвёрки точек, выражает феноменологическую симметрию евклидовой плоскости.

Выясним теперь, исходя из простых и нестрогих соображений, как могут быть связаны между собой феноменологическая и групповая симметрии в общем случае для любой плоской геометрии с невырожденной метрикой (плоскости Минковского, плоскости Лабачевского, симплектической плоскости, двумерной сферы и т.д.). Жёсткая фигура на плоскости при любом разумном определении понятия движения имеет три степени свободы. Возьмём фигуру из четырёх точек и зададим каждую из них двумя координатами. Тогда вся фигура будет задана восемью координатами. Шесть попарных расстояний между четырьмя точками должны быть зависимы, так как, в противном случае, при движении жёсткой фигуры восемь координат были бы связаны шестью независимыми соотношениями и число степеней свободы оказалось бы равным двум: 8 - 6 = 2. Поэтому должна существовать функциональная связь между шестью расстояниями для любых четырёх точек i , j , k , ℓ :

$$\Phi(f(ij), f(ik), f(i\ell), f(jk), f(j\ell), f(k\ell)) = 0, \qquad (6)$$

конкретное выражение которой в случае евклидовой плоскости задаётся уравнением (5). Аналогичные соображения приводят к выводу, что если феноменологическая симметрия выражается некоторой зависимостью (6), то существует такая трёхпараметрическая группа преобразований плоскости

$$x' = \lambda(x, y, a) \,, \; y' = \sigma(x, y, a) \,, \qquad (7)$$

где $a = (a^1, a^2, a^3)$, относительно которой метрика $f(ij)$ является двухточечным инвариантом.

Г.Гельмгольц /3/ в своей знаменитой работе "О фактах, лежащих в основании геометрии" высказал предположение, что метрика n-мерного пространства не может быть произвольной, если в этом пространстве "твёрдое" тело имеет $n(n+1)/2$ степеней свободы. Но в

таком случае между всеми взаимными расстояниями для произвольных $n+2$ точек "твёрдого" тела должна существовать функциональная связь, так как при её отсутствии число степеней свободы $(n+2)$-точечной жёсткой фигуры с общим расположением точек в пространстве, движение которой однозначно определяет движение всего "твёрдого" тела, уменьшится ровно на единицу. Поэтому естественно было предположить, что феноменологическая симметрия n-мерного пространства невозможна при произвольной метрике. Для одномерного и двумерного случаев это было показано в работах автора /4/, /5/, а для трёхмерного - в работе В.Х.Льва /6/. Заметим, кстати, что задачу определения всех плоских геометрий, в которых "положение плоской фигуры в её плоскости определяется тремя условиями", впервые чётко сформулировал А.Пуанкаре /7/ в его известной работе "Об основных гипотезах геометрии".

Геометрия пространств с метрикой даёт нам пример некоторой структуры на одном множестве, в отличии от физики, основные законы которой выражают отношения между различными множествами физических объектов. Задание метрики на множестве, понимаемой в самом общем смысле как некоторая функция пары точек, определяет геометрию пространства. По известной метрике можно найти полную группу движений, то есть таких преобразований пространства, относительно которых эта метрика сохраняется, являясь их двухточечным инвариантом. Групповая симметрия лежит в основе "Эрлангенской программы" Ф.Клейна /I/ 1872 г., согласно которой геометрия есть теория инвариантов данной группы преобразований исходного множества. Тем самым метрическое и групповое задания геометрии могут оказаться эквивалентными, что отмечено автором и G.P. Wene в работах /8/ и /9/ соответственно. С другой стороны, в геометрии проявляется так называемая феноменологическая симметрия, на которую особое внимание обратил Ю.И.Кулаков /2/, сделав её основным прин-

ципом своей теории физических структур /IO/. Сущность феноменологической симметрии состоит в том, что в n -мерном пространстве между всеми взаимными расстояниями для $n+2$ произвольных точек имеется функциональная связь.

Основной задачей первой главы настоящей диссертации является формулировка достаточно общего определения феноменологической и групповой симметрий в геометрии и установление их полной эквивалентности. Детально эта эквивалентность прослеживается на примере двумерных (плоских) геометрий.

В исследованиях по основаниям физики Ю.И.Кулаковым /IO/ была предложена некоторая математическая модель строения физического закона как феноменологически инвариантной связи между измеряемыми в опыте величинами. Эта модель, именуемая физической структурой, имеет геометрический характер, приложима к обычной геометрии и может рассматриваться как своеобразная геометрия двух множеств. В новой геометрии можно ввести движение как пару таких преобразований исходных множеств, которые сохраняют расстояние между их точками и задают её групповую симметрию.

Следуя Ю.И.Кулакову /IO/, рассмотрим второй закон Ньютона в механике и закон Ома в электродинамике, записав их в такой форме, которая позволит выявить феноменологическую симметрию этих законов.

Пусть i - материальное тело, масса которого равна $m(i)$, и α - ускоритель, то есть любое другое тело, которое, действуя на материальные тела, сообщает им ускорение и характеризуется силой $F(\alpha)$. Измеряемой в опыте величиной является ускорение $a(i\alpha)$, которое телу i сообщает ускоритель α. Второй закон Ньютона в его традиционной форме утверждает, что произведение массы тела на сообщаемое ему ускорение равно действующей силе:

$$m(i)\,a(i\alpha) = F(\alpha)\,, \qquad (8)$$

Пусть, далее, i , j - два произвольных тела и α , β - два произвольных ускорителя. Дополнительно к (8) мы можем записать:

$$\left.\begin{aligned} m(i)\,a(i\beta) &= F(\beta), \\ m(j)\,a(j\alpha) &= F(\alpha), \\ m(j)\,a(j\beta) &= F(\beta). \end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

Из четырёх уравнений (8), (8′) можно исключить массы и силы и получить функциональную связь только между измеряемыми в опыте ускорениями:

$$a(i\alpha)\,a(j\beta) - a(i\beta)\,a(j\alpha) = 0. \qquad (9)$$

По терминологии Ю.И.Кулакова соотношение (9), справедливое для любых двух материальных тел i , j и любых двух ускорителей α, β , представляет собой феноменологически инвариантную форму второго закона Ньютона.

В электродинамике постоянных токов проводнику i, сопротивление которого равно $R(i)$, и источнику тока α , у которого $\mathcal{E}(\alpha)$- электродвижущая сила, а $r(\alpha)$ - внутреннее сопротивление, сопоставляется ток $J(i\alpha)$, измеряемый в соответствующей простой замкнутой цепи. Величина тока определяется законом Ома для полной цепи:

$$J(i\alpha) = \mathcal{E}(\alpha)/(R(i) + r(\alpha)) . \qquad (10)$$

Пусть, далее, i , j , k - три произвольных проводника и α , β - два произвольных источника тока. Тогда дополнительно к току (10) можно определить ещё пять его значений:

$$J(i\beta),\ J(j\alpha),\ J(j\beta),\ J(k\alpha),\ J(k\beta). \qquad (10')$$

Из шести выражений (10), (10′) можно исключить сопротивления проводников $R(i)$, $R(j)$, $R(k)$, электродвижущие силы источ-

ников тока $\mathcal{E}(\alpha)$, $\mathcal{E}(\beta)$, их внутренние сопротивления $r(\alpha)$, $r(\beta)$ и получить связь только между измеряемыми в опыте токами:

$$\begin{vmatrix} J(i\alpha) & J(i\beta) & J(i\alpha)\,J(i\beta) \\ J(j\alpha) & J(j\beta) & J(j\alpha)\,J(j\beta) \\ J(k\alpha) & J(k\beta) & J(k\alpha)\,J(k\beta) \end{vmatrix} = 0 . \qquad (II)$$

Соотношение (II), справедливое для любых трёх проводников i , j , k и любых двух источников тока α , β , есть феноменологически инвариантная форма закона Ома.

В работе /IO/ Ю.И.Кулаковым также показано, как, исходя из феноменологически инвариантных форм (9) и (II) второго закона Ньютона и закона Ома, прийти к их традиционной форме (8) и (IO), вводя естественным образом массу тела m , силу ускорителя F , сопротивление проводника R , электродвижущую силу источника $\mathcal{E}$ и его внутреннее сопротивление r .

Обращает на себя внимание принципиальная общность соотношений (5), (9), (II), которые выражают функциональные связи только между измеряемыми в опыте величинами, причём эти связи феноменологически инвариантны: для любых четырёх точек i , j , k , e евклидовой плоскости справедливо соотношение (5), для любых двух тел i , j и любых двух ускорителей α , β выполняется соотношение (9) и, наконец, для любых трёх проводников i , j , k и любых двух источников тока α , β имеет место соотношение (II). В разных случаях мы имеем дело с функцией двух точек, определяющей обобщённую метрику. В соотношении (5) такой функцией является квадрат расстояния между точками одной и той же евклидовой плоскости. В соотношении (9) это ускорение a , которое можно рассматривать как обобщённое расстояние между точками различных множеств - множества материальных тел и множества ускорителей. Аналогично в со-

отношении (II) ток $\mathcal{J}$ можно рассматривать как обобщённое расстояние между точкой из множества проводников и точкой из множества источников тока. Согласно терминологии Ю.И.Кулакова /I0/, ускорение a на множестве материальных тел и множестве ускорителей задаёт физическую структуру ранга (2,2), а ток $\mathcal{J}$ на множестве проводников и множестве источников тока - физическую структуру ранга (3,2). Эти структуры можно рассматривать как своеобразные геометрии двух множеств, феноменологическая симметрия которых выражается соотношениями (9) и (II). Заметим также, что феноменологически инвариантные формы (9) и (II) законов Ньютона и Ома с точностью до переобозначения $\Psi(a)\to a$ и $\Psi(\mathcal{J})\to\mathcal{J}$, где Ψ - произвольная функция одной переменной, оказываются единственно возможными.

На примере евклидовой плоскости мы уже знаем, что её феноменологическая симметрия, задаваемая соотношением (5), и групповая симметрия, определяемая группой движений (3), тесно между собой связаны, поскольку метрика (I) невырождена. Естественно было предположить, что аналогичная ситуация имеет место и в геометрии двух множеств (физической структуре). Под движением в этой геометрии будем понимать такие два одновременных преобразования множеств, при которых сохраняется расстояние между любыми двумя их точками. В случае механики преобразование множества материальных тел и преобразование множества ускорителей:

$$m' = \lambda(m)\ ,\quad F' = \sigma(F) \tag{I2}$$

является движением, если сохраняется ускорение, определяемое вторым законом Ньютона (8):

$$F'/m' = F/m\ . \tag{I3}$$

Относительно функций λ и σ преобразований (I2) получается уравнение, решение которого легко находится методом разделения переменных:

$$m' = cm \,, \quad F' = cF, \tag{I4}$$

где $c \neq 0$ – произвольный параметр. Преобразования (I4) задают однопараметрическую группу движений, которая определяет групповую симметрию физической структуры ранга (2,2), задаваемой на множестве материальных тел и множестве ускорителей функцией a .

Если известна группа преобразований (I4), то ускорение может быть найдено как её двухточечный инвариант по уравнению

$$a(m', F') = a(m, F).$$

Решение этого уравнения определяет закон Ньютона (8) с точностью до одной функции от одной переменной:

$$a = \Psi(F/m).$$

Содержательный смысл функции Ψ состоит в возможности выбора шкалы прибора, измеряющего ускорение. Ясно, что физический смысл второго закона Ньютона, его феноменологическая и групповая симметрии не должны зависеть от градуировки шкалы измерительного прибора.

Найдём теперь, какие преобразования множества проводников и множества источников тока:

$$R' = \lambda(R), \quad \mathcal{E}' = \sigma(\mathcal{E}, r) \,, \quad r' = \rho(\mathcal{E}, r) \tag{I5}$$

сохраняют величину тока, определяемого законом Ома (I0). Для этого надо решить соответствующее уравнение сохранения:

$$\mathcal{E}'/(R' + r') = \mathcal{E}/(R + r).$$

Для решения перепишем его в виде

$$(\lambda(R) + \rho(\varepsilon,\tau))/\sigma(\varepsilon,\tau) = (R+\tau)/\varepsilon$$

и затем продифференцируем по переменной R . После разделения переменных находим:

$$\sigma(\varepsilon,\tau)/\varepsilon = a = const$$

и, возвращаясь в исходное уравнение, получаем окончательно:

$$\lambda(R) = aR + b\,,\ \sigma(\varepsilon,\tau) = a\varepsilon\,,\ \rho(\varepsilon,\tau) = a\tau - b\,. \qquad (I6)$$

Преобразования (I5) с функциями (I6), где $a \neq 0$, составляют двухпараметрическую группу движений:

$$R' = aR + b\,,\ \varepsilon' = a\varepsilon\,,\ \tau' = a\tau - b\,, \qquad (I7)$$

которая определяет групповую симметрию физической структуры ранга (3,2), задаваемой на множестве проводников и множестве источников тока функцией J . С другой стороны, по группе преобразований (I7) можно восстановить закон Ома, рассматривая величину тока как её двухточечный инвариант:

$$J(R',\varepsilon',\tau') = J(R,\varepsilon,\tau)\,.$$

Решение этого уравнения содержит произвол в одну функцию от одной переменной:

$$J = \psi(\varepsilon/(R+\tau))\,,$$

который не меняет физический смысл закона Ома, его феноменологическую и групповую симметрии, отражая возможность изменения шкалы амперметра.

§ 2. Основные определения и результаты диссертации

В этом параграфе Введения будет дано краткое изложение основных определений и результатов диссертации. Сначала по первой главе, в которой изучаются феноменологическая и групповая симметрии в обычной геометрии, рассматриваемой как физическая структура на одном множестве, а затем по второй, в которой исследуются собственно физические структуры, представляющие собой своеобразную геометрию двух множеств.

Пусть имеется множество M произвольной природы, точки которого обозначим строчными латинскими буквами, а также функция: $f: G_f \to R$, где $G_f \subset M \times M$, сопоставляющая упорядоченной паре $\langle ij \rangle \in G_f$ некоторое вещественное число $f(ij) \in R$. Функцию f будем иногда называть метрикой, не требуя, однако, её положительной определённости и выполнения обычных метрических аксиом. Будем предполагать, что выполняется следующее условие:

А. Если две произвольные точки i, j из M различны, то для некоторого $k \in M$ либо $\langle ik \rangle, \langle jk \rangle \in G_f$ и $f(ik) \neq f(jk)$, либо $\langle ki \rangle, \langle kj \rangle \in G_f$ и $f(ki) \neq f(kj)$.

Смысл условия А состоит, прежде всего, в том, что рассматриваются только такие свойства пространства M, которые выражаются посредством функции f. По метрике f, удовлетворяющей условию А, на множестве M определяется отделимая топология заданием системы окрестностей $U(i)$ каждой его точки i. Топологии в $M \times M$ и других прямых произведениях вводятся обычным образом как произведения топологий пространств-сомножителей.

Пусть $n \geq 1$ - целое число. Для некоторого кортежа $\langle k_1, \ldots, k_n \rangle$ длины n из M^n введём функцию $\overline{f}^n = \overline{f}[k_1 \ldots k_n]$ ($\overline{\overline{f}}^n = \overline{\overline{f}}[k_1 \ldots k_n]$), сопоставляя точке $i \in M$ точку $(f(ik_1), \ldots, f(ik_n)) \in R^n$ ($(f(k_1 i), \ldots, f(k_n i)) \in R^n$), если $\langle ik_1 \rangle, \ldots, \langle ik_n \rangle \in G_f$ ($\langle k_1 i \rangle, \ldots, \langle k_n i \rangle \in G_f$). В отношении пространства M и исходной

функции f будем предполагать выполнение следующих трёх аксиом:

I. Область определения $\mathcal{G}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ множество.

II. Существует открытое и плотное в $\mathcal{M}$ множество, для каждой точки i которого найдётся в $\mathcal{M}^n$ такой кортеж длины n, что для него либо отображение $\overline{f}^n$, либо отображение $\overline{\overline{f}}^n$ некоторой её окрестности $U(i)$ в R^n является локальным гомеоморфизмом.

III. Функция f достаточно гладкая в локальных координатах, описанных в аксиоме II, и плотно в $\mathcal{M}^n$ множество таких кортежей длины n, для которых отображение $\overline{f}^n$ ($\overline{\overline{f}}^n$) имеет ранг n в точках плотного в $\mathcal{M}$ множества.

Согласно аксиомам II и III, открытое и плотное в $\mathcal{M}$ множество является гладким многообразием размерности n (лемма 2, § I гл. I). Функцию f, удовлетворяющую условиям аксиомы III, будем называть н е в ы р о ж д е н н о й.

Пусть, далее, $m = n+2 \geq 3$. Введём ещё фунцию F, сопоставляя кортежу $\langle ijk_{\ldots}vw\rangle$ длины m из $\mathcal{M}^m$ точку $(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) \in R^{m(m-1)/2}$, координаты которой в $R^{m(m-1)/2}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью значений функции f для всех пар его элементов $\langle ij\rangle, \langle ik\rangle, \ldots, \langle vw\rangle$, если эти пары принадлежат $\mathcal{G}_f$. Область определения введённой функции в $\mathcal{M}^m$ обозначим через $\mathcal{G}_F$.

О п р е д е л е н и е (§ I гл. I). Будем говорить, что функция f задаёт на множестве $\mathcal{M}$ феноменологически симметричную n-мерную геометрию расстояний ранга $m = n+2$, если, кроме условия A и аксиом I,II,III, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IV. Существует плотное в $\mathcal{G}_F$ множество, для каждого кор-

тежа $\langle ijk\ldots vw\rangle$ длины $m=n+2$ которого и некоторой окрестности $U(\langle ijk\ldots vw\rangle)$ найдётся такая достаточно гладкая функция $\Phi: E\to R$, определённая в некоторой области $E\subset R^{m(m-1)/2}$, содержащей точку $F(\langle ijk\ldots vw\rangle)$, что в ней $grad\,\Phi\neq 0$ и множество $F(U(\langle ijk\ldots vw\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции Φ, то есть

$$\Phi(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) = 0$$

для всех кортежей из $U(\langle ijk\ldots vw\rangle)$.

Аксиома IУ составляет содержание принципа феноменологической симметрии в теории физических структур Ю.И.Кулакова /I0/. Функция F отображает область $\mathcal{G}_F$ в $R^{m(m-1)/2}$. Рангом отображения, как известно, называется ранг соответствующей функциональной матрицы.

Т е о р е м а (§ I гл. I). Для того, чтобы функция f, удовлетворяющая условию А и аксиомам I, П, Ш, задавала на множестве $\mathcal{M}$ феноменологически симметричную n-мерную геометрию расстояний ранга $m=n+2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $m(m-1)/2-1$ на плотном в $\mathcal{G}_F$ множестве.

Преобразование λ множества $\mathcal{M}$ называется движением, если при нём сохраняется метрика f. Последнее означает, что для каждой пары $\langle ij\rangle\in\mathcal{G}_f$ имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(ij),$$

если пара $\langle\lambda(i), \lambda(j)\rangle\in\mathcal{G}_f$. Множество всех движений есть группа, для которой метрика f является двухточечным инвариантом.

О п р е д е л е н и е (§ 2 гл. I). Будем говорить, что функция f задаёт на множестве $\mathcal{M}$ n-мерную геометрию расстоя-

ний, наделённую групповой симметрией степени $n(n+1)/2$, если, кроме условия А и аксиом I,П,Ш, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IУ'. Существует открытое и плотное в M множество, для каждой точки i которого определено эффективное гладкое действие $n(n+1)/2$ -мерной локальной группы Ли в некоторой окрестности $U(i)$, такое что действия ее в окрестностях $U(i)$, $U(j)$ двух точек i , j совпадают в пересечении $U(i) \cap U(j)$, и что функция f является двухточечным инвариантом.

Т е о р е м а I (§ 2 гл. I). Для того, чтобы функция f, удовлетворяющая условию А и аксиомам I,П,Ш, задавала на множестве M n -мерную геометрию расстояний, наделённую групповой симметрией степени $n(n+1)/2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $m(m-1)/2-1$ на плотном в $\mathfrak{S}_F$ множестве.

Итоговым результатом первых двух параграфов первой главы является установление эквивалентности феноменологической и групповой симметрий в n - мерной геометрии расстояний:

Т е о р е м а 2 (§ 2 гл. I). Для того, чтобы функция f задавала на множестве M феноменологически симметричную n-мерную геометрию расстояний ранга $n+2$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на M n -мерную геометрию расстояний, наделённую групповой симметрией степени $n(n+1)/2$.

Основные определения, результаты и методы исследования по §§ I,2 первой главы опубликованы в работах автора /8/, /II/.

В последующих трёх параграфах этой главы эквивалентность феноменологической и групповой симметрий детально прослеживается на примере двумерных геометрий.

Ранее автором /5/ методом, разработанным в теории физических структур, были найдены все невырожденные феноменологически инвариантные плоские метрики, удовлетворяющие некоторому уравнению (6) из

§ I введения. Выпишем здесь их локальные координатные представления с точностью до замены координат и переобозначения $\Psi(f) \to f$, где Ψ – произвольная функция одной переменной:

$$f(ij) = (x(i)-x(j))^2 + (y(i)-y(j))^2,$$

$$f(ij) = \cos y(i)\cos y(j)\cos(x(i)-x(j)) + \sin y(i)\sin y(j),$$

$$f(ij) = \operatorname{sh} y(i)\operatorname{sh} y(j)\cos(x(i)-x(j)) - \operatorname{ch} y(i)\operatorname{ch} y(j),$$

$$f(ij) = (x(i)-x(j))^2 - (y(i)-y(j))^2,$$

$$f(ij) = \operatorname{ch} y(i)\operatorname{ch} y(j)\cos(x(i)-x(j)) - \operatorname{sh} y(i)\operatorname{sh} y(j),$$

$$f(ij) = x(i)y(j) - x(j)y(i),$$

$$f(ij) = (x(i)-x(j))^{\alpha}(y(i)-y(j))^{\beta},$$

$$f(ij) = (x(i)-x(j))/(y(i)-y(j)) + \ln|y(i)-y(j)|,$$

$$f(ij) = \ln((x(i)-x(j))^2 + (y(i)-y(j))^2) + \gamma \operatorname{arctg}((x(i)-x(j))/(y(i)-y(j))),$$

$$f(ij) = ((x(i)-x(j))^2 + \varepsilon_i y^2(i) + \varepsilon_j y^2(j))/y(i)y(j),$$

где $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\varepsilon_i, \varepsilon_j = 0, \pm 1$, причём не обязательно $\varepsilon_i = \varepsilon_j$

Если метрика f известна, то можно найти такие преобразования плоскости

$$x' = \lambda(x,y), \quad y' = \sigma(x,y),$$

которые её сохраняют. Относительно функций λ и σ из условия сохранения расстояния $f(ij)$ получаем функциональное уравнение:

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)),$$

которое может быть решено без дополнительных ограничений на их свойства. В § 3 гл.I методы решения этого уравнения проиллюстрированы на нескольких примерах и приведены явные выражения полных локальных групп движений для каждой из выписанных выше десяти плоских метрик $f(ij)$. Оказалось, что все они допускают не более чем трёхпараметрическую группу движений.

Таким образом, плоская феноменолологически инвариантная метрика является двухточечным инвариантом трехпараметрической группы преобразований плоскости. Естественно возник вопрос: всякий ли невырожденный двухточечный инвариант трехпараметрической группы Ли преобразований плоскости является феноменологически инвариантной плоской метрикой? Для ответа на этот вопрос автор в §4 гл.I проводит полную классификацию трехмерных алгебр Ли преобразований плоскости с точностью до эквивалентности, то есть обратимой замены координат. Исходной была хорошо известная полная классификация трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли, заданных коммутаторами $[X_1, X_2], [X_3, X_1], [X_2, X_3]$ базисных векторов X_1, X_2, X_3. Подставляя в коммутаторы операторы

$$X_\alpha = \lambda_\alpha(x,y)\,\partial_x + \sigma_\alpha(x,y)\,\partial_y ,$$

где $\alpha = 1,2,3$, получаем систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $\lambda_\alpha(x,y)$, $\sigma_\alpha(x,y)$, решение которой и дает для каждой отдельной абстрактной алгебры ее реализацию линей-ными операторами преобразований плоскости. Полученная классификация сопоставляется с соответствующей классификацией С. Ли. Результаты §4 гл.I опубликованы в работе /I2/.

Последний §5 гл.I посвящен вычислениям всех двухточечных инвариантов $f(ij)$ трехмерных групп преобразований плоскости, являющихся решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$X_\alpha(i) f(ij) + X_\alpha(j) f(ij) = 0 .$$

В работе /I3/ автор последовательно для всех возможных операторов $X_\alpha(i)$ и $X_\alpha(j)$ находит решения этой системы. В диссертации же (§5 гл.I) основные приемы показаны на нескольких типичных случаях и перечислены все возможные двухточечные инварианты, которых получилось 32, как вырожденных, так и невырожденных. Оказалось, что

полностью невырожденные двухточечные инварианты совпадают с невырожденными феноменологически инвариантными плоскими метриками. Этот результат подтверждает на примере плоских геометрий эквивалентность феноменологической и групповой симметрий.

Перейдём теперь к краткому изложению второй главы.

Пусть имеются два множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ произвольной природы, в общем случае различной, точки которых будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами соответственно, а также функция $f: \mathcal{G}_f \to R^s$, где $\mathcal{G}_f \subset \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ и $s \geqslant 1$, сопоставляющая паре $\langle i\alpha \rangle \in \mathcal{G}_f$ некоторую совокупность s вещественных чисел $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), \ldots, f^s(i\alpha)) \in R^s$. Будем предполагать, что выполняется следующее условие:

А. Если две произвольные точки i, j из $\mathcal{M}$ (α, β из $\mathcal{N}$) различны, то для некоторого $\gamma \in \mathcal{N}$ ($k \in \mathcal{M}$) пары $\langle i\gamma \rangle, \langle j\gamma \rangle \in \mathcal{G}_f$ и $f(i\gamma) \neq f(j\gamma)$ ($\langle k\alpha \rangle, \langle k\beta \rangle \in \mathcal{G}_f$ и $f(k\alpha) \neq f(k\beta)$).

По функции f, удовлетворяющей условию А, на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ определяются отделимые топологии заданием системы окрестностей $\mathcal{U}(i)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$ всех точек $i \in \mathcal{M}$ и $\alpha \in \mathcal{N}$. Топология в $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ и других прямых произведениях вводится как произведение топологий пространств сомножителей.

Пусть $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$ - целые числа. Для некоторых кортежей $\langle \gamma_1, \ldots \gamma_m \rangle \in \mathcal{N}^m$ длины m и $\langle k_1, \ldots k_n \rangle \in \mathcal{M}^n$ длины n введём функции $f^m = f[\gamma_1, \ldots \gamma_m]$ и $f^n = f[k_1, \ldots k_n]$, сопоставляя точкам $i \in \mathcal{M}$ и $\alpha \in \mathcal{N}$ точки $(f(i\gamma_1), \ldots, f(i\gamma_m)) \in R^{sm}$ и $(f(k_1\alpha), \ldots, f(k_n\alpha)) \in R^{sn}$, если пары $\langle i\gamma_1 \rangle, \ldots, \langle i\gamma_m \rangle$ и $\langle k_1\alpha \rangle, \ldots, \langle k_n\alpha \rangle$ принадлежат $\mathcal{G}_f$. В отношении множеств $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ и исходной функции f будем предполагать выполнение следующих трёх аксиом:

I. Область определения $\mathcal{G}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ множество.

II. Существуют открытые и плотные в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ множества, для

любых точек i и α которых найдутся в $\mathcal{M}^m$ и $\mathcal{M}^n$ такие кортежи длины m и n, что для них соответствующие отображения f^m и f^n некоторых окрестностей $\mathcal{U}(i)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$ в R^{sm} и R^{sn} являются локальными гомеоморфизмами.

Ш. Функция f достаточно гладкая в локальных координатах, описанных в аксиоме П, и плотны в $\mathcal{M}^m$ и $\mathcal{M}^n$ множества таких кортежей длины m и n, для которых соответствующие отображения f^m и f^n имеют ранги sm и sn в точках плотных в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ множеств.

Согласно аксиомам П, Ш, открытые и плотные в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ множества являются гладкими многообразиями размерности sm и sn (лемма 2, § I гл. П). Функцию f, удовлетворяющую условиям аксиомы Ш, будем называть невырожденной.

Введём ещё функцию F, сопоставляя кортежу $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$ длины $m+n+2$ из $\mathcal{M}^{n+1}\times\mathcal{N}^{m+1}$ точку $(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots, f(v\tau))\in R^{s(m+1)(n+1)}$, координаты которой в $R^{s(m+1)(n+1)}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью значений функции f для всех пар его элементов: $\langle i\alpha\rangle, \langle i\beta\rangle, \ldots, \langle v\tau\rangle$, если эти пары принадлежат $\mathcal{G}_f$. Область определения введённой функции обозначим через $\mathcal{G}_F$.

О п р е д е л е н и е I (§ I гл. П). Будем говорить, что функция f задаёт на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$ и порядка s, если, кроме условия А и аксиом I,П,Ш, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IУ. Существует плотное в $\mathcal{G}_F$ множество, для каждого кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$ длины $m+n+2$ которого и некоторой его окрестности $\mathcal{U}(\langle i\ldots\tau\rangle)$ найдётся такая достаточно гладкая функция $\varphi: \mathcal{E}\to R^s$, определённая в некоторой области $\mathcal{E}\subset R^{s(m+1)(n+1)}$, содержащей точку $F(\langle i\ldots\tau\rangle)$, что в ней ранг функции φ равен s и множество $F(\mathcal{U}(\langle i\ldots\tau\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции φ, то есть

$$\varphi(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots, f(v\tau)) = 0$$

для всех кортежей из $\mathcal{U}(\langle i \ldots \tau \rangle)$.

Аксиома IУ составляет содержание принципа феноменологической симметрии в теории физических структур, предложенной Ю.И.Кулаковым /I0, 29/ для классификации физических законов. Уравнения $\varphi = 0$ задают S функциональных связей $(\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_S = 0)$ между $S(m+1)(n+1)$ измеряемыми в опыте значениями физических величин $f = (f^1, \ldots, f^S)$ и являются аналитическим выражением физического закона, записанного в феноменологически инвариантной форме. Условие на ранг функции φ означает, что уравнения $\varphi = 0$ не сводимы друг к другу, то есть независимы. Заметим также, что не всякая функция φ может задавать физический закон, и потому одной из основных задач теории физических структур является перечисление всех возможных феноменологически инвариантных форм физических законов.

Функцию $f = (f^1, \ldots, f^S)$ можно рассматривать как своего рода S-мерную метрику в геометрии двух множеств. Скажем также, что функция f задаёт на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ феноменологически симметричную (Sm, Sn) - мерную геометрию ранга $(n+1, m+1)$.

Преобразования λ и σ множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называются движением, если при них сохраняется функция f, то есть для каждой пары $\langle i\alpha \rangle \in \mathfrak{G}_f$, такой что $\langle \lambda(i), \sigma(\alpha) \rangle \in \mathfrak{G}_f$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \sigma(\alpha)) = f(i\alpha).$$

Множество всех движений есть группа, для которой функция (метрика) f является двухточечным инвариантом.

О п р е д е л е н и е 2 (§ I гл. П). Будем говорить, что функция f задаёт на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ (Sm, Sn) -мерную геометрию, наделённую групповой симметрией степени Smn,

если, кроме условия А и аксиом I,П,Ш, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IУ′. Существуют открытые и плотные в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ множества, для всех точек i и α которых определены эффективные гладкие действия smn-мерной локальной группы Ли в некоторых окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$, такие что действия ее в окрестностях $U(i)$, $U(j)$ и $U(\alpha)$, $U(\beta)$ точек i,j и α,β совпадают в пересечениях $U(i)\cap U(j)$ и $U(\alpha)\cap U(\beta)$ и что функция f является двухточечным инвариантом.

Т е о р е м а I (§ I гл. П). Если функция f задаёт на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ (sm, sn)-мерную геометрию, наделённую групповой симметрией степени smn, то она на тех же множествах задаёт физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$ и порядка s.

Т е о р е м а 2 (§ I гл. П). Если функция f задаёт на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$ и порядка s, то она на тех же множествах задаёт (sm, sn)-мерную геометрию, наделённую групповой симметрией степени smn.

Эквивалентность феноменологической и групповой симметрий (sm sn)-мерной геометрии, задаваемой на двух множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ функцией f, непосредственно вытекает из сформулированных двух теорем.

Основные положения и результаты § I гл. П опубликованы в работах /I4/ для $S = 1$ и /I5/ для $S \geqslant 1$.

В случае $S = 1$ автором /I6/ ранее были найдены все функции f, задающие на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ физические структуры ранга $(n+1, m+1)$. Выпишем здесь их локальные координатные представления с точностью до эквивалентности (замены координат) и переобозначения $\psi(f) \to f$, полагая $m \leq n$:

$m = 1$, $n = 1$:

$$f = x + \xi ;$$

$m = 1$, $n = 2$:

$$f = x\xi + \eta ;$$

$m = 1$, $n = 3$:

$$f = (x\xi + \eta)/(x + \nu);$$

$m = n \geq 2$:

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m ,$$

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m + \xi^m ;$$

$m = n - 1 \geq 2$:

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m + \xi^{m+1} .$$

Для всех остальных пар значений целых чисел m и n физические структуры ранга $(n+1, m+1)$ и порядка I не существуют.

Если функция f известна, то преобразования

$$x' = \lambda(x) , \quad \xi' = \sigma(\xi)$$

множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, составляющие движение, являются решением функционального уравнения

$$f(\lambda(x), \sigma(\xi)) = f(x, \xi) .$$

В §2 гл.II для каждой из перечисленных выше функций f находятся полные локальные группы движений как решения соответствующих уравнений сохранения, причем на функции λ и σ, кроме гладкости,

никакие другие условия (линейность, например, или аналитичность) не налагаются. Оказалось, что каждая из функций f допускает не более чем mn -мерную группу движений, причем группы преобразований множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, составляющие группу движений, эквивалентны только в простейшем случае $m=n=1$. Во всех остальных случаях они оказываются неэквивалентными, даже если $m=n$. Эти результаты были доложены автором на всесоюзной конференции по геометрии "в целом" в 1987 г. /17/ и опубликованы в работе /42/.

Вопросы, связанные с эквивалентностью групп преобразований и играющие особую роль в задаче вычисления двухточечных инвариантов, детально рассматриваются в §3 гл.II. Дело в том, что обычно классификация групп преобразований проводится с точностью до слабой эквивалентности (подобия), которая не всегда равносильна эквивалентности. Обсуждению этих вопросов автор посвятил работу /18/, а также выступление на семинаре памяти Н.В. Ефимова /19/.

В §4 гл.II проводится полная классификация четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости с точностью до эквивалентности. При проведении этой классификации использовались, с одной стороны, классификация вещественных четырехмерных абстрактных алгебр Ли, а с другой, методы и результаты §4 гл.I, поскольку у каждой четырехмерной алгебры имеется трехмерная подалгебра. Полученная классификация сравнивается с соответствующей классификацией С. Ли. Отмечаются их сходство и различие.

Далее в §5 гл.II изучаются групповые свойства физической структуры ранга (3,3), в которой функция f допускает четырехмерную группу движений. Рассматривая функцию f как невырожденный двухточечный инвариант и используя классификацию предыдущего параграфа, автор устанавливает, что существуют два и только два таких инварианта с локальными координатными представлениями $f=x\xi+y\eta$ и $f=x\xi+y+\eta$. Отмечено также, что ни один из этих

инвариантов не может быть получен, если исходить из обычной классификации групп преобразований с точностью до слабой эквивалентности (подобия). Результаты §§ 4 и 5 гл.II опубликованы в работе /20/.

Последний §6 гл.II посвящен изучению групповых свойств физических структур ранга $(n+1,2)$. Устанавливается, что эти структуры существуют только для $n=1,2,3$ и не существуют в случае $n \geqslant 4$, так как максимальная размерность локальных групп преобразований прямой равна трем и двухточечные инварианты при этом вырождаются. Результаты §6 гл.II опубликованы в работе /4I/.

В главах I и II были определены бинарные физические структуры на одном и двух множествах, когда исходная функция f сопоставляет число паре точек. В §I Заключения дается определение произвольных физических структур (бинарных, тернарных и т.д.) и выясняются необходимые условия наделения их групповой симметрией. В частности, устанавливается отсутствие групповых свойств у тернарных физических структур. В §2 Заключения обсуждаются некоторые естественно возникшие вопросы и задачи, а также возможности дальнейшего содержательного обобщения и развития понятия физической структуры.

В последующем изложении функция f называется еще "метрикой", которая понимается в самом общем смысле только как числовая функция пары точек, поэтому выполнение обычных метрических аксиом для нее не подразумевается.

Нумерация формул, определений, лемм и теорем для каждого параграфа своя. При ссылке внутри параграфа указывается только номер. При ссылке на другой параграф той же главы указывается дополнительно параграф (например, (2) из §I), а при ссылке на другую главу указывается еще и глава (например, (2) из §I гл.I).

Г Л А В А П Е Р В А Я

Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии

§ I. Феноменологическая симметрия в геометрии.

Пусть имеется множество $\mathcal{M}$ произвольной природы, точки которого обозначим строчными латинскими буквами, а также функция: $f: \mathcal{G}_f \to R$, где $\mathcal{G}_f \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, сопоставляющая упорядоченной паре $\langle ij \rangle \in \mathcal{G}_f$, некоторое вещественное число $f(ij) \in R$. Функцию f будем иногда называть метрикой, не требуя, однако, её положительной определённости и выполнения обычных метрических аксиом. В общем случае не всякой паре $\langle ij \rangle$ из $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ сопоставляется число, но в дальнейшем удобно в явной записи расстояния $f(ij)$ обычно подразумевать, что $\langle ij \rangle \in \mathcal{G}_f$. Будем предполагать, что выполняется следующее условие:

А. Если две произвольные точки i, j из $\mathcal{M}$ различны, то для некоторого $k \in \mathcal{M}$ либо $\langle ik \rangle, \langle jk \rangle \in \mathcal{G}_f$ и $f(ik) \neq f(jk)$, либо $\langle ki \rangle, \langle kj \rangle \in \mathcal{G}_f$ и $f(ki) \neq f(kj)$.

Смысл условия А состоит, прежде всего, в том, что рассматриваются только такие свойства пространства $\mathcal{M}$, которые выражаются посредством функции f.

По метрике f, удовлетворяющей условию А, на множестве $\mathcal{M}$ можно определить отделимую топологию. Пусть i – произвольная точка из $\mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathcal{M}$. Если $\langle ik \rangle \in \mathcal{G}_f$ ($\langle ki \rangle \in \mathcal{G}_f$), то через $\overline{\mathcal{U}}(i; \varepsilon, k)$ ($\overline{\overline{\mathcal{U}}}(i; \varepsilon, k)$) обозначим множество всех тех точек $i' \in \mathcal{M}$, для которых $\langle i'k \rangle \in \mathcal{G}_f$ ($\langle ki' \rangle \in \mathcal{G}_f$) и имеет место неравенство $|f(i'k) - f(ik)| < \varepsilon$ ($|f(ki') - f(ki)| < \varepsilon$). Если же $\langle ik \rangle \notin \mathcal{G}_f$ ($\langle ki \rangle \notin \mathcal{G}_f$), то под $\overline{\mathcal{U}}(i; \varepsilon, k)$ ($\overline{\overline{\mathcal{U}}}(i; \varepsilon, k)$) будем понимать всё множество $\mathcal{M}$. Обозначим через $\mathcal{U}(i; \varepsilon, k)$ пересечение множеств $\overline{\mathcal{U}}(i; \varepsilon, k)$ и $\overline{\overline{\mathcal{U}}}(i; \varepsilon, k)$. Пусть, далее, $\widetilde{\mathcal{M}}$ – конечное множество из $\mathcal{M}$ и $\mathcal{U}(i; \varepsilon, \widetilde{\mathcal{M}})$ – пересечение всех $\mathcal{U}(i; \varepsilon, k)$, где $k \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Семейство $\mathcal{U}(i; \varepsilon, \widetilde{\mathcal{M}})$ для произвольных конечных множеств $\widetilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ и любых значений положительного числа ε принимается за фундаментальную систему окрестностей точки $i \in \mathcal{M}$. Ясно, что точка

i принадлежит каждому множеству $\mathcal{U}(i;\varepsilon,\widetilde{\mathcal{M}})$ и пересечение $\mathcal{U}(i;\varepsilon_1,\widetilde{\mathcal{M}}$ и $\mathcal{U}(i;\varepsilon_2,\widetilde{\mathcal{M}}_2)$ содержит множество $\mathcal{U}(i;\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2),\widetilde{\mathcal{M}}_1\cup\widetilde{\mathcal{M}}_2)$. Окрестностью $\mathcal{U}(i)$ точки i будем называть всякое подмножество из $\mathcal{M}$, содержащее некоторую окрестность $\mathcal{U}(i;\varepsilon,\widetilde{\mathcal{M}})$ этой точки из фундаментальной системы.

Л е м м а I. Введённое для каждой точки $i\in\mathcal{M}$ семейство множеств $\mathcal{U}(i)$ удовлетворяет всем аксиомам системы окрестностей и определяет на множестве $\mathcal{M}$ отделимую в смысле Хаусдорфа топологию.

В самом деле, во-первых, всякое подмножество множества $\mathcal{M}$, содержащее окрестность $\mathcal{U}(i)$, также является окрестностью точки i. Во-вторых, пересечение конечного числа окрестностей некоторой точки есть окрестность той же точки. В-третьих, точка i принадлежит каждой своей окрестности $\mathcal{U}(i)$. Выполнение этих трёх аксиом непосредственно следует из определения системы множеств $\mathcal{U}(i)$. Докажем теперь четвёртую аксиому, согласно которой любая окрестность $\mathcal{U}(i)$ содержит такое множество $\mathcal{U}_1(i)$, что $\mathcal{U}(i)$ является окрестностью для каждой точки из $\mathcal{U}_1(i)$. Пусть $\mathcal{U}(i)$ содержит окрестность $\mathcal{U}(i;\varepsilon,\widetilde{\mathcal{M}})$ из фундаментальной системы. В качестве $\mathcal{U}_1(i$ возьмём множество $\mathcal{U}(i;\varepsilon_1,\widetilde{\mathcal{M}})$, где $\varepsilon_1<\varepsilon$. Рассмотрим у каждой точки $i'\in\mathcal{U}_1(i)$ окрестность $\mathcal{U}_2(i')=\mathcal{U}(i';\varepsilon_2,\widetilde{\mathcal{M}})$, где $\varepsilon_2=\varepsilon-\varepsilon_1$. Покажем, что точка i' входит в $\mathcal{U}(i)$ вместе со своей окрестностью $\mathcal{U}_2(i')$. Пусть $i''\in\mathcal{U}_2(i')$. Если $\langle ik\rangle\in\mathcal{G}_f$ ($\langle ki\rangle\in\mathcal{G}_f$) для некоторого $k\in\widetilde{\mathcal{M}}$, то $\langle i'k\rangle,\langle i''k\rangle\in\mathcal{G}_f$ ($\langle ki'\rangle,\langle ki''\rangle\in\mathcal{G}_f$) и потому выполняется неравенство $|f(i''k)-f(ik)|<\varepsilon$ ($|f(ki'')-f(ki)|<\varepsilon$), означающее, что $i''\in\overline{\mathcal{U}}(i;\varepsilon,k)$ ($i''\in\overline{\overline{\mathcal{U}}}(i;\varepsilon,k)$). Если же $\langle ik\rangle\notin\mathcal{G}_f$ ($\langle ki\rangle\notin\mathcal{G}_f$), то тем более $i''\in\overline{\mathcal{U}}(i;\varepsilon,k)$ ($i''\in\overline{\overline{\mathcal{U}}}(i;\varepsilon,k)$), поскольку тогда по определению $\overline{\mathcal{U}}(i;\varepsilon,k)=\mathcal{M}$ ($\overline{\overline{\mathcal{U}}}(i;\varepsilon,k)=\mathcal{M}$). Таким образом $i''\in\mathcal{U}(i;\varepsilon,\widetilde{\mathcal{M}})\subset\mathcal{U}(i)$, то есть $\mathcal{U}_2(i')\subset\mathcal{U}(i)$, и четвёртая, последняя, аксиома системы окрестностей также выполняется. Отделимость же по Хаусдорфу опреде-

лённой на $\mathcal{M}$ топологии можно доказать следующим образом. Если $i \neq j$, то по условию А найдётся такое $k \in \mathcal{M}$, что либо $f(ik) \neq f(jk)$, либо $f(ki) \neq f(kj)$. Пусть для определённости имеет место первое неравенство. Положим $|f(ik) - f(jk)| = 3\varepsilon$ и рассмотрим у точек i и j окрестности $U(i) = U(i;\varepsilon,k)$ и $U(j) = U(j;\varepsilon,k)$. Эти окрестности не пересекаются, так как, в противном случае, получим неравенство $|f(ik) - f(jk)| \leq |f(ik) - f(i'k)| + |f(i'k) - f(jk)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, где $i' \in U(i) \cap U(j)$, то есть $|f(ik) - f(jk)| < 2\varepsilon$, что противоречит исходному определению ε, из которого следует неравенство $|f(ik) - f(jk)| > 2\varepsilon$. Лемма I доказана.

В дальнейшем под $U(i)$ будем понимать открытую окрестность точки $i \in \mathcal{M}$. Топологии в $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ и других прямых произведениях вводятся обычным образом как произведения топологий пространств-сомножителей. Окрестность пары $\langle ij \rangle \in \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, например, будем обозначать через $U(\langle ij \rangle)$. В $\mathcal{G}_f$ будем рассматривать топологию, индуцированную из $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$.

Пусть $n \geq 1$ - целое число. Для некоторого кортежа $\langle k_1, \ldots k_n \rangle$ длины n из $\mathcal{M}^n$ введём функцию $\overline{f}^n = f[k_1, \ldots k_n]$ ($\overline{\overline{f}}^n = \overline{\overline{f}}[k_1, \ldots k_n]$, сопоставляя точке $i \in \mathcal{M}$ точку $(f(ik_1), \ldots, f(ik_n)) \in R^n$ ($(f(k_1 i), \ldots f(k_n i)) \in R^n$), если $\langle ik_1 \rangle, \ldots, \langle ik_n \rangle \in \mathcal{G}_f$ ($\langle k_1 i \rangle, \ldots, \langle k_n i \rangle \in \mathcal{G}_f$). Заметим, что области определений функций $\overline{f}^n$ и $\overline{\overline{f}}^n$ могут не совпадать с множеством $\mathcal{M}$. В отношении пространства $\mathcal{M}$ и исходной функции f будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. Область определения $\mathcal{G}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ множество.

II. Существует открытое и плотное в $\mathcal{M}$ множество, для каждой точки i которого найдётся в $\mathcal{M}^n$ такой кортеж длины n, что для него либо отображение $\overline{f}^n$, либо отображение $\overline{\overline{f}}^n$ некоторой её окрестности $U(i)$ в R^n является локальным гомеоморфизмом.

Согласно аксиоме II, открытое и плотное в $\mathcal{M}$ множество является n-мерным топологическим многообразием, в котором локальные

координаты можно определить с помощью отображений $\bar{f}^n$ или $\bar{\bar{f}}^n$.

Ш. Функция f достаточно гладкая в локальных координатах, описанных в аксиоме П, и плотно в $\mathcal{M}^n$ множество таких кортежей длины n, для которых отображение $\bar{f}^n$ ($\bar{\bar{f}}^n$) имеет ранг n в точках плотного в $\mathcal{M}$ множества.

Достаточная гладкость означает, что в указанных координатах непрерывна сама функция f и непрерывны все её производные достаточно высокого порядка. Функцию f, удовлетворяющую условиям аксиомы Ш, будем называть невырожденной, так как эти условия, в некотором смысле, аналогичны условию невырожденности билинейной скалярной функции в конечномерном векторном пространстве.

Заметим, что ограничения в аксиомах I,П,Ш открытыми и плотными в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ множествами связано с тем, что в интересующих нас приложениях множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ могут содержать исключительные подмножества меньшей размерности, где условия этих аксиом нарушаются.

Л е м м а 2. Существует открытое и плотное в $\mathcal{M}$ множество, для каждой точки которого любые две описанные в аксиоме П системы координат, определённые в этой точке, гладко связаны в некоторой её окрестности.

Действительно, пусть $\langle k_1,\dots k_n\rangle \in \mathcal{M}^n$ такой кортеж длины n, для которого, согласно аксиоме Ш, отображение $\bar{f}^n = f[k_1,\dots k_n]$ ($\bar{\bar{f}}^n = \bar{\bar{f}}[k_1,\dots k_n]$) имеет ранг n в точках плотного в $\mathcal{M}$ множества. Тогда для каждой точки i этого множества с помощью отображения $\bar{f}^n$ (или $\bar{\bar{f}}^n$) можно ввести локальные координаты. Поскольку такие координаты гладко связаны с любыми локальными координатами, описанными в аксиоме П, эти последние гладко связаны между собой в некоторой окрестности $\mathcal{U}(i)$. Лемма доказана.

Таким образом, локальные координаты, описанные в аксиоме П, задают на некотором открытом и плотном в $\mathcal{M}$ множестве структуру гладкого n-мерного многообразия. Из аксиом I,П,Ш и леммы 2 следует, что

в $\mathcal{G}_f$ существует множество, открытое и плотное в $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, для каждой пары которого функция f достаточно гладкая и любые локальные координаты в точках которого гладко связаны. Ограничим в дальнейшем область определения функции этим множеством, используя для него прежнее обозначение $\mathcal{G}_f$.

Пусть, далее, $m = n+2 \geq 3$. Введём ещё функцию F, сопоставляя кортежу $\langle ijk,\ldots,vw\rangle$ длины m из $\mathcal{M}^m$ точку $(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) \in R^{m(m-1)/2}$, координаты которой в $R^{m(m-1)/2}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью значений функции f для всех пар его элементов: $\langle ij\rangle, \langle ik\rangle, \ldots, \langle vw\rangle$, если эти пары принадлежат $\mathcal{G}_f$. Область определения введённой функции обозначим через $\mathcal{G}_F$. Эта область есть, очевидно, открытое и плотное в $\mathcal{M}^m$ множество.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что функция f задаёт на множестве $\mathcal{M}$ феноменологически симметричную n-мерную геометрию расстояний ранга $m = n+2$, если, кроме условия А и аксиом I,П,Ш, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IУ. Существует плотное в $\mathcal{G}_F$ множество, для каждого кортежа $\langle ijk,\ldots,vw\rangle$ длины $m = n+2$ которого и некоторой его окрестности $\mathcal{U}(\langle ijk,\ldots,vw\rangle)$ найдётся такая достаточно гладкая функция $\varphi: \mathcal{E} \to R$, определённая в некоторой области $\mathcal{E} \subset R^{m(m-1)/2}$, содержащей точку $F(\langle ijk,\ldots,vw\rangle)$, что в ней $grad\,\varphi \neq 0$ и множество $F(\mathcal{U}(\langle ijk,\ldots,vw\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции φ, то есть

$$\varphi(f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)) = 0 \qquad (1)$$

для всех кортежей из $\mathcal{U}(\langle ijk,\ldots,vw\rangle)$.

Аксиома IУ составляет содержание принципа феноменологической симметрии в теории физических структур, предложенной Ю.И.Кулаковым /IO/ для классификации физических законов. Эта аксиома выражает собой требование, чтобы $m(m-1)/2$ упорядоченных расстояний между точками любого кортежа длины $m = n+2$ из $\mathcal{U}(\langle ijk,\ldots,vw\rangle)$ были

функционально связаны, то есть удовлетворяли некоторому уравнению (I), задающему аналитическое выражение физического закона. В этом законе расстояние $f(ij)$, например, есть результат измерения физической величины f для объектов i и j из $\mathcal{M}$. Условие же $grad\ \varphi \neq 0$, входящее в аксиому IУ, означает просто, что функциональная связь (I) нетривиальна.

Заметим, что в n -мерном пространстве попарные расстояния для $n+2$ точек могут быть связаны более чем одной существенной зависимостью при специальном их расположении, как это видно на примере $n+2$ точек евклидового пространства, лежащих в одной гиперплоскости. Для исключения таких особых конфигураций точек мы и ограничили наше рассмотрение открытым и плотным в Θ_F множеством.

Пусть $x = (x^1, \ldots, x^n)$ локальные координаты в множестве $\mathcal{M}$. Для исходной функции f в некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ каждой пары $\langle ij \rangle \in \Theta_f$ получаем тогда локальное координатное представлени

$$f(ij) = f(x(i), x(j)) =$$

$$= f(x^1(i), \ldots, x^n(i), x^1(j), \ldots, x^n(j)), \qquad (2)$$

свойства которого определяются аксиомой Ш. Координаты $x(i)$ и $x(j)$ входят в представление (2) существенным образом. Последнее означает, что никакая локально обратимая гладкая замена координат не приведёт к уменьшению их числа, то есть представление (2) для функции f нельзя записать в каких-либо координатах в виде $f(ij) = f(x^1(i), \ldots, x^{n'}(i), x^1(j), \ldots, x^{n''}(j))$,где или $n' < n$, или $n'' < n$. Действительно, если, например, $n' < n$, то для любого кортежа $\langle j_1 \ldots j_n \rangle$ длины n из $(U(j))^n$ и для любой точки из $U(i)$ранг отображения $\bar{f}^n = \bar{f}[j_1 \ldots j_n]$ будет меньше n , что противоречит аксиоме Ш

Используя представление (2), запишем локальное координатное задание функции F :

$$\left.\begin{aligned} f(ij) &= f(x(i), x(j)), \\ f(ik) &= f(x(i), x(k)), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(vw) &= f(x(v), x(w)). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Задание (3) для F представляет собой систему $m(m-1)/2$ функций $f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)$, зависящих специальным образом от mn координат $x^1(i), \ldots, x^n(i), \ldots, x^1(w), \ldots, x^n(w)$ всех точек кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$ длины $m = n+2$. Поскольку число функций в системе (3) не больше общего числа координат, наличие связи (I) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольных функций.

Функция F, в соответствии с её координатным заданием (3), отображает область $\mathcal{G}_F$ в $R^{m(m-1)/2}$. Функциональной матрицей этого отображения является матрица Якоби системы функций (3), имеющая $m(m-1)/2$ строк и mn столбцов:

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f(ij)}{\partial x^1(i)} & \cdots & \dfrac{\partial f(ij)}{\partial x^n(j)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial f(vw)}{\partial x^1(v)} & \cdots & \dfrac{\partial f(vw)}{\partial x^n(w)} \end{matrix} \right\| . \qquad (4)$$

Рангом отображения F, как известно, называется ранг соответствующей функциональной матрицы, то есть матрицы (4).

Т е о р е м а. Для того, чтобы функция f, удовлетворяющая условию А и аксиомам I,П,Ш, задавала на множестве $\mathcal{M}$ феноменологически симметричную n-мерную геометрию расстояний ранга $m = n+2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $m(m-1)/2-1$ на плотном в $\mathcal{G}_F$ множестве.

Докажем сначала необходимость. Согласно аксиоме IУ, в любой окрестности произвольного кортежа из $\mathcal{G}_F$ найдётся такой кортеж

$\langle ijk,,,vw\rangle$ и такая его окрестность $U(\langle ijk,,,vw\rangle)$, что множество значений $F(U(\langle ijk,,,vw\rangle))$ будет удовлетворять уравнению (I), причём $grad\varphi \neq 0$ в точке $F(\langle ijk,,,vw\rangle)$. Поскольку функция φ достаточно гладкая, можно без ограничения общности считать, что $grad\varphi \neq 0$ для всех точек области её определения и, конечно же, на множестве значений $F(U(\langle ijk,,,vw\rangle))$. Но тогда множество нулей функции φ, но не обязательно множество $F(U(\langle ijk,,,vw\rangle))$, будет неособой гиперповерхностью в $E \subset R^{m(m-1)/2}$ размерности $m(m-1)/2-1$. Продифференцируем уравнение (I) по каждой из mn координат $x^1(i),,,,$ $x^n(i),,,,$ $x^1(w),,,,x^n(w)$ точек кортежа $\langle ijk,,,vw\rangle$. В результате получаем mn линейных однородных уравнений относительно $m(m-1)/2$ производных функции φ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial f(ij)}\cdot\frac{\partial f(ij)}{\partial x^1(i)}+,,,+\frac{\partial\varphi}{\partial f(iw)}\cdot\frac{\partial f(iw)}{\partial x^1(i)}=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial f(iw)}\cdot\frac{\partial f(iw)}{\partial x^n(w)}+,,,+\frac{\partial\varphi}{\partial f(vw)}\cdot\frac{\partial f(vw)}{\partial x^n(w)}=0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Матрица системы уравнений (5) совпадает с транспонированной матрицей (4). Поскольку $grad\varphi \neq 0$, уравнения (5) имеют, по крайней мере, одно ненулевое решение в окрестности $U(\langle ijk,,,vw\rangle)$. Поэтому ранг матрицы (4) не может быть равен своему максимально возможному значению $m(m-1)/2$ для какого-то кортежа из $U(\langle ijk,,,vw\rangle)$, так как система (5) имела бы тогда только нулевое решение в некоторой окрестности этого кортежа. С другой стороны, как мы покажем ниже, в матрице (4) имеется минор порядка $m(m-1)/2-1$, не обращающийся в нуль всюду по условию аксиомы Ш. В самом деле, выделим в ней квадратную ступенчатую подматрицу, диагональными клетками которой являются следующие квадратные матрицы Якоби: для n функций $f(ik),,,f(iw)$ по n переменным $x(i)$, для n функций $f(jk),,,,$

$f(jw)$ по n переменным $x(j)$, для $n-1$ функций $f(kl),\ldots,f(kw)$ по некоторым $n-1$ переменным из $x(k),\ldots$, для функции $f(vw)$ по некоторой переменной из $x(v)$. Поскольку по условию аксиомы Ш в матрице отображения $\frac{\partial F^n}{\partial x^j}$ обязательно найдётся минор любого порядка $\leq n$, который не обращается в нуль всюду, ранг выделенной выше ступенчатой подматрицы для некоторого кортежа окажется равным $n+n+n-1+\ldots+1=(n^2+3n)/2=m(m-1)/2-1$, где $m=n+2$. Таким образом, ранг матрицы (4) для некоторого кортежа $\langle i_1,\ldots,w_1\rangle$ из любой окрестности $V(\langle i,\ldots,w\rangle)\subset U(\langle i,\ldots,w\rangle)$ будет равен $m(m-1)/2-1$. Ранг отображения F есть ранг функциональной матрицы (4) и потому для кортежа $\langle i_1,\ldots,w_1\rangle$ равен $m(m-1)/2-1$. Легко понять, что множество таких кортежей плотно в $\mathfrak{S}_F$, также как плотно в $\mathfrak{S}_F$ множество кортежей $\langle ijk,\ldots,vw\rangle$, о которых говорится в аксиоме IУ. Заметим, что для некоторой области $\mathcal{E}_1\subset\mathcal{E}$ и некоторой окрестности $U(\langle i_1,\ldots,w_1\rangle)$ множество значений $F(U(\langle i_1,\ldots,w_1\rangle))$ не только является подмножеством множества нулей функции φ, но и совпадает с ним.

Перейдём к доказательству достаточности. Пусть для некоторого кортежа $\langle ijk,\ldots,vw\rangle$ из плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества ранг отображения F, задаваемого системой функций (3), равен $m(m-1)/2-1$. Прежде всего убедимся в том, что ни для одного кортежа из $\mathfrak{S}_F$ ранг матрицы (4) не равен своему максимально возможному значению $m(m-1)/2$. Действительно, если для некоторого кортежа из $\mathfrak{S}_F$ ранг матрицы (4), то есть ранг отображения F, окажется равным $m(m-1)/2$, то он, в силу гладкости функций системы (3), будет равен тому же максимально возможному значению и в некоторой его окрестности $U\subset\mathfrak{S}_F$. Но тогда в этой окрестности не найдётся ни одного кортежа, для которого ранг отображения F был бы равен $m(m-1)/2-1$, что противоречит условию доказываемой теоремы. Следовательно, существует такая окрестность исходного кортежа $\langle i,\ldots,w\rangle$, в которой ранг матрицы Якоби (4) для системы функций (3) не больше $m(m-1)/2-1$

и равен для него этому значению. По теореме о функциональной зависимости для некоторой окрестности $U(<i,,,w>)$ существует такая достаточно гладкая функция $\varphi: \mathcal{E} \to R$, определённая в некоторой области $\mathcal{E} \subset R^{m(m-1)/2}$, содержащей точку $F(<i,,,w>)$, в которой $grad\,\varphi \neq 0$, что множество $F(U(<i,,,w>))$ является подмножеством множества нулей функции Φ , то есть имеет место уравнение (I) для всех кортежей из $U(<i,,,w>)$. Ясно также, поскольку ранг матрицы (4) для исходного кортежа $<ijk,,,vw>$ равен $m(m-1)/2-1$ что существует такая его окрестность $V \subset U$ и такая область $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ что множество $F(V)$ совпадает с множеством нулей функции Φ в $\mathcal{E}_1$ являясь неособой гиперповерхностью размерности $m(m-1)/2-1$ Теорема полностью доказана.

§ 2. Групповая симметрия в геометрии и её эквивалентность феноменологической симметрии.

Пусть λ взаимно однозначное отображение множества $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ на множество $\mathcal{U}' \subset \mathcal{M}$. Преобразование

$$\lambda : \mathcal{U} \to \mathcal{U}' \qquad (1)$$

называется д в и ж е н и е м, если при нём сохраняется метрика f. Последнее означает, что для каждой пары $\langle ij \rangle \in \mathcal{G}_f$, такой что $i, j \in \mathcal{U}$ и $\langle i'j' \rangle \in \mathcal{G}_f$, где $i' = \lambda(i) \in \mathcal{U}'$, $j' = \lambda(j) \in \mathcal{U}'$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(ij) \qquad (2)$$

Множество всех движений (I) есть группа, для которой метрика f, согласно равенству (2), является д в у х т о ч е ч н ы м и н в а р и а н т о м. Если метрика f известна, то равенство (2) представляет собой уравнение относительно функции λ. Например, для симплектической плоскости с $f(ij) = x(i)y(j) - x(j)y(i)$ уравнение (2) имеет решение $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$, причём $ad - bc = 1$ (см. § 3). Нам же о метрике f известно только, что она невырождена и феноменологически инвариантна, то есть удовлетворяет некоторому уравнению (I) из § I. Но этого оказывается достаточно для установления факта существования группы движений (I) с $n(n+1)/2$ параметрами.

Для большей ясности последующего изложения воспроизведём в наших обозначениях определение локальной группы Ли преобразований, следуя монографии Л.С.Понтрягина "Непрерывные группы" (см. /22/, с. 435).

Пусть $\mathcal{G}^r$ – r-мерная локальная группа Ли и $\mathcal{U}$ – некоторая область n-мерного многообразия $\mathcal{M}$. Допустим, что каждому элементу $a \in \mathcal{G}^r$ поставлено в соответствие непрерывно зависящее от a

гомеоморфное отображение λ_a области $\mathcal{U}$ на некоторую область $\mathcal{U}'$ многообразия $\mathcal{M}$, относящее элементу $i \in \mathcal{U}$ некоторый элемент $i' \in \mathcal{U}'$: $i' = \lambda_a(i) = \lambda(i,a)$. Мы будем говорить, что $\mathcal{G}^r$ есть л о к а л ь н а я г р у п п а Л и п р е о б р а з о в а н и й области $\mathcal{U}$, если выполнены следующие условия: I) единице e группы $\mathcal{G}^r$ соответствует тождественное отображение $\lambda(i,e) = i$ области $\mathcal{U}$ на себя и $\lambda(\lambda(i,a),b) = \lambda(i,ab)$, то есть произведению элементов соответствует произведение преобразований; 2) два преобразования λ_a и λ_b совпадают только тогда, когда $a = b$. Иначе это условие можно формулировать, потребовав, чтобы преобразование λ_a было тождественным лишь при условии, что a есть единица e группы $\mathcal{G}^r$; 3) в координатной форме $\lambda(i,a)$ есть достаточное число раз дифференцируемая функция точки $i \in \mathcal{U}$ и элемента $a \in \mathcal{G}^r$.

Определённая выше группа преобразований эффективна, поэтому элементы группы $\mathcal{G}^r$ сами могут считаться преобразованиями. То есть можно говорить о r-мерной локальной группе Ли локальных преобразований многообразия $\mathcal{M}$, которую обозначим через $\mathcal{G}^r(\lambda)$. Таким образом в области $\mathcal{U}$ определено эффективное действие группы $\mathcal{G}^r$, причём все условия определения выполняются для некоторой её части, то есть некоторой, зависящей от $\mathcal{U}$, окрестности единичного элемента e.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что функция f задаёт на множестве $\mathcal{M}$ n-мерную геометрию расстояний, наделённую групповой симметрией степени $n(n+1)/2$, если, кроме условия А и аксиом I,П,Ш из § I, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IУ'. Существует открытое и плотное в $\mathcal{M}$ множество, для каждой точки i которого определено эффективное гладкое действие $n(n+1)/2$-мерной локальной группы Ли в некоторой окрестности $\mathcal{U}(i)$, такое что действия ее в окрестностях $\mathcal{U}(i)$, $\mathcal{U}(j)$

двух точек i , j совпадают в пересечении $\mathcal{U}(i) \cap \mathcal{U}(j)$, и что функция f является двухточечным инвариантом.

Группы преобразований, о которых говорится в аксиоме IУ', определяют локальную подвижность "твёрдых тел" в n-мерном пространстве $\mathcal{M}$, такую же как у твёрдых тел в евклидовом пространстве. Заметим однако, что глобальной подвижности при этом может и не быть как нет её у евклидовой плоскости с двумя выколотыми точками. Действительно, хотя локальные действия группы Ли определены, согласно аксиоме IУ', в некоторой окрестности каждой точки открытого и плотного в $\mathcal{M}$ множества, может оказаться, что на всём этом множестве действует только единичный элемент группы. Будем говорить также, что метрика f **допускает** локальную группу локальных движений с $n(n+1)/2$ степенями свободы. Однако в общем случае такие движения заданы не для всякой пары из $\mathcal{O}_f$. Возможен и такой случай, когда для некоторой пары (например, диагональной) движения заданы, в то время как сама пара не принадлежит $\mathcal{O}_f$. Множество пар, для которых функция f определена и является двухточечным инвариантом, очевидно, открыто и плотно в $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$.

Согласно аксиоме IУ', на открытом и плотном в $\mathcal{M}$ множестве задано $n(n+1)/2$-мерное линейное семейство гладких векторных полей X , замкнутое относительно операции коммутирования, то есть алгебра Ли локальных преобразований (см. /22/, § 60). В некоторой локальной системе координат базисные векторные поля этого семейства запишем в операторной форме:

$$X_\omega = \lambda^\mu_\omega(x)\,\partial/\partial x^\mu , \qquad (3)$$

где $\omega = 1, \ldots, n(n+1)/2$ и по "немому" индексу μ производится суммирование в пределах от 1 до n. По инфинитезимальному критерию инвариантности (см. /23/, § I7, с.229; /24/, § I7, с.77)функция $f(ij)$ будет инвариантом локальной группы Ли преобразований

некоторой окрестности $\mathcal{U}(i)\times\mathcal{U}(j)$, то есть двухточечным инвариантом, в том и только в том случае, если она удовлетворяет системе уравнений

$$X_\omega(i)\,f(ij)+X_\omega(j)\,f(ij)=0$$

с операторами (3):

$$\lambda^\mu_\omega(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(i)}+\lambda^\mu_\omega(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x^\mu(j)}=0. \qquad (4)$$

Если векторное поле X ненулевое, то в области его задания есть хотя бы одна точка, в которой оно отлично от нуля. Однако в других точках этой области оно может обращаться в нуль. Если же для соответствующей группы Ли преобразований невырожденная метрика f является двухточечным инвариантом, то имеет место следующая лемма.

Л е м м а I. Множество точек, где ненулевое векторное поле линейного семейства, удовлетворяющего аксиоме IУ′, отлично от нуля, открыто и плотно в $\mathcal{M}$.

Предположим противное. Пусть ненулевое векторное поле $X=a^\omega X_\omega$, где a^ω , $\omega=1,\dots,n(n+1)/2$ постоянные, не все равные нулю одновременно, в некоторой окрестности $\mathcal{U}(i)$ точки i обращается в нуль тождественно. Поскольку поле X ненулевое, в какой-то другой точке j , а значит и в некоторой её окрестности $\mathcal{U}(j)$,оно отлично от нуля. Поскольку $\mathcal{O}_f$ открыто и плотно в $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$,можно считать, что пара $\langle ij\rangle$ принадлежит $\mathcal{O}_f$. Тогда, согласно аксиоме IУ′, функция $f(ij)$ будет двухточечным инвариантом, являясь решением системы уравнений (4). Поскольку по предположению $X(i)=a^\omega X_\omega(i)=0$, $X(j)=a^\omega X_\omega(j)\neq 0$, следствием $n(n+1)/2$ уравнений (4) будет уравнение

$$a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(j)\,\partial f(ij)/\partial x^{\mu}(j) = 0, \qquad (4')$$

в которое входят производные только по координатам точки j и от этих же только координат зависят коэффициенты уравнения $a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(j)$, причём, по крайней мере, один из них отличен от нуля. Уравнение $(4')$, следовательно, может быть решено методом характеристик. Система уравнений характеристик для него имеет не более $n-1$ независимых интегралов, и потому общее решение уравнения $(4')$ будет:

$$f(ij) = f_1(x^1(i), \ldots, x^n(i), \psi^1(j), \ldots, \psi^{n'}(j)),$$

причём $n' < n$. В полученное выражение для метрики $f(ij)$ координаты $x^1(j), \ldots, x^n(j)$ входят несущественным образом через n' функций $\psi^1(j), \ldots, \psi^{n'}(j)$, что противоречит условию аксиомы Ш из § I. Таким образом, в окрестности $\mathcal{U}(i)$ обязательно найдётся точка, где исходное векторное поле X отлично от нуля. Поскольку область определения поля X открыта и плотна в $\mathcal{M}$, множество точек, где оно отлично от нуля плотно и, очевидно, открыто в $\mathcal{M}$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. Множество точек, где базисные векторные поля $X_{\omega}, \omega = 1, \ldots, n(n-1)/2$ линейного семейства, удовлетворяющего аксиоме IУ′, одновременно отличны от нуля, открыто и плотно в $\mathcal{M}$.

Следствие вытекает из того, что по доказанной выше лемме каждое векторное поле X_{ω} отлично от нуля на открытом и плотном в $\mathcal{M}$ множестве, пересечение же конечного числа таких множеств открыто и плотно в $\mathcal{M}$.

Т е о р е м а I . Для того, чтобы функция f , удовлетворяющая условию А и аксиомам I,П,Ш из § I, задавала на множестве $\mathcal{M}$ n -мерную геометрию расстояний, наделённую групповой симметрией степени $n(n+1)/2$, необходимо и достаточно, чтобы ранг отображения F был равен $m(m-1)/2 - 1$ на плотном в $\mathcal{G}_F$ множестве.

Докажем сначала необходимость. Пусть $\langle ijk\ldots vw\rangle$ такой кортеж длины $m = n+2$, что точки $i, j, k, \ldots, v, w$ принадлежат открытому и плотному в $\mathcal{M}$ множеству, о котором говорится в аксиоме IУ′ определения. Ясно, что множество таких кортежей открыто и плотно в $\mathcal{M}^m$, а его пересечение с $\mathcal{G}_F$ открыто и плотно в $\mathcal{G}_F$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\langle ijk\ldots vw\rangle \in \mathcal{G}_F$. По условиям теоремы и аксиомы IУ′ существуют такие окрестности $U(i), \ldots, U(w)$ точек этого кортежа, что $n(n+1)/2$ -мерные локально изоморфные группы их преобразований сохраняют все функции $f(ij), f(ik), \ldots, f(vw)$. Рассмотрим далее произвольную m -точечную фигуру, соответствующую некоторому кортежу длины m из окрестности $(U(i) \times \ldots \times U(w)) \cap \mathcal{G}_F$. Движение этой фигуры как "твёрдого тела" означает, что при изменении координат её точек все $m(m-1)/2$ расстояний в ней, определяемые системой функций (3) из § I, сохраняются, то есть являются двухточечными инвариантами. Инвариантность функций (3) из § I при локальных преобразованиях, задаваемых векторными полями $X = \lambda^\mu(x)\,\partial/\partial x^\mu$ в окрестностях $U(i), \ldots, U(w)$, означает, что эти функции удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^{\mu}(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial x^{\mu}(i)} + \lambda^{\mu}(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x^{\mu}(j)} = 0,\\
&\lambda^{\mu}(i)\frac{\partial f(ik)}{\partial x^{\mu}(i)} + \lambda^{\mu}(k)\frac{\partial f(ik)}{\partial x^{\mu}(k)} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda^{\mu}(v)\frac{\partial f(vw)}{\partial x^{\mu}(v)} + \lambda^{\mu}(w)\frac{\partial f(vw)}{\partial x^{\mu}(w)} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Система (5) при известной функции f может быть рассмотрена как система $m(m-1)/2$ линейных однородных уравнений относительно mn компонент векторных полей X в некоторых окрестностях точек $i,j,k,\ldots,v,w$. Заметим, что матрица этой системы совпадает с функциональной матрицей (4) из §I отображения F . Алгебры Ли векторных полей X $n(n+1)/2$ -мерны, так как такую размерность имеют по условию теоремы локальные группы Ли преобразований окрестностей $U(i),\ldots,U(w)$. Система (5), следовательно, имеет решение:

$$\lambda^{\mu}(i) = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i),\ \ldots,\ \lambda^{\mu}(w) = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(w), \qquad (6)$$

где a^{ω} - произвольные числа и суммирование по "немому" индексу ω производится в пределах от I до $n(n+1)/2$, причем функции λ^{μ}_{ω} линейно независимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами.

Таким образом, система (5) имеет $n(n+1)/2$ линейно независимых с постоянными коэффициентами решений. Эти решения можно получить из решения (6), беря соответствующее число линейно независимых векторов $(a^1, a^2, \ldots, a^{n(n+1)/2})$, например, $(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)$.

Покажем, что $n(n+1)/2$ линейно независимых с постоянными

коэффициентами решений системы (5) будут также линейно независимы и с переменными коэффициентами, то есть в общем смысле.

Предположим противное. Пусть найдутся такие переменные коэффициенты C^ω, $\omega = 1,\dots,n(n+1)/2$, что имеют место следующие mn соотношений:

$$C^\omega \lambda^\mu_\omega(i) = 0,\ C^\omega \lambda^\mu_\omega(j) = 0, \dots, C^\omega \lambda^\mu_\omega(w) = 0, \tag{7}$$

вытекающие из линейной зависимости в общем смысле тех решений из решения (6), которые с постоянными коэффициентами линейно независимы. Коэффициенты линейной зависимости C^ω есть решения системы уравнений (7) и, по предположению, являются некоторыми функциями координат точек кортежа $\langle ijk \dots vw \rangle$, одновременно тождественно в нуль не обращающимися. Заметим, что система (7) не обязательно имеет ненулевое решение, так как в ней число уравнений больше числа неизвестных. Рассмотрим движение произвольной фигуры $\langle k \dots vw \rangle$, содержащей n точек, и фигуры $\langle jk \dots vw \rangle$, содержащей $n+1$ точку. Переход от первой фигуры ко второй состоит в добавлении точки j. Поскольку движение сохраняет n функций $f(jk), \dots, f(jw)$, относительно n компонент векторного поля $X(j)$ естественно возникает система линейнах неоднородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^\mu(j) \frac{\partial f(jk)}{\partial x^\mu(j)} &= -\lambda^\mu(k) \frac{\partial f(jk)}{\partial x^\mu(k)}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \lambda^\mu(j) \frac{\partial f(jw)}{\partial x^\mu(j)} &= -\lambda^\mu(w) \frac{\partial f(jw)}{\partial x^\mu(w)}. \end{aligned}\right\}$$

Ранг матрицы этой системы по условию аксиомы III определения из §I равен n, по крайней мере, для одного кортежа $\langle k \dots vw \rangle$ и одной точки j из соответствующих окрестностей. Решая уравнения

системы, находим линейное выражение компонент векторного поля $X(j)$ через компоненты векторных полей $X(k), \ldots, X(w)$:

$$\lambda^{\mu}(j) = b^{\mu}_{1\nu}\lambda^{\nu}(k) + \ldots + b^{\mu}_{n\nu}\lambda^{\nu}(w),$$

которое, в соответствии с решением (6) и в силу произвольности коэффициентов a^{ω}, переходит в линейную связь

$$\lambda^{\mu}_{\omega}(j) = b^{\mu}_{1\nu}\lambda^{\nu}_{\omega}(k) + \ldots + b^{\mu}_{n\nu}\lambda^{\nu}_{\omega}(w). \qquad (8)$$

Запишем подсистему из n^2 уравнений системы (7), относящуюся к укороченному кортежу $<k \ldots v w>$ длины n :

$$c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(k) = 0, \ldots, c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(w) = 0. \qquad (7')$$

Соответствующая подсистема системы (7) для кортежа $<jk \ldots v w>$ длины $n+1$ получается добавлением к подсистеме (7′) уравнений $c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(j) = 0$, которые по линейной связи (8) являются следствием уравнений подсистемы (7′). То есть ранги матриц подсистем системы (7), относящихся к кортежам $<k \ldots v w>$ и $<jk \ldots v w>$, совпадают. Пусть ранг матрицы подсистемы (7′) равен r . Ясно, что этот ранг не превышает значения $n(n+1)/2$ и, по следствию леммы, не может быть меньше единицы. Однако, если $r = n(n+1)/2$, то вся система (7), ранг матрицы которой тоже будет равен $n(n+1)/2$, имела бы только нулевое решение, что противоречит сделанному предположению. Если $n(n+1)/2 = 1$, то обязательно должно быть $r = n(n+1)/2$, поэтому будем считать, что $n(n+1)/2 > 1$, то есть $n > 1$. Тогда в матрице подсистемы (7′) найдется такая квадратная подматрица ненулевого порядка $r < n(n+1)/2$, определитель которой отличен от нуля. Возьмем определитель $r+1$ порядка, содержащий эту подматрицу в качестве минора порядка r и одну строку из матрицы подсистемы системы (7) для кортежа $<jk \ldots v w>$, в которую входят функции $\lambda^{\mu}_{\omega}(j)$.

Поскольку, по доказанному выше, ранг матрицы подсистемы системы (7) для кортежа $<jk\,...\,v\,w>$ тоже равен r, указанный определитель $r+1$ порядка должен обратиться в нуль. Раскрывая этот определитель по элементам строки, содержащей функции $\lambda^{\mu}_{\omega}(j)$, для каждого индекса μ получаем связь:

$$\tilde{c}^{\omega}(<k\,...\,v\,w>)\,\lambda^{\mu}_{\omega}(j)=0,$$

где $\tilde{c}^{\omega}$ есть алгебраические дополнения к $\lambda^{\mu}_{\omega}(j)$, зависящие от координат точек кортежа $<k\,...\,v\,w>$ и не зависящие от координат точки j. Заметим, что хотя бы один из коэффициентов $\tilde{c}^{\omega}$ обязательно отличен от нуля. Фиксируя в полученной связи координаты точек кортежа $<k\,...\,v\,w>$, по которым эта связь выполняется тождественно, устанавливаем, что функции $\lambda^{\mu}_{\omega}(j)$ линейно зависимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами. Но этот результат противоречит основному условию теоремы I, выраженному в аксиоме IУ′, согласно которому локальная группа преобразований окрестности $\mathcal{U}(j)$ $n(n+1)/2$-мерна, и потому такую же размерность имеет семейство векторных полей $X(j)$ с базисными операторами $X_{\omega}(j)=\lambda^{\mu}_{\omega}(j)\,\partial/\partial x^{\mu}(j)$, где $\omega=1,\ldots,n(n+1)/2$.

Итак, мы показали, что система уравнений (5) имеет $n(n+1)/2$ линейно независимых в общем смысле ненулевых решений в окрестности $(\mathcal{U}(i)\times\ldots\times\mathcal{U}(w))\cap\mathcal{G}_F$. Пусть в этой окрестности найдется такой кортеж, для которого ранг матрицы (4) из §I равен своему максимально возможному значению $m(m-1)/2$, то есть числу уравнений в системе (5). В силу достаточной гладкости функций f, ранг этой системы будет равен $m(m-1)/2$ и в некоторой окрестности указанного кортежа, содержащейся в $(\mathcal{U}(i)\times\ldots\times\mathcal{U}(w))\cap\mathcal{G}_F$. Как известно, максимальное число линейно независимых (в общем смысле) ненулевых решений системы линейных однородных уравнений равно числу неизвестных минус ранг матрицы системы. В предпо-

лагаемом случае для системы (5) оно будет равно $mn - m(m-1)/2 = n(n+1)/2 - 1$, где $m = n+2$, хотя, как только что было показано, эта система имеет $n(n+1)/2$ линейно независимых ненулевых решений. То есть ранг матрицы (4) из §I должен быть меньше $m(m-1)/2$. С другой стороны, имеется минор порядка $m(m-1)/2 - 1$, не обращающийся в нуль всюду по условию аксиомы III определения из §I, упомянутый в доказательстве необходимости теоремы из §I. Следовательно, в любой окрестности плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества кортежей $\langle ijk \ldots vw \rangle$ найдется такой кортеж, для которого ранг матрицы (4) из §I, то есть ранг отображения F, задаваемого системой функций (3) из §I, точно равен $m(m-1)/2 - 1$. Множество таких кортежей, очевидно, плотно в $\mathfrak{S}_F$.

Перейдем к доказательству достаточности. Как и в соответствующей части доказательства теоремы предыдущего параграфа, предварительно заметим, что ни для одного кортежа из $\mathfrak{S}_F$ ранг матрицы (4) из §I не равен своему максимально возможному значению $m(m-1)/2$. Пусть для кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$ из плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества ранг этой матрицы равен $m(m-1)/2 - 1$. Учитывая сделанное выше замечание, можем полагать, что ранг матрицы (4) из §I будет равен $m(m-1)/2 - 1$ для всех кортежей из некоторой окрестности $\mathcal{U}(i) \times \ldots \times \mathcal{U}(w) \subset \mathfrak{S}_F$. Поскольку число столбцов в этой матрице, равное $mn = m(m-2)$, где $m \geqslant 3$, больше ее ранга, между ними существует линейная связь. Запишем эту связь между столбцами по элементам каждой строки:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^{\mu}[i]\frac{\partial f(ij)}{\partial x^{\mu}(i)} + \lambda^{\mu}[j]\frac{\partial f(ij)}{\partial x^{\mu}(j)} = 0,\\
&\lambda^{\mu}[i]\frac{\partial f(ik)}{\partial x^{\mu}(i)} + \lambda^{\mu}[k]\frac{\partial f(ik)}{\partial x^{\mu}(k)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda^{\mu}[v]\frac{\partial f(vw)}{\partial x^{\mu}(v)} + \lambda^{\mu}[w]\frac{\partial f(vw)}{\partial x^{\mu}(w)} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

где, например, $\lambda^{\mu}[i]$ - коэффициенты линейной зависимости при столбце с дифференцированием по координате $x^{\mu}(i)$, а для его отличия от компоненты $\lambda^{\mu}(i)$ векторного поля $X(i)$, входящей в уравнения системы (5), здесь использованы квадратные скобки. Соотношения (9) при известной функции f будем рассматривать как систему $m(m-1)/2$ линейных однородных уравнений относительно mn коэффициентов линейной зависимости $\lambda^{\mu}[i], \ldots, \lambda^{\mu}[w]$. Матрица системы (9) совпадает с матрицей (4) из §I, поэтому ее ранг равен $m(m-1)/2-1$. Максимальное число линейно независимых (в общем смысле) ненулевых решений системы (9) равно числу неизвестных минус ранг матрицы системы, то есть равно $n(n+1)/2$. Выпишем общее решение системы (9):

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{\mu}[i] &= a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i, <ijk\ldots vw>), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda^{\mu}[w] &= a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(w, <ijk\ldots vw>), \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

где a^{ω} - линейные коэффициенты общего решения в его выражении через линейно независимые ненулевые решения этой же системы, причем суммирование по "немому" индексу ω производится в пределах от I до $n(n+1)/2$. Однако, в отличие от решения (6) аналогичной системы (5), здесь учтена возможная зависимость выражений $\lambda^{\mu}[i], \ldots, \lambda^{\mu}[w]$ не только от координат той точки, по координате которой проводится дифференцирование в соответствующем столбце матрицы (4) из §I, но и от координат всех остальных точек, входящих в уравнение (9), условно обозначенная кортежем $<ijk\ldots vw>$. Кроме того, в решении (10) линейные коэффициенты a^{ω} являются произвольными функциями координат точек кортежа $<ijk\ldots vw>$, тогда как в решении (6) они были только произвольными числами.

Покажем, что общее решение (10) может быть записано в такой

форме, что координаты точки i и координаты точки j входят в функции λ^{μ}_{ω} только для выражений $\lambda^{\mu}[i]$ и $\lambda^{\mu}[j]$ соответственно.

Пусть сначала $n = 1$. Тогда в системе (9) будет всего три простых уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \lambda[i]\frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} + \lambda[j]\frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} &= 0, \\ \lambda[i]\frac{\partial f(ik)}{\partial x(i)} + \lambda[k]\frac{\partial f(ik)}{\partial x(k)} &= 0, \\ \lambda[j]\frac{\partial f(jk)}{\partial x(j)} + \lambda[k]\frac{\partial f(jk)}{\partial x(k)} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9^*)$$

Ранг матрицы этой системы равен двум в окрестности $U(i) \times U(j) \times U(k)$, поэтому она имеет там всего одно линейно независимое ненулевое решение. По условию III определения из §I в окрестности $U(i) \times U(j) \times U(k)$ найдется такой кортеж, для которого отличны от нуля производные функций $f(ij), f(ik), f(jk)$ по координатам $x(i), x(j), x(k)$, поэтому в системе (9^*) в некоторой окрестности названного кортежа любые два уравнения линейно независимы, а третье является их следствием. Запишем общее решение второго и третьего уравнений в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \lambda[k] &= a\,\lambda(x(k), \langle k \rangle), \\ \lambda[i] &= a\,\lambda(x(i), \langle k \rangle), \\ \lambda[j] &= a\,\lambda(x(j), \langle k \rangle), \end{aligned}\right\} \qquad (10^*)$$

где через $\langle k \rangle$ условно обозначено возможное присутствие координаты $x(k)$ точки k во всех трех выражениях решения (10^*), причем в каждом из них функции λ отличны от нуля.

Пусть теперь $n \geq 2$. Обозначим через l точку, следующую за точкой k в кортеже $\langle ijk \ldots vw \rangle$. Возьмем кортеж $\langle kl \ldots vw \rangle$ длины $n = m-2$, полученный из первоначального кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle \in U(i) \times \ldots \times U(w)$ длины m опусканием точек i и j . Выделим из системы (9) подсистему $n(n-1)/2$ уравнений, которые не включают в себя точку i из окрестности $U(i)$ и точку j из окрестности $U(j)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{\mu}[k] \frac{\partial f(kl)}{\partial x^{\mu}(k)} + \lambda^{\mu}[l] \frac{\partial f(kl)}{\partial x^{\mu}(l)} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \lambda^{\mu}[v] \frac{\partial f(vw)}{\partial x^{\mu}(v)} + \lambda^{\mu}[w] \frac{\partial f(vw)}{\partial x^{\mu}(w)} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9')$$

В матрице подсистемы (9′) имеется минор порядка $n(n-1)/2$, не обращающийся в нуль всюду по условию аксиомы III определения из §I. Соответствующая квадратная матрица ступенчатая и ее диагональными клетками являются следующие квадратные матрицы Якоби: для $n-1$ функций $f(kl), \ldots, f(kw)$ по $n-1$ переменной из $x(k)$, ... , для функции $f(vw)$ по одной из переменных $x(v)$, то есть ранг матрицы подсистемы (9′) равняется своему максимальному значению $n(n-1)/2$, по крайней мере, для одного укороченного кортежа из $U(k) \times \ldots \times U(w)$ и некоторой его окрестности. Но тогда подсистема (9′) имеет в этой окрестности $n(n+1)/2$ и не более линейно независимых ненулевых решений, так как максимальное число таких решений равно числу входящих в нее неизвестных $(= n^2)$ минус ее ранг $(= n(n-1)/2)$. В матрице подсистемы (9′) нет зависимости от координат точек i и j и потому ее общее решение можно записать в такой форме, в которой компоненты λ^{μ}_{w} не зависят от этих координат:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{\mu}[k] &= a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(k,<k\dots v\,w>),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lambda^{\mu}[w] &= a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(w,<k\dots v\,w>), \end{aligned}\right\} \qquad (II)$$

где "немое" суммирование по индексу ω так же, как и в общем решении (I0) всей системы (9) производится в пределах от I до $n(n+1)/2$.

Выделим из системы (9) подсистему n уравнений, содержащих точку i :

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{\mu}[i]\frac{\partial f(ik)}{\partial x^{\mu}(i)} + \lambda^{\mu}[k]\frac{\partial f(ik)}{\partial x^{\mu}(k)} &= 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lambda^{\mu}[i]\frac{\partial f(iw)}{\partial x^{\mu}(i)} + \lambda^{\mu}[w]\frac{\partial f(iw)}{\partial x^{\mu}(w)} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9'')$$

и подсистему n уравнений, содержащих точку j :

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{\mu}[j]\frac{\partial f(jk)}{\partial x^{\mu}(j)} + \lambda^{\mu}[k]\frac{\partial f(jk)}{\partial x^{\mu}(k)} &= 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lambda^{\mu}[j]\frac{\partial f(jw)}{\partial x^{\mu}(j)} + \lambda^{\mu}[w]\frac{\partial f(jw)}{\partial x^{\mu}(w)} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9''')$$

Относительно неизвестных $\lambda^{\mu}[i]$ и $\lambda^{\mu}[j]$ эти подсистемы имеют ранг n по условию аксиомы III определения из §I. Но тогда коэффициенты $\lambda^{\mu}[i]$ и $\lambda^{\mu}[j]$ могут быть однозначно выражены через общее решение (II) подсистемы (9'):

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{\mu}[i] &= a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i,<k\dots v\,w>),\\ \lambda^{\mu}[j] &= a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(j,<k\dots v\,w>). \end{aligned}\right\} \qquad (I2)$$

Ранг подсистемы системы уравнений (9) без первого уравнения

$$\lambda^{\mu}[i]\frac{\partial f(ij)}{\partial x^{\mu}(i)} + \lambda^{\mu}[j]\frac{\partial f(ij)}{\partial x^{\mu}(j)} = 0, \qquad (13)$$

содержащего функцию $f(ij)$, равен рангу самой системы (9), в чем легко убедиться, составляя ее из подсистем (9′), (9″) и (9‴). Поэтому первое уравнение системы (9), то есть уравнение (13), является следствием всех остальных и никаких дополнительных ограничений на решения (12) не налагает. Совокупность решений (11) и (12), а также решение (10*), в некоторой окрестности некоторого кортежа из $U(i)\times\ldots\times U(w)$ для любого $n \geq 1$ задает общее решение системы (9), причем в этом решении координаты точек i и j входят явно в функции λ^{μ}_{ω} только для коэффициентов $\lambda^{\mu}[i]$ и $\lambda^{\mu}[j]$ соответственно.

Покажем далее, что функции λ^{μ}_{ω} в выражениях (12) для коэффициентов $\lambda^{\mu}[i]$ и $\lambda^{\mu}[j]$ по отдельности линейно независимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами.

Предположим противное, то есть что найдутся такие числа c^{ω}, $\omega = 1,\ldots, n(n+1)/2$, не все равные нулю одновременно, с которыми для всех индексов μ имеет место соотношение $c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i, <k\ldots v w>) = 0$. Естественно, что при этом хотя бы для одной из остальных функций λ^{μ}_{ω} решения (11), (12) и для одного индекса μ будет выполняться неравенство $c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega} \neq 0$. Пусть, например, $c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(j, <k\ldots v w>) \neq 0$. Тогда, подставляя выражения (12) для $\lambda^{\mu}[i]$ и $\lambda^{\mu}[j]$ в уравнение (13), с учетом независимости линейных коэффициентов a^{ω}, получаем уравнения

$$\lambda^{\mu}_{\omega}(i, <k\ldots v w>)\partial f(ij)/\partial x^{\mu}(i) +$$

$$+ \lambda^{\mu}_{\omega}(j, <k\ldots v w>)\partial f(ij)/\partial x^{\mu}(j) = 0,$$

а затем из них уравнение

$$c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(j,<k\dots v w>)\partial f(ij)/\partial x^{\mu}(j)=0.$$

Координаты точек кортежа $<k\dots v w>$ не входят в функцию $f(ij)$ и по ним последнее уравнение выполняется тождественно. Фиксируя их, получаем уравнение (4′), следствием которого является несущественная зависимость функции $f(ij)$ от координат точки j, противоречащая аксиоме III определения из §I. Значит, должно быть равенство $c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(j,<k\dots v w>)=0$. Точно также получаем, что равенство $c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}=0$ будет иметь место и для всех функций λ^{μ}_{ω} решения (II), если $c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i,<k\dots v w>)=0$. Однако это противоречит тому, что решение (II), (I2) системы (9) общее и максимальное число ее линейно независимых решений равно $n(n+1)/2$. Совершенно аналогично устанавливается линейная независимость функций $\lambda^{\mu}_{\omega}(j,<k\dots v w>)$ с постоянными коэффициентами по нижнему индексу ω в выражении для $\lambda^{\mu}[j]$ решения (I2).

Пусть $<ijk\dots v w>$ и $<\rho\dots q>$ такие кортежи длины $m=n+2$ и n, что для всякой пары $<ij>,<ik>,\dots,<v w>$ точек первого кортежа все кортежи $<ij\rho\dots q>,<ik\rho\dots q>,\dots,<v w\rho\dots q>$ длины m принадлежат области $\mathcal{G}_F$. Множество таких кортежей, очевидно, плотно в $\mathcal{M}^m$ и $\mathcal{M}^n$ и, кроме того, $<ijk\dots v w>\in\mathcal{G}_F$. Запишем систему уравнений (9′) для кортежа $<\rho\dots q>$ и некоторой его окрестности. Эта система, как было показано выше, имеет не более $n(n+1)/2$ линейно независимых ненулевых решений. Общее решение этой системы можно записать по общему решению (II) простой заменой точек кортежа $<k\ell\dots v w>$ на соответствующие точки кортежа $<\rho\dots q>$. Случай $n=1$ можно естественным образом включить в решение (II), полагая $\lambda[\rho]=a\lambda(\rho,<\rho>)$. Далее запишем системы уравнений (9″) для кортежей $<i\rho\dots q>,<j\rho\dots q>,\dots,<w\rho\dots q>$. Эти системы имеют решения,

которые можно записать по решению (I2):

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^{\mu}[i] = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i, <\rho \dots q>), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\lambda^{\mu}[w] = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(w, <\rho \dots q>), \end{aligned}\right\} \qquad (I4)$$

причем функции λ^{μ}_{ω} в каждом из выражений линейно независимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами. Естественно, решения (I4) являются некоторым решением системы (9), аналогично тому, как решения (I2) систем (9′′) и (9′′′) являлись некоторым решением уравнения (I3), то есть первого уравнения системы (9). Координаты точек кортежа $<\rho \dots q>$ не входят в коэффициенты уравнений (9), поэтому в решении (I4) эти координаты могут быть зафиксированы. Для фиксирования координат возьмем, в соответствии с аксиомой III определения из §I, такой кортеж $<\rho_0 \dots q_0>$ из окрестности кортежа $<\rho \dots q>$, что локальный ранг отображения $\bar{f}[\rho_0 \dots q_0]$ будет равен n для плотного в $\mathfrak{M}$ множества точек:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^{\mu}[i] = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i, <\rho_0 \dots q_0>) = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\lambda^{\mu}[w] = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(w, <\rho_0 \dots q_0>) = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(w) \end{aligned}\right\} \qquad (I5)$$

где, например, $\lambda^{\mu}_{\omega}(i) = \lambda^{\mu}_{\omega}(x^1(i), \dots, x^n(i))$ и, кроме того, функции λ^{μ}_{ω} линейно независимы по индексу ω с постоянными коэффициентами для каждой точки кортежа $<ijk \dots vw>$.

Итак, система (9) имеет $n(n+1)/2$ линейно независимых с постоянными коэффициентами решений, которые можно получить из решения (I5), беря для линейных коэффициентов $(a^1, \dots, a^{n(n-1)/2})$ соответствующие значения, например, $(1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, \dots, 0, 1)$:

$$(\lambda^{\mu}_{\omega}(i), \lambda^{\mu}_{\omega}(j), \ldots, \lambda^{\mu}_{\omega}(w)). \qquad (15')$$

Решения (15′) системы (9) линейно независимы не только с постоянными коэффициентами, но и в общем смысле, что можно установить точно также, как это было сделано в отношении решений (6) системы (5). Поскольку, с другой стороны, система (9) имеет не более $n(n+1)/2$ линейно независимых ненулевых решений, ее решение (15) есть общее решение, то есть всякое ее частное решение может быть представлено в записи (15) с некоторыми, вообще говоря, переменными линейными коэффициентами a^{ω}, $\omega = 1, 2, \ldots, n(n+1)/2$.

Совокупность $n(n+1)/2$ решений (15′) задает в некоторой окрестности $U(i) \times \ldots \times U(w)$ кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$ $n(n+1)/2$ - мерное семейство векторных полей. Покажем, что это семейство замкнуто относительно операции коммутирования.

Пусть векторное поле

$$(\lambda^{\mu}(i), \lambda^{\mu}(j), \ldots, \lambda^{\mu}(w)) \qquad (16)$$

есть коммутатор каких-либо двух векторных полей семейства, задаваемого решениями (15′). Ясно, что любой коммутатор записывается в форме (16) вследствие независимости координат, относящихся к разным точкам кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$. С другой стороны, коммутатор (16) является некоторым решением системы (9). Поэтому компоненты коммутатора (16) можно выразить линейно через компоненты векторных полей (15′)согласно общему решению (15):

$$\lambda^{\mu}(i) = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i), \ldots, \lambda^{\mu}(w) = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(w). \qquad (17)$$

Убедимся в том, что в решении (17) линейные коэффициенты a^{ω} постоянны, то есть не зависят от координат точек кортежа $\langle ijk \ldots vw \rangle$. Для этого будем рассматривать выражения (17) как систему mn линейных неоднородных уравнений относительно коэффициентов

$a^\omega, \omega = 1, \ldots, n(n+1)/2$. Выделим из нее подсистему $n(n+1)$ уравнений, опуская выражения $\lambda^\mu(i) = a^\omega \lambda^\mu_\omega(i)$. Столбцами матрицы этой подсистемы являются ненулевые решения

$$(\lambda^\mu_\omega(j), \ldots, \lambda^\mu_\omega(w))$$

уравнений (9′), (9‴) системы (9), линейная независимость которых в общем смысле устанавливается точно также, как и линейная независимость в общем смысле решений (6) системы (5). Таким образом, выделенная из системы (I7) опусканием выражения для $\lambda^\mu(i)$ подсистема $n(n+1)$ уравнений имеет ранг $n(n+1)/2$, точно равный числу неизвестных a^ω , и потому ее решение может зависеть только от координат точек укороченного кортежа $\langle jk \ldots v w \rangle$:

$$a^\omega = a^\omega(\langle jk \ldots v w \rangle).$$

Подставим это решение в выпущенное выражение:

$$\lambda^\mu(i) = a^\omega(\langle jk \ldots v w \rangle) \lambda^\mu_\omega(i) \qquad (I8)$$

и предположим: для некоторого линейного коэффициента a^ω производная по какой-либо из координат точек кортежа $\langle jk \ldots v w \rangle$ отлична от нуля. Дифференцируя правую и левую части выражения (I8) по указанной координате, а затем фиксируя все координаты точек кортежа $\langle jk \ldots v w \rangle$, приходим к соотношению $c^\omega \lambda^\mu_\omega(i) = 0$, в котором коэффициенты c^ω постоянны и, по крайней мере, один из них отличен от нуля. Но такой результат противоречит линейной независимости функций λ^μ_ω по индексу ω с постоянными коэффициентами в решении (I5) для каждой точки кортежа $\langle ijk \ldots v w \rangle$. Следовательно, в выражении (I7) $a^\omega = const, \omega = 1, \ldots, n(n+1)/2$ и поэтому семейство векторных полей (I5′) замкнуто относительно операции коммутирования, задавая $n(n+1)/2$ -мерную алгебру Ли преобразований окрестности $U(i) \times \ldots \times U(w)$ кортежа $\langle ijk \ldots v w \rangle$.

В окрестности $\mathcal{U}(i)$ каждой точки i из некоторого открытого и плотного в $\mathcal{M}$ множества выражениями $\lambda^{\mu}_{\omega}(i)$ из решений (I5'), где $\mu = 1, \ldots, n$; $\omega = 1, \ldots, n(n+1)/2$, определено $n(n+1)/2$ -мерное линейное семейство гладких векторных полей с базисом (3), замкнутое относительно операции коммутирования и задающее $n(n+1)/2$ -мерную алгебру Ли преобразований этой окрестности. Векторные поля $X = a^{\omega} X_{\omega}$, где a^{ω} произвольные числа, определенные в окрестностях $\mathcal{U}(i)$ и $\mathcal{U}(j)$ двух точек i и j, совпадают, очевидно, в пересечении $\mathcal{U}(i) \cap \mathcal{U}(j)$. Если пара $\langle ij \rangle \in \Theta_f$, то функция $f(ij)$ удовлетворяет системе уравнений (4), получающейся из первого уравнения системы (9) и ее решений (I5').

Согласно второй (обратной) теореме С.Ли (см., например, /22/, с.438) алгебра Ли векторных полей с базисом (3) однозначно определяет эффективное гладкое действие некоторой $n(n+1)/2$ -мерной локальной группы Ли в окрестности точек i, множество которых открыто и плотно в $\mathcal{M}$, причем действия ее в окрестностях $\mathcal{U}(i)$ и $\mathcal{U}(j)$ двух точек i и j совпадают в пересечении $\mathcal{U}(i) \cap \mathcal{U}(j)$. То есть алгебра Ли с базисом (3) определяет $n(n+1)/2$ - мерную локальную группу локальных преобразований некоторого открытого и плотного в $\mathcal{M}$ множества, для которой исходная функция f, удовлетворяющая системе уравнений (4), является двухточечным инвариантом. Теорема I полностью доказана.

Л е м м а 2. Размерность локальной группы локальных движений, допускаемых функцией f, не превышает $n(n+1)/2$.

Предположим противное, то есть что функция f допускает такую группу движений, размерность которой больше $n(n+1)/2$. Тогда система уравнений (5) будет иметь более $n(n+1)/2$ линейно независимых с постоянными коэффициентами решений. Возьмем из них любые $n(n+1)/2 + 1$ решений. Эти решения будут линейно независимы

также и с переменными коэффициетами, то есть в общем смысле. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно повторить рассуждения, следующие за системой уравнений (7), в которых $\omega \leq (n+1)n/2+1$. Поскольку система (5) тогда имеет $n(n+1)/2+1$ линейно независимых ненулевых решений, ранг ее матрицы, то есть матрицы (4) из §I, всюду должен быть меньше $m(m-1)/2-1$, где $m=n+2$. Однако в этой матрице имеется отличный от нуля ступенчатый минор порядка $m(m-1)/2-1$, упомянутый в конце доказательства необходимости теоремы из §I, диагональными клетками которого являются якобианы, не обращающиеся в нуль по условию аксиомы III из §I. То есть ранг матрицы (4) из §I не может быть всюду меньше, чем $m(m-1)/2-1$. Полученное противоречие и доказывает лемму 2.

Итоговым результатом первых двух параграфов является вывод об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий n-мерной геометрии расстояний, задаваемой на множестве M функцией f, удовлетворяющей условию A и аксиомам I, II, III из §I. Эта эквивалентность непосредственно вытекает из доказанных в §I и §2 двух теорем.

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы функция f задавала на множестве M феноменологически симметричную n-мерную геометрию расстояний ранга $n+2$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция задавала на M n-мерную геометрию расстояний, наделенную групповой симметрией степени $n(n+1)/2$.

Заметим, что необходимое и достаточное условие теоремы I настоящего параграфа и теоремы из §I о ранге отображения F можно включить в определение n-мерной геометрии расстояний, которая будет феноменологически симметрична, с одной стороны, и наделена групповой симметрией – с другой, причем обе симметрии окажутся эквивалентными, вытекая одна из другой.

§ 3. Группы движений феноменологически инвариантных плоских метрик

Одной из основных задач теории физических структур является отыскание явного вида функции f в ее локальном координатном представлении (2) из §I, удовлетворяющей некоторому уравнению (I) из §I. В настоящее время эта задача решена автором для прямой и плоскости /4/, /5/ и В.Х. Львом для трехмерного пространства /6/.

В случае $n = 1$ функцию f с точностью до эквивалентности (замены локальных координат) и переобозначения $\Psi(f) \to f$, где Ψ - произвольная функция одной переменной, можно записать в следующем виде (см. /4/, с.204):

$$f(ij) = x(i) - x(j). \qquad (I)$$

В случае $n = 2$ имеется десять различных локальных представлений функции f, которые с точностью до эквивалентности и переобозначения $\Psi(f) \to f$ определяются одним из следующих выражений (см. /5/):

$$f(ij) = (x(i)-x(j))^2 + (y(i)-y(j))^2, \qquad (2)$$

$$f(ij) = \cos y(i) \cos y(j) \cos(x(i)-x(j)) + \sin y(i) \sin y(j), \qquad (3)$$

$$f(ij) = \mathrm{sh}\, y(i)\, \mathrm{sh}\, y(j) \cos(x(i)-x(j)) - \mathrm{ch}\, y(i)\, \mathrm{ch}\, y(j), \qquad (4)$$

$$f(ij) = (x(i)-x(j))^2 - (y(i)-y(j))^2, \qquad (5)$$

$$f(ij) = \mathrm{ch}\, y(i)\, \mathrm{ch}\, y(j) \cos(x(i)-x(j)) - \mathrm{sh}\, y(i)\, \mathrm{sh}\, y(j), \qquad (6)$$

$$f(ij) = x(i)\, y(j) - x(j)\, y(i), \qquad (7)$$

$$f(ij) = (x(i)-x(j))^{\alpha} (y(i)-y(j))^{\beta}, \qquad (8)$$

$$f(ij) = (x(i) - x(j))/(y(i) - y(j)) + \ln|y(i) - y(j)|, \qquad (9)$$

$$f(ij) = \ln((x(i) - x(j))^2 + ((y(i) - y(j))^2) +$$

$$+ \gamma \operatorname{arctg}(x(i) - x(j))/(y(i) - y(j)), \qquad (10)$$

$$f(ij) = ((x(i) - x(j))^2 + \varepsilon_i y^2(i) + \varepsilon_j y^2(j))/y(i)y(j), \qquad (11)$$

где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq 0$, $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ - постоянные для окрестностей $U(i)$, $U(j)$, принимающие значения $0, \pm 1$, причем не обязательно $\varepsilon_i = \varepsilon_j$.

Выражения (2) - (8) определяют метрики хорошо известных плоских геометрий: (2) - евклидовой плоскости, (3) - двумерной сферы, (4) - плоскости Лобачевского, (5) - плоскости Минковского, (6) - двумерного однополостного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, (7) - симплектической плоскости, (8) - симплициальной плоскости. Метрики (9), (10), по-видимому, до настоящего времени в геометрии не рассматривались. Выражение (11) определяет метрику на несвязном двумерном многообразии, на связных компонентах которого будет либо симплектическая плоскость ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0$), либо плоскость Лобачевского ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = +1$), либо двумерный однополостной гиперболоид ($\varepsilon_i = \varepsilon_j = -1$).

В работе /5/ результаты (2) - (11) приведены без доказательства, поэтому ниже мы кратко изложим его схему. Феноменологическая симметрия плоской (двумерной) геометрии означает, что шесть взаимных расстояний

$$\left.\begin{aligned} f(ij) &= f(x(i), y(i), x(j), y(j)), \\ f(ik) &= f(x(i), y(i), x(k), y(k)), \\ f(il) &= f(x(i), y(i), x(l), y(l)), \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} f(ij) &= f(x(i), y(i), x(j), y(j)), \\ f(ik) &= f(x(i), y(i), x(k), y(k)), \\ f(il) &= f(x(i), y(i), x(l), y(l)), \\ f(jk) &= f(x(j), y(j), x(k), y(k)), \\ f(jl) &= f(x(j), y(j), x(l), y(l)), \\ f(kl) &= f(x(k), y(k), x(l), y(l)), \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

соответствующих всем упорядоченным парам в кортеже $\langle ijkl \rangle$, функционально связаны, то есть удовлетворяют некоторому уравнению

$$\varphi(f(ij), f(ik), f(il), f(jk), f(jl), f(kl)) = 0. \qquad (13)$$

Шесть функций (12) зависят в общей сложности от восьми координат $x(i)$, $y(i)$, $x(j)$, $y(j)$, $x(k)$, $y(k)$, $x(l)$, $y(l)$ четырех точек кортежа $\langle ijkl \rangle$, поэтому связь между ними возможна не всегда. Согласно теореме первого параграфа, для того чтобы 6 функций системы (12) с существенной зависимостью от координат были функционально связаны каким-либо уравнением (13), необходимо и достаточно, чтобы общий ранг матрицы Якоби для нее:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} & \frac{\partial f(ik)}{\partial x(i)} & \frac{\partial f(il)}{\partial x(i)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(ij)}{\partial y(i)} & \frac{\partial f(ik)}{\partial y(i)} & \frac{\partial f(il)}{\partial y(i)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial x(j)} & \frac{\partial f(jl)}{\partial x(j)} & 0 \\ \frac{\partial f(ij)}{\partial y(j)} & 0 & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial y(j)} & \frac{\partial f(jl)}{\partial y(j)} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial x(k)} & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial x(k)} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial x(k)} \\ 0 & \frac{\partial f(ik)}{\partial y(k)} & 0 & \frac{\partial f(jk)}{\partial y(k)} & 0 & \frac{\partial f(kl)}{\partial y(k)} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial x(l)} & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial x(l)} & \frac{\partial f(kl)}{\partial x(l)} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f(il)}{\partial y(l)} & 0 & \frac{\partial f(jl)}{\partial y(l)} & \frac{\partial f(kl)}{\partial y(l)} \end{array} \right\| . \qquad (14)$$

был равен пяти. А это означает, что любой определитель шестого порядка, полученный из матрицы (I4) вычеркиванием каких-то двух ее строк, должен обращаться в нуль. Рассмотрим определитель, полученный из матрицы (I4) вычеркиванием последних двух строк. Поскольку он обращается в нуль тождественно по координатам точек кортежа $\langle ijkl\rangle$, зафиксируем в нем координаты точек k, l и разложим его по элементам первого столбца. В результате получаем относительно функции $f(ij)$ линейное однородное уравнение в частных производных, которое, после введения некоторых удобных обозначений, можно записать в следующем виде:

$$A(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} + B(i)\frac{\partial f(ij)}{\partial y(i)} + A(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} + B(j)\frac{\partial f(ij)}{\partial y(j)} = 0, \quad (I5)$$

где, например, $A(i) = A(x(i), y(i))$. Уравнение (I5) интегрируемо, так как $A \neq 0, B \neq 0$, и может быть решено методом характеристик:

$$f(ij) = \chi(\varphi(i) - \varphi(j), \psi(i), \psi(j)),$$

где $\chi(u, v, w)$ - произвольная функция трех переменных, а функции φ и ψ независимы. После удобной замены координат $\varphi \to x$, $\psi \to y$ это решение запишется в таком виде:

$$f(ij) = \chi(x(i) - x(j), y(i), y(j)). \quad (I6)$$

Подставим решение (I6) в матрицу (I4) и рассмотрим два определителя шестого порядка, полученные вычеркиванием первой, второй и первой, четвертой строк. Эти определители, естественно, обращаются тождественно в нуль по всем восьми координатам точек кортежа $\langle ijkl\rangle$. Фиксируя затем координаты $x(k), y(k), x(l), y(l)$ и вводя удобные обозначения, получаем следующие два соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \chi_w(ij)/\chi_u(ij) &= \mu(j) + \nu(j)(\lambda(i)-\lambda(j))/(\sigma(i)-\sigma(j)), \\ \chi_v(ij)/\chi_u(ij) &= -\mu(i) - \nu(i)(\lambda(i)-\lambda(j))/(\sigma(i)-\sigma(j)). \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Поскольку в левые части соотношений (I7) координаты $x(i)$ и $x(j)$ входят в виде разности $x(i)-x(j)$, эти соотношения представляют собой, прежде всего, систему двух функциональных уравнений относительно функций $\mu, \nu, \lambda, \sigma$. Решив эти уравнения и найдя явные выражения для $\mu, \nu, \lambda, \sigma$, из соотношений (I7) получим затем систему двух линейных однородных уравнений в частных производных относительно функции $\chi(u,v,w)$. Решение этой системы и определит одну из феноменологически инвариантных плоских метрик (2) – – (II). Наиболее сложный этап – это нахождение явного выражения для функций $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ из функциональных уравнений (I7), так как они имеют большое число решений.

Теорема 2 из §2 утверждает, что каждая феноменологически инвариантная n -мерная метрика допускает $n(n+1)/2$ -параметрическую локальную группу локальных движений. Найдем явные задания этих групп для перечисленных выше метрик (I) – (II) как решение уравнения сохранения (2) из §2. Это уравнение будем решать не предполагая линейности или аффинности преобразований (I) из §2 и не оговаривая заранее число параметров в группе движений, которое должно получиться как результат.

Т е о р е м а I. Локальная группа локальных движений одномерной метрики (I) является однопараметрической группой параллельных переносов.

Локальное преобразование одномерного многообразия в общем виде запишется так:

$$x' = \lambda(x), \qquad (18)$$

а уравнение сохранения метрики (I) будет:

$$x'(i) - x'(j) = x(i) - x(j).$$

В результате, относительно функции $\lambda(x)$ получаем уравнение

$$\lambda(x(i)) - \lambda(x(j)) = x(i) - x(j),$$

в котором разделим координаты $x(i)$ и $x(j)$:

$$\lambda(x(i)) - x(i) = \lambda(x(j)) - x(j) = a = const.$$

То есть $\lambda(x) = x + a$ и группа движений (I8) является однопараметрической группой параллельных переносов:

$$x' = x + a. \qquad (I9)$$

Т е о р е м а 2. Каждая из феноменологически инвариантных плоских метрик (2) - (II) допускает локальную трехпараметрическую группу локальных движений, которая задается следующими локальными преобразованиями двумерного многообразия:

для метрики (2):

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= -bx + ay + d, \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

причем $a^2 + b^2 = 1$;

для метрики (3):

$$\begin{pmatrix} \cos y' \cos x' \\ \cos y' \sin x' \\ \sin y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos y \cos x \\ \cos y \sin x \\ \sin y \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

причем $a^T a = I$ и $\det a = 1$, где I - единичная матрица

третьего порядка;

для метрики (4):

$$\begin{pmatrix} sh y' \cos x' \\ sh y' \sin x' \\ ch y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} sh y \cos x \\ sh y \sin x \\ ch y \end{pmatrix}, \qquad (22)$$

причем $a^T \tilde{I} a = \tilde{I}$ и $\det a = 1$, где $\tilde{I}$ - псевдоединичная матрица типа (2,I) третьего порядка, $a^{33} > 0$;

для метрики (5):

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= bx + ay + d, \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

причем $a^2 - b^2 = 1$ и $a > 0$;

для метрики (6):

$$\begin{pmatrix} ch y' \cos x' \\ ch y' \sin x' \\ sh y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} & a^{13} \\ a^{21} & a^{22} & a^{23} \\ a^{31} & a^{32} & a^{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ch y \cos x \\ ch y \sin x \\ sh y \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

причем $a^T \tilde{I} a = \tilde{I}$ и $\det a = 1$, где $\tilde{I}$ - псевдоединичная матрица типа (2,I) третьего порядка, $a^{33} > 0$;

для метрики (7):

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy, \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

причем $ad - bc = 1$;

для метрики (8):

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + c, \\ y' &= by + d, \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

причем $a^{\alpha} b^{\beta} = 1$ и $a > 0$, $b > 0$;

для метрики (9):

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax - ay\ln a + c; \\ y' &= ay + d, \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

причем $a > 0$;

для метрики (I0):

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= -bx + ay + d, \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

причем $\ln(a^2 + b^2) + \gamma \operatorname{arctg} b/a = 0$;

для метрики (II):

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{(ax+b)(cx+d) + ac\varepsilon y^2}{(cx+d)^2 + c^2 \varepsilon y^2}, \\ y' &= \frac{y}{(cx+d)^2 + c^2 \varepsilon y^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

причем $ad - bc = 1$.

Запишем локальное координатное представление (2) из §I для случая плоской (двумерной) метрики

$$f(ij) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)). \qquad (30)$$

Локальное обратимое преобразование двумерного многообразия в координатах x, y имеет следующий вид:

$$x' = \lambda(x,y),\ y' = \sigma(x,y), \tag{31}$$

причем

$$\partial(\lambda,\sigma)/\partial(x,y) = \lambda_x \sigma_y - \lambda_y \sigma_x \neq 0. \tag{32}$$

Если преобразование (31) сохраняет метрику (30), то есть является движением этой метрики, то имеет место уравнение (2) из §2:

$$f(x'(i), y'(i), x'(j), y'(j)) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)),$$

где, например, $x'(i) = \lambda(x(i), y(i)) = \lambda(i)$. Уравнение сохранения при известной метрике (30) является функциональным уравнением относительно λ и σ.

$$f(\lambda(i), \sigma(i), \lambda(j), \sigma(j)) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)), \tag{33}$$

которое мы будем решать без предположения линейности или аффинности преобразований (31) и числа параметров в них. Связное множество всех преобразований (31), удовлетворяющих уравнению (33), составляет полную локальную группу локальных движений. Установив эту группу, мы, тем самым, в соответствии с "Эрлангенской программой" Ф. Клейна /I/, определим локально двумерную геометрию. Заметим также, что если группа преобразований (31) задана, то уравнение (33) является функциональным уравнением относительно метрики (30), рассматриваемой как двухточечный инвариант.

Проиллюстрируем методы решения функционального уравнинния (33) на примере трех метрик (2), (3), (9), так как для остальных метрик эти методы вполне аналогичны, хотя в некоторых случаях и более громоздки.

Запишем уравнение (33) для евклидовой метрики (2):

$$(\lambda(i)-\lambda(j))^2+(\sigma(i)-\sigma(j))^2=(x(i)-x(j))^2+(y(i)-y(j))^2 \qquad (34)$$

и продифференцируем его отдельно по координатам $x(j)$ и $y(j)$, сократив затем правую и левую части на 2 и умножив их на -I:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda(i)-\lambda(j))\lambda_x(j)+(\sigma(i)-\sigma(j))\sigma_x(j) &= x(i)-x(j),\\ (\lambda(i)-\lambda(j))\lambda_y(j)+(\sigma(i)-\sigma(j))\sigma_y(j) &= y(i)-y(j).\end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Заметим, что соотношения (35), также как и исходное уравнение (34), по каждой из координат $x(i)$, $y(i)$, $x(j)$, $y(j)$ выполняется тождественно.

Соотношения (35) рассмотрим как систему двух линейных неоднородных уравнений относительно разностей $\lambda(i)-\lambda(j)$ и $\sigma(i)-\sigma(j)$. Определитель этой системы $\Delta(j)=\lambda_x(j)\sigma_y(j)-\lambda_y(j)\sigma_x(j)$, в силу условия (32), отличен от нуля, поэтому оно может быть решено методом Крамера. Для функций $\lambda(i)$ и $\sigma(i)$ тогда получаем:

$$\left.\begin{aligned}\lambda(i)&=\frac{\sigma_y(j)}{\Delta(j)}x(i)-\frac{\sigma_x(j)}{\Delta(j)}y(i)-\frac{\sigma_y(j)}{\Delta(j)}x(j)+\frac{\sigma_x(j)}{\Delta(j)}y(j)+\lambda(j),\\ \sigma(i)&=-\frac{\lambda_y(j)}{\Delta(j)}x(i)+\frac{\lambda_x(j)}{\Delta(j)}y(i)+\frac{\lambda_y(j)}{\Delta(j)}x(j)-\frac{\lambda_x(j)}{\Delta(j)}y(j)+\sigma(j).\end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Совершенно аналогично, дифференцируя уравнение (34) отдельно по координатам $x(i)$ и $y(i)$, получаем для функций $\lambda(j)$ и $\sigma(j)$:

$$\left.\begin{aligned}\lambda(j)&=\frac{\sigma_y(i)}{\Delta(i)}x(j)-\frac{\sigma_x(i)}{\Delta(i)}y(j)-\frac{\sigma_y(i)}{\Delta(i)}x(i)+\frac{\sigma_x(i)}{\Delta(i)}y(i)+\lambda(i),\\ \sigma(j)&=-\frac{\lambda_y(i)}{\Delta(i)}x(j)+\frac{\lambda_x(i)}{\Delta(i)}y(j)+\frac{\lambda_y(i)}{\Delta(i)}x(i)-\frac{\lambda_x(i)}{\Delta(i)}y(i)+\sigma(i).\end{aligned}\right\} \qquad (36')$$

Нетрудно убедиться в том, что в выражении (36) коэффициенты при координатах $x(i)$, $y(i)$ и свободные от них члены постоянны. Действительно, дифференцируя, например, выражение для функции $\lambda(i)$ по координате $x(i)$, получим: $\lambda_x(i) = \sigma_y(j)/\Delta(j) = a = const.$ То есть выражения (36) для функций $\lambda(i)$ и $\sigma(i)$ можно переписать в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} \lambda(i) &= a\,x(i) + b\,y(i) + c\,, \\ \sigma(i) &= g\,x(i) + h\,y(i) + d\,, \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

где $a, b, c, d, g, h = const$. Таким образом, преобразование (3I), сохраняющее метрику (2) евклидовой плоскости, должно быть аффинным (линейным по координатам). Обычно аффинность или предполагается, или доказывается геометрически, что возможно не для всех метрик (2) - (II), заданных локально в некоторой окрестности пары $\langle ij \rangle$. Здесь же аффинность преобразований (3I) доказана чисто аналитически.

Подставим выражения (37) в соотношения (36′);

$$\left.\begin{aligned} \lambda(j) &= (h\,x(j) - g\,y(j) - h\,x(i) + g\,y(i))/\Delta(i) + a\,x(i) + b\,y(i) + c\,; \\ \sigma(j) &= (-b\,x(j) + a\,y(j) + b\,x(i) - a\,y(i))/\Delta(i) + g\,x(i) + h\,y(i) + d\,, \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

где $\Delta(i) = \lambda_x(i)\sigma_y(i) - \lambda_y(i)\sigma_x(i) = ah - bg \neq 0$. Поскольку функции $\lambda(j)$ и $\sigma(j)$ могут зависеть только от $x(j)$, $y(j)$, координаты $x(i)$, $y(i)$ в правых частях выражений (38) должны сократиться, откуда получаем;

$$\left.\begin{aligned} h = a\Delta(i)\,, \quad g &= -b\Delta(i)\,, \\ b = -g\Delta(i)\,, \quad a &= h\Delta(i)\,. \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Из уравнений (39) легко устанавливаем, что $\Delta^2(i) = 1$, то есть

$\Delta(i) = \pm 1$. Если $\Delta(i) = +1$, то $h = a$, $g = -b$ и выражения (37), (38) будут одинаковыми, задавая трехпараметрическую группу (20) собственных движений евклидовой плоскости. Эта группа является полной локальной группой локальных движений, включающей в себя, естественно, и тождественное преобразование. Если же $\Delta(i) = -1$, то из уравнения (39) получаем $h = -a$, $g = b$. Выражения (37) и (38) в этом случае также будут совпадать, задавая трехпараметрическое множество несобственных движений евклидовой плоскости:

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + c, \\ y' &= bx - ay + d, \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

причем $a^2 + b^2 = 1$. Множество преобразований (40) в совокупности с преобразованиями (20) составляют группу всех движений евклидовой плоскости.

Обратим внимание на то, что найденные выше преобразования окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ в группе движений локально евклидовой метрики оказались одинаковыми, что можно было ожидать заранее, так как эта метрика формально симметрична по перестановке точек i и j .

Найдем теперь полную локальную группу локальных движений (3I) метрики (3) двумерной сферы. Для этой метрики уравнение сохранения (33) будет:

$$\cos\sigma(i)\cos\sigma(j)\cos(\lambda(i)-\lambda(j)) + \sin\sigma(i)\sin\sigma(j) =$$

$$= \cos y(i)\cos y(j)\cos(x(i)-x(j)) + \sin y(i)\sin y(j). \qquad (41)$$

В уравнении (4I) раскроем косинус разности в правой и левой частях:

$$\cos\sigma(i)\cos\lambda(i)\cos\sigma(j)\cos\lambda(j) + \cos\sigma(i)\sin\lambda(i)\cos\sigma(j)\sin\lambda(j) +$$

$$+\sin\delta(i)\sin\delta(j)=\cos y(i)\cos x(i)\cos y(j)\cos x(j)+$$

$$+\cos y(i)\sin x(i)\cos y(j)\sin x(j)+\sin y(i)\sin y(j) \qquad (4I')$$

и продифференцируем его отдельно по координатам $x(j)$, $y(j)$. Уравнение (4I′) вместе с двумя результатами его дифференцирования рассмотрим как систему трех линейных неоднородных уравнений относительно $\cos\delta(i)\cos\lambda(i)$, $\cos\delta(i)\sin\lambda(i)$ и $\sin\delta(i)$. Определитель этой системы:

$$\Delta(j)=\begin{vmatrix} \cos\delta(j)\cos\lambda(j) & \cos\delta(j)\sin\lambda(j) & \sin\delta(j) \\ (\cos\delta(j)\cos\lambda(j))_x & (\cos\delta(j)\sin\lambda(j))_x & (\sin\delta(j))_x \\ (\cos\delta(j)\cos\lambda(j))_y & (\cos\delta(j)\sin\lambda(j))_y & (\sin\delta(j))_y \end{vmatrix}$$

равен $\cos\delta(j)(\lambda_x(j)\delta_y(j)-\lambda_y(j)\delta_x(j))$ и в соответствии с условием (32), отличен от нуля. Поэтому упомянутая система может быть решена методом Крамера:

$$\begin{pmatrix} \cos\delta(i)\cos\lambda(i) \\ \cos\delta(i)\sin\lambda(i) \\ \sin\delta(i) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{11}(j) & a^{12}(j) & a^{13}(j) \\ a^{21}(j) & a^{22}(j) & a^{23}(j) \\ a^{31}(j) & a^{32}(j) & a^{33}(j) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos y(i)\cos x(i) \\ \cos y(i)\sin x(i) \\ \sin y(i) \end{pmatrix}, \qquad (42)$$

где все компоненты матрицы $a(j)$ можно выразить явно через координаты $x(j)$, $y(j)$, но эти выражения оказываются достаточно громоздкими. Заметим, что по каждой из координат $x(i)$, $y(i)$, $x(j)$, $y(j)$ равенство (42), как и исходное уравнение (4I), выполняется тождественно. Нетрудно убедиться в том, что все компоненты матрицы $a(j)$ в решении (42) постоянны. В силу формальной симметрии метрики (3) по перестановке точек i и j, преобразование их координат, задающие движение, должны быть одинаковыми. В результате получаем преобразования (2I), которые линейны, но не по координа-

там x , y , а по выражениям $\cos y\cos x, \cos y\sin x, \sin y$
Эта линейность получена нами чисто аналитически без предположения о том, что двумерная сфера с метрикой (3) лежит в трехмерном евклидовом пространстве.

Дополнительные ограничения на компоненты матрицы a преобразований (2I) получим, подставляя эти преобразования в исходное уравнение (4I). После подстановки и сопоставления линейно независимых слагаемых в правой и левой частях, легко получаем условие $a^T a = I$, где I - единичная матрица третьего порядка. Поскольку $a^T a$ - симметричная матрица, это условие задает шесть независимых уравнений на девять компонент матрицы a . Таким образом, множество преобразований (2I) при условии $a^T a = I$ (ортогональность матрицы) является трехпараметрической группой всех движений метрики (3) двумерной сферы. Эта группа состоит из двух несвязных компонент с $\det a = 1$ и $\det a = -1$. Первая компонента содержит тождественное преобразование и является полной локальной трехпараметрической группой локальных движений метрики (3), входя в группу всех движений как подгруппа.

Рассмотрим в заключение случай "экзотической" метрики (9) Запишем уравнение сохранения (33) для этой метрики:

$$(\lambda(i)-\lambda(j))/(\sigma(i)-\sigma(j)) + \ln|\sigma(i)-\sigma(j)| = \\ = (x(i)-x(j))/(y(i)-y(j)) + \ln|y(i)-y(j)| \qquad (43)$$

и, как обычно, продифференцируем его по координатам $x(j)$, $y(j)$. После некоторых простых преобразований результатов дифференцирования получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\lambda_x(j)+\sigma_x(j)}{\sigma(i)-\sigma(j)} - \frac{\lambda(i)-\lambda(j)}{(\sigma(i)-\sigma(j))^2}\sigma_x(j) = \frac{1}{y(i)-y(j)} \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\lambda_y(j)+\sigma_y(j)}{\sigma(i)-\sigma(j)}-\frac{\lambda(i)-\lambda(j)}{(\sigma(i)-\sigma(j))^2}\sigma_y(j)=\frac{y(i)-y(j)-x(i)+x(j)}{(y(i)-y(j))^2}\cdot\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Соотношения (44) представляют собой систему двух линейных неоднородных уравнений относительно $1/(\sigma(i)-\sigma(j))$ и $(\lambda(i)-\lambda(j))/(\sigma(i)-\sigma(j))^2$. Определитель этой системы $\Delta(j)=\lambda_y(j)\sigma_x(j)-\lambda_x(j)\sigma_y(j)$, в соответствии с условием (32), отличен от нуля, поэтому она может быть решена методом Крамера:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sigma(i)-\sigma(j)}&=\frac{1}{\Delta(j)}\left(-\frac{\sigma_y(j)}{y(i)-y(j)}+\frac{y(i)-y(j)-x(i)+x(j)}{(y(i)-y(j))^2}\sigma_x(j)\right),\\ \frac{\lambda(i)-\lambda(j)}{(\sigma(i)-\sigma(j))^2}&=\frac{1}{\Delta(j)}\left(-\frac{\lambda_y(j)+\sigma_y(j)}{y(i)-y(j)}+\frac{y(i)-y(j)-x(i)+x(j)}{(y(i)-y(j))^2}(\lambda_x(j)+\sigma_x(j))\right).\end{aligned}\right\}$$

Поскольку соотношения (44) выполняются тождественно по всем координатам, в выписанных выше решениях зафиксируем координаты точки j. Учитывая также формальную симметрию метрики (9) по перестановке координат точек i и j, для функций λ и σ можем записать уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sigma-f}&=\frac{a}{y-d}+b\,\frac{y-d-x+c}{(y-d)^2},\\ \frac{\lambda-e}{(\sigma-f)^2}&=\frac{g}{y-d}+h\,\frac{y-d-x+c}{(y-d)^2},\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

причем $ah-bg\neq 0$. Из уравнений (45) можно выразить явно функции λ и σ. Дополнительные ограничения на параметры, входящие в эти выражения, найдем, подставляя их в уравнения системы (44). Поскольку в эти уравнения функции λ и σ входят в виде разности и производных, а координаты x, y только в виде разности, удобно на время для сокращения записи в них опустить аддитивные параметры c, d, e, f:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{a}{y} + b\,\frac{y-x}{y^2}\,,\quad \frac{\lambda}{\sigma^2} = \frac{g}{y} + h\,\frac{y-x}{y^2}\,,$$

откуда легко получаем выражения:

$$\lambda = y^2\frac{(g+h)y - hx}{((a+b)y - bx)^2}\,,\quad \sigma = \frac{y^2}{(a+b)y - bx}\,, \tag{46}$$

по которым найдем также производные λ_x и σ_x :

$$\lambda_x = y^2\frac{(2bg + bh - ah)y - bhx}{((a+b)y - bx)^3}\,,\quad \sigma_x = \frac{by^2}{((a+b)y - bx)^2}\,. \tag{47}$$

Первое уравнение системы (44) приведем к общему знаменателю:

$$((\lambda_x(j) + \sigma_x(j))(\sigma(i) - \sigma(j)) - \sigma_x(j)(\lambda(i) - \lambda(j)))(y(i) - y(j)) = (\sigma(i) - \sigma(j))^2$$

и, введя для сокращения записи обозначение

$$\xi = (a+b)y - bx\,,$$

подставим в него выражения (46) и производные (47). Умножая, далее, результат подстановки на $\xi^2(i)\,\xi^4(j)$, получим:

$$\{y^2(j)\xi(i)[(b(a+b+g+h) - (ah - gb))y(j) - b(b+h)x(j)](y^2(i)\xi(j) - y^2(j)\xi(i)) -$$

$$- by^2(j)[y^2(i)\xi^2(j)((g+h)y(i) - hx(i)) - y^2(j)\xi^2(i)((g+h)y(j) - hx(j))]\}\times$$

$$\times\,(y(i) - y(j)) = \xi^2(j)\,(y^2(i)\xi(j) - y^2(j)\xi(i))^2\,. \tag{48}$$

Сравним в правой и левой частях равенства (48) выполняющегося тождественно по всем координатам, члены, содержащие $y^4(i)$:

$$(a+b)\,y^2(j)[(b(a+b+g+h) - (ah - gb))y(j) - b(b+h)\,x(j)] -$$

$$- b(g+h)\,y^2(j)\,\xi(j) = \xi^3(j)\,.$$

Замечаем, что в последнем равенстве слева нет слагаемого, содержа-

щего координату $x(j)$ в третьей степени, в то время как справа такое слагаемое есть и равно $-b^3x^3(j)$, то есть $b=0$. Если $b=0$, то необходимо должно быть $a\neq 0$ и $h\neq 0$, так как $ah-bg\neq 0$. Выражения (46) для функций λ и σ при этом значительно упростятся и станут линейными по координатам x, y:

$$\lambda = ((g+h)y-hx)/a^2\ ,\ \sigma = y/a$$

и после восстановления опущенных на время аддитивных постоянных c, d, e, f:

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= ((g+h)(y-d)-h(x-c)/a^2\ ,\\ \sigma &= (y-d)/a + f\ .\end{aligned}\right\}$$

В последних выражениях удобно произвести следующие переобозначения параметров: $-h/a^2\to a$, $(g+h)/a^2\to b$, $1/a\to g$, $-((g+h)d-hc)/a^2\to c$, $-d/a+f\to d$:

$$\lambda = ax+by+c\ ,\ \sigma = gy+d\ , \qquad (50)$$

причем $a\neq 0$ и $g\neq 0$. Таким образом, было показано, что преобразование (31), сохраняющее метрику (9), является специальным аффинным преобразованием, что заранее совсем не очевидно и геометрически установлено быть не может.

Окончательные ограничения на параметры a, b, c, d, g можно легко найти, подставляя функции (50) в исходное уравнение (43):

$$g = a\ ,\ b = -a\ln|a|\ ,$$

в результате чего получаем полную локальную трехпараметрическую группу локальных движений (27) "экзотической метрики" (9) при $a>0$.

§ 4. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости

Феноменологически инвариантные плоские метрики (2) - (II) из предыдущего параграфа были получены в теории физических структур методом, краткое описание которого приведено там же. Однако этот метод оказался достаточно громоздким, чтобы быть оформленным в отдельную статью, поэтому автор свои результаты по двумерным геометриям поместил в работе /5/ без доказательства. Теорема 2 из §2 об эквивалентности феноменологической и групповой симметрий в геометрии позволяет получить метрики (2) - (II) из §3 как двухточечные инварианты трехпараметрических групп преобразований плоскости. Решению этой задачи будут посвящены настоящий и следующий параграфы.

А. Пуанкаре в своей работе "Об основных гипотезах геометрии", опубликованной в 1887 г. /7/, предположил, что "необходимыми и достаточными условиями плоской геометрии" являются следующие гипотезы:

А. Плоскость имеет два измерения.

В. Положение плоской фигуры в ее плоскости определяется тремя условиями.

Далее Пуанкаре ставит задачу выяснить, "какие заключения возможно извлечь из двух гипотез А и В". Математически задача состояла в определении всех трехпараметрических групп Ли преобразований плоскости (двумерного многообразия). Опуская подробные выкладки, Пуанкаре приводит предварительные и неполные результаты. По-видимому, сам Пуанкаре придавал значение в основном идейной стороне поставленной им задачи.

Софус Ли (1893) нашел все конечномерные локальные группы преобразований плоскости /25/, список которых воспроизведен в моно-

графии /26/ на стр. 25-26. Из этого списка достаточно просто выделяются все трехмерные группы, что и можно считать окончательным и полным решением задачи Пуанкаре. Однако следует заметить, что свою классификацию групп преобразований С. Ли провел с точностью до подобия (слабой эквивалентности в каждом изоморфном классе), так как допускал при сравнении групп не только замену координат на плоскости, но и замену параметров в параметрической группе. При вычислении же двухточечных инвариантов, оказывается, необходимо более тонкое различение групп преобразований, то есть необходимо провести их классификацию с точностью до эквивалентности (замены координат) в каждом изоморфном классе, чтобы учесть возможность их неэквивалентного взаимного расширения (более подробно см. §3 гл.II).

В настоящем параграфе автор находит с точностью до эквивалентности в каждом изоморфном классе все трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости. Полученный результат, опубликованный в работе /I2/, сопоставляется с соответствующим результатом С. Ли.

Рассмотрим локальную трехпараметрическую группу Ли локальных преобразований плоскости, задаваемую уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3), \\ y' &= \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3), \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

где $(x, y) \in \mathcal{U} \subset R^2$, $\lambda_x \sigma_y - \lambda_y \sigma_x \neq 0$ и параметры $a = (a^1, a^2, a^3)$ входят существенным образом (см. /24/). При специальном выборе параметров, когда, в частности, их нулевым значениям и только им соответствует тождественное преобразование окрестности $\mathcal{U} \subset R^2$, бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование, близкое к тождественному, запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a^1\lambda_1(x,y) + a^2\lambda_2(x,y) + a^3\lambda_3(x,y), \\ y' &= y + a^1\sigma_1(x,y) + a^2\sigma_2(x,y) + a^3\sigma_3(x,y), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где, например, $\lambda_1 = (\partial\lambda/\partial a^1)\big|_{a=0}$.

Операторы

$$X_\alpha = \lambda_\alpha(x,y)\partial_x + \sigma_\alpha(x,y)\partial_y , \qquad (3)$$

где $\alpha = 1,2,3$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$, задающие инфинитезимальные преобразования (2), линейно независимы и составляют базис трехмерной алгебры Ли с коммутаторами

$$[X_\alpha, X_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma .$$

Структурные константы $C^\gamma_{\alpha\beta}$ антисимметричны по нижним индексам α, β и удовлетворяют тождеству Якоби:

$$C^\delta_{\alpha\beta} C^\varepsilon_{\delta\gamma} + C^\delta_{\beta\gamma} C^\varepsilon_{\delta\alpha} + C^\delta_{\gamma\alpha} C^\varepsilon_{\delta\beta} = 0 .$$

Полная классификация с точностью до изоморфизма трехмерных вещественных абстрактных алгебр Ли была дана Бианки в 1918 г. Приведем ее здесь по монографии /27/:

$$[X_1, X_2] = 0 , \quad [X_3, X_1] = 0 , \quad [X_2, X_3] = 0 ; \qquad (4)$$

$$[X_1, X_2] = 0 , \quad [X_3, X_1] = 0 , \quad [X_2, X_3] = X_1 ; \qquad (5)$$

$$[X_1, X_2] = 0 , \quad [X_3, X_1] = -X_1 , \quad [X_2, X_3] = X_1 + X_2 ; \qquad (6)$$

$$[X_1, X_2] = 0 , \quad [X_3, X_1] = -X_1 , \quad [X_2, X_3] = \rho X_2 ; \qquad (7)$$

$$[X_1, X_2] = 0 , \quad [X_3, X_1] = -X_1 , \quad [X_2, X_3] = 0 ; \qquad (8)$$

$$[X_1, X_2] = 0 , \quad [X_3, X_1] = -X_1 , \quad [X_2, X_3] = -X_2 ; \qquad (9)$$

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_3, X_1] = -X_2,\ [X_2, X_3] = -X_1 + qX_2; \qquad (10)$$

$$[X_1, X_2] = 0,\ [X_3, X_1] = -X_2,\ [X_2, X_3] = -X_1; \qquad (11)$$

$$[X_1, X_2] = X_3,\ [X_3, X_1] = X_2,\ [X_2, X_3] = X_1; \qquad (12)$$

$$[X_1, X_2] = X_3,\ [X_3, X_1] = X_2,\ [X_2, X_3] = -X_1. \qquad (13)$$

где $p \neq 0, -1;\ 0 < q^2 < 4.$

Алгебры Ли преобразований с фиксированными базисами назовем эквивалентными, если их базисные операторы переходят друг в друга при некоторой локально обратимой (невырожденной) замене координат. Заметим, что их слабая эквивалентность (подобие) предполагает лишь возможность перехода в одной из алгебр к другому базису, чем и отличается от эквивалентности. Эквивалентные алгебры Ли всегда изоморфны с точностью до совпадения структурных констант в соответствующих базисах, в то время как изоморфные алгебры могут оказаться неэквивалентными. Например, алгебры групп движений плоскости Лобачевского и симплектической плоскости имеют изоморфную структуру (13), но их базисные операторы в этой структуре не переходят друг в друга ни при какой замене координат.

Т е о р е м а. Базисные операторы X_1, X_2, X_3 трехмерной алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований плоскости, имеющей структуру (4) – (13), с точностью до эквивалентности задаются следующими выражениями:

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ \lambda(y)\partial_x; \qquad (4.1)$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ -\partial_y; \qquad (5.1)$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ y\partial_x + \delta\partial_y; \qquad (5.2)$$

$$\partial_x\,,\ y\partial_x\,,\ x\partial_x - \partial_y\,; \tag{6.I}$$

$$\partial_x\,,\ \partial_y\,,\ (x+y)\partial_x + y\partial_y\,; \tag{6.2}$$

$$\partial_x\,,\ y\partial_x\,,\ x\partial_x + y(1-\rho)\partial_y\,; \tag{7.I}$$

$$\partial_x\,,\ \partial_y\,,\ x\partial_x + \rho y\partial_y\,; \tag{7.2}$$

$$\partial_x\,,\ y\partial_x\,,\ x\partial_x + y\partial_y\,; \tag{8.I}$$

$$\partial_x\,,\ \partial_y\,,\ x\partial_x + \delta\partial_y\,; \tag{8.2}$$

$$\partial_x\,,\ y\partial_x\,,\ x\partial_x + 2y\partial_y\,; \tag{9.I}$$

$$\partial_x\,,\ \partial_y\,,\ x\partial_x - y\partial_y\,; \tag{9.2}$$

$$\partial_x\,,\ y\partial_x\,,\ xy\partial_x + (1 - qy + y^2)\partial_y\,; \tag{I0.I}$$

$$\partial_x\,,\ \partial_y\,,\ -y\partial_x + (x + qy)\partial_y\,; \tag{I0.2}$$

$$\partial_x\,,\ y\partial_x\,,\ xy\partial_x + (1+y^2)\partial_y\,; \tag{II.I}$$

$$\partial_x\,,\ \partial_y\,,\ -y\partial_x + x\partial_y\,; \tag{II.2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \partial_x\,,\ tgy\sin x\,\partial_x + \cos x\,\partial_y\,, \\ \qquad tgy\cos x\,\partial_x - \sin x\,\partial_y\,; \end{array}\right\} \tag{I2.I}$$

$$\partial_x\,,\ \sin x\,\partial_x\,,\ \cos x\,\partial_x\,; \tag{I3.I}$$

$$\partial_x\,,\ \sin x\,\partial_x + \cos x\,\partial_y\,,\ \cos x\,\partial_x - \sin x\,\partial_y\,; \tag{I3.2}$$

$$\left.\begin{array}{r} \partial_x,\ -thy\sin x\,\partial_x + \cos x\,\partial_y, \\ -thy\cos x\,\partial_x - \sin x\,\partial_y; \end{array}\right\} \qquad (13.3)$$

$$\left.\begin{array}{r} \partial_x,\ -cthy\sin x\,\partial_x + \cos x\,\partial_y, \\ -cthy\cos x\,\partial_x - \sin x\,\partial_y, \end{array}\right\} \qquad (13.4)$$

где $p \neq 0, -1$; $0 < q^2 < 4$; $\lambda_y \neq const$; δ - любое число.

Алгебра (9.2) есть алгебра группы движений (изометрий) плоскости Минковского, (11.2) - евклидовой плоскости, (12.1) - двумерной сферы, (13.2) - симплектической плоскости, (13.3) - однополостного двумерного гиперболоида в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, (13.4) - плоскости Лобачевского, (5.1) плоскости Галилея, (9.1) - антипсевдоевклидовой плоскости, (11.1) - антиевклидовой плоскости и т.д. Приведенные в теореме результаты исчерпывают все возможные трехмерные локальные группы Ли локальных преобразований плоскости, задающие в этой плоскости все возможные двумерные геометрии, удовлетворяющие двум гипотезам Пуанкаре. Девять геометрий Кэли-Клейна на плоскости (см., например, /28/), естественно, входят сюда как частный случай. Заметим, что алгебры (5.1) и (5.2) слабо эквивалентны, так же, как и алгебры (8.2) с различными значениями δ , поэтому С. Ли в своей классификации их отождествляет (см. конец параграфа). Однако эквивалентности между этими алгебрами в соответствующих базисах нет.

Произведем в плоскости локально обратимую гладкую замену координат;

$$\xi = \varphi(x, y) \ , \ \eta = \psi(x, y) , \qquad (14)$$

где $\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x \neq 0$. В новых координатах ξ, η для инфинитезимальных операторов (3) будем иметь выражения:

$$X_\alpha = (\lambda_\alpha \varphi_x + \sigma_\alpha \varphi_y)\partial_\xi + (\lambda_\alpha \psi_x + \sigma_\alpha \psi_y)\partial_\eta . \qquad (15)$$

Если функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ являются некоторыми решениями интегрируемых уравнений $\lambda_1 \varphi_x + \sigma_1 \varphi_y = 1$, $\lambda_1 \psi_x + \sigma_1 \psi_y = 0$, в которых, очевидно, $\lambda_1^2 + \sigma_1^2 \neq 0$, то для оператора X_1 получим максимально простое выражение: $X_1 = \partial_\xi$. Возвращаясь в (15) к прежним обозначениям коэффициентов и координат, можем записать:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x , \\ X_2 &= \lambda_2(x,y)\partial_x + \sigma_2(x,y)\partial_y , \\ X_3 &= \lambda_3(x,y)\partial_x + \sigma_3(x,y)\partial_y . \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

то есть $\lambda_1 = 1, \sigma_1 = 0$. Заметим, что выражения (16) допускают замену координат

$$\xi = x + \varphi(y), \quad \eta = \psi(y), \qquad (17)$$

сохраняющую за X_1 максимально простую форму.

По классификации (4) – (13) коммутатор $[X_1, X_2]$ либо равен нулю, либо совпадает с оператором X_3 . Рассмотрим сначала первый случай:

$$[X_1, X_2] = 0 . \qquad (18)$$

Подставим в коммутатор (18) выражения (16) для операторов X_1 и X_2 : $\lambda_{2x}(x,y) = 0$, $\sigma_{2x}(x,y) = 0$, то есть $\lambda_2(x,y) = \lambda(y)$, $\sigma_2(x,y) = \sigma(y)$ и потому

$$X_2 = \lambda(y)\partial_x + \sigma(y)\partial_y .$$

В последнем результате осуществим допустимую замену координат (I7):

$$X_2 = (\lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y))\partial_\xi + \sigma(y)\psi'(y)\partial_\eta .$$

Если $\sigma(y) = 0$, то $X_2 = \lambda(y)\partial_\xi$, причем $\lambda(y) \neq const$, так как операторы X_1, X_2 в базисе (I6) линейно независимы. Полагая $\psi(y) = \lambda(y)$ и возвращаясь к прежним обозначениям координат, получаем выражения:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x , \quad X_2 = y\partial_x , \\ X_3 &= \lambda(x,y)\partial_x + \sigma(x,y)\partial_y , \end{aligned}\right\} \tag{I9}$$

сохраняющие свою форму при замене

$$\xi = x + \varphi(y) , \quad \eta = y . \tag{20}$$

Если же $\sigma(y) \neq 0$, то функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ возьмем из решений уравнений $\lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y) = 0$, $\sigma(y)\psi'(y) = 1$. В этом случае будем иметь выражения

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x , \quad X_2 = \partial_y , \\ X_3 &= \lambda(x,y)\partial_x + \sigma(x,y)\partial_y , \end{aligned}\right\} \tag{2I}$$

сохраняющиеся при замене координат

$$\xi = x + a , \quad \eta = y + b . \tag{22}$$

Пусть теперь операторы (I9), (2I) удовлетворяют следующему условию коммутирования:

$$[X_3, X_1] = 0 . \tag{23}$$

Подставим в условие (23) сначала операторы (I9): $\lambda_x(x,y)\partial_x + \sigma_x(x,y)\partial_y = 0$, откуда следует $\lambda_x(x,y) = 0$, $\sigma_x(x,y) = 0$,

то есть $\lambda(x,y)=\lambda(y)$, $\sigma(x,y)=\sigma(y)$ и потому

$$X_3=\lambda(y)\partial_x+\sigma(y)\partial_y. \tag{24}$$

В полученном выражении для X_3 произведем допустимую замену координат (20):

$$X_3=(\lambda(y)+\sigma(y)\varphi'(y))\partial_\xi+\sigma(y)\partial_\eta.$$

Если $\sigma(y)\equiv 0$, то $X_3=\lambda(y)\partial_\xi$, причем функция $\lambda(y)$ нелинейна, так как операторы (I9) линейно независимы с постоянными коэффициентами. Если же $\sigma(y)\neq 0$, то функцию $\varphi(y)$ можно взять из решений уравнения $\lambda(y)+\sigma(y)\varphi'(y)=0$ и тогда $X_3=$ $=\sigma(y)\partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, можем записать:

$$X_1=\partial_x\,,\ X_2=y\partial_x\,,\ X_3=\lambda(y)\partial_x\,; \tag{25}$$

$$X_1=\partial_x\,,\ X_2=y\partial_x\,,\ X_3=\sigma(y)\partial_y\,, \tag{26}$$

где $\lambda'(y)\neq const$, $\sigma(y)\neq 0$.

При подстановке операторов (2I) в условие (23) аналогично получаем выражение (24), то есть

$$\left.\begin{aligned} &X_1=\partial_x\,,\ X_2=\partial_y\,,\\ &X_3=\lambda(y)\partial_x+\sigma(y)\partial_y\,, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

причем функции $\lambda(y)$ и $\sigma(y)$ одновременно не должны быть постоянными, но тогда либо $\lambda'(y)\neq 0$, либо $\sigma'(y)\neq 0$, так как операторы X_1,X_2,X_3 линейно независимы. Заметим, что выражения (27) сохраняются при замене координат (22).

Выясним теперь, какие возникают дополнительные ограничения на операторы (25), (26), (27), если третий коммутатор обращается в 0:

$$[X_2, X_3] = 0. \qquad (28)$$

Для операторов (25) условие (28) выполняется всегда. Для операторов (26) имеем: $[X_2, X_3] = -\sigma(y)\partial_x \neq 0$, так как $\sigma(y) \neq 0$. Для операторов (27) получаем; $[X_2, X_3] = \lambda'(y)\partial_x + \sigma'(y)\partial_y \neq 0$, так как либо $\lambda'(y) \neq 0$, либо $\sigma'(y) \neq 0$. Таким образом, Условие (28) выполняется только для операторов (25), которые и составляют базис (4.I) трехмерной абелевой алгебры.

Пусть, далее, операторы (26) - (27) удовлетворяют следующему условию коммутирования;

$$[X_2, X_3] = X_1 . \qquad (29)$$

Для операторов (26) из условия (29) получаем; $\sigma(y) = -1$, то есть $X_3 = -\partial_y$. Из этого же условия для операторов (27) имеем: $\lambda'(y) = 1$, $\sigma'(y) = 0$, откуда: $\lambda(y) = y + b$, $\sigma(y) = \delta = const$ и потому $X_3 = (y + b)\partial_x + \delta\partial_y$, где δ - произвольная постоянная. Допустимой заменой координат (22) можно исключить аддитивное слагаемое b , однако невозможно исключить постоянную δ . В результате, из выражений (26), (27) получаем базисные операторы (5.I) и (5.2) двух трехмерных алгебр Ли, имеющих структуру (5). Заметим, что эти алгебры слабо эквивалентны, но не эквивалентны, так как их базисы не переходят друг в друга ни при какой самой общей замене координат (I4).

Пусть операторы (I9), (2I) с коммутатором (I8) удовлетворяют условию

$$[X_3, X_1] = -X_1 . \qquad (30)$$

Для операторов (I9) из условия (30) получаем; $\lambda_x(x,y)\partial_x + \sigma_x(x,y)\partial_y = \partial_x$, то есть $\lambda_x(x,y) = 1$, $\sigma_x(x,y) = 0$, откуда после интегрирования: $\lambda(x,y) = x + \lambda(y)$, $\sigma(x,y) = \sigma(y)$

и потому

$$X_3 = (x + \lambda(y))\partial_x + \sigma(y)\partial_y . \qquad (31)$$

Произведем допустимую замену координат (20):

$$X_3 = (x + \lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y))\partial_\xi + \sigma(y)\partial_\eta .$$

Если функцию $\varphi(y)$ взять из решений уравнения: $-\varphi(y) + \lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y) = 0$, очевидно, всегда интегрируемого, то для оператора X_3 получим более простое выражение: $X_3 = \xi\partial_\xi + \sigma(\eta)\partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, можем записать:

$$X_1 = \partial_x , \; X_2 = y\partial_x , \; X_3 = x\partial_x + \sigma(y)\partial_y . \qquad (32)$$

Операторы (19) и (21) отличаются только выражением для оператора X_2, которого нет в условии (30). Поэтому в отношении операторов (21) условие (30) приводит к прежнему результату (31). В итоге получаем:

$$X_1 = \partial_x , \; X_2 = \partial_y , \; X_3 = (x + \lambda(y))\partial_x + \sigma(y)\partial_y . \qquad (33)$$

Операторы (32), (33) удовлетворяют двум условиям коммутирования (18) и (30). Предположим, что имеет место еще третье условие:

$$[X_2, X_3] = X_1 + X_2 . \qquad (34)$$

Для операторов (32) это означает: $(y - \sigma(y))\partial_x = (y+1)\partial_x$, то есть $\sigma(y) = -1$. В результате получаем базис (6.1) с коммутаторами (6). Для операторов (33) из условия (34) получаем: $\lambda'(y)\partial_x + \sigma'(y)\partial_y = \partial_x + \partial_y$, то есть $\lambda'(y) = 1$, $\sigma'(y) = 1$ и после интегрирования: $\lambda(y) = y + a$, $\sigma(y) = y + b$. Поэтому a и b в выражении для X_3 можно исключить допустимой заменой координат (22). В итоге приходим к базису (6.2) трехмерной алгебры Ли с теми же коммутационными соотношениями (6), которая, хотя и

изоморфна алгебре с базисом (6.I), не только ей не эквивалентна, но даже слабо не эквивалентна. Поэтому в классификации С. Ли алгебры с базисами (6.I) и (6.2) представлены отдельно.

Предположим теперь, что операторы (32) (33) удовлетворяют другому третьему условию коммутирования:

$$[X_2, X_3] = \rho X_2 , \tag{35}$$

где $\rho \neq 0, -1$.

Для операторов (32) имеем из условия (35): $(y - \sigma(y))\partial_x = \rho y \partial_x$, то есть $\sigma(y) = (1-\rho)y$. В результате получаем базисные операторы (7.I) трехмерной алгебры Ли с коммутаторами (7). Для операторов (33) условие (35) означает: $\lambda'(y)\partial_x + \sigma'(y)\partial_y = \rho\partial_y$, то есть $\lambda'(y) = 0, \sigma'(y) = \rho$. После интегрирования получаем: $\lambda(y) = a$, $\sigma(y) = \rho y + b$ и потому $X_3 = (x+a)\partial_x + (\rho y + b)\partial_y$. Поскольку $\rho \neq 0$, постоянные a и b можно исключить допустимой заменой координат (22): $\xi = x + a$, $\eta = y + b/\rho$, после чего приходим к базису (7.2) трехмерной алгебры Ли с теми же коммутаторами (7). Аналогично предыдущему случаю, изоморфные алгебры с базисами (7.I), (7.2) слабо неэквивалентны и потому представлены в классификации С. Ли отдельно.

Заметим, что при получении операторов (7.I) ограничительное условие $\rho \neq 0, -1$ не было использовано, но выражение для оператора X_3 в базисе (7.2) упрощалось заменой координат, в которой должно быть $\rho \neq 0$. Поэтому базисные операторы (8.I) и (8.2) трехмерных неэквивалентных алгебр Ли с коммутаторами (8) можно получить соответственно из базиса (7.I) и базиса (7.2) до упрощения выражения для X_3, полагая в них $\rho = 0$ и производя во втором из них замену координат $\xi = x + a$, $\eta = y$. Если же в базисах (7.I) и (7.2) положить $\rho = -1$, то придем соответственно к базисам (9.I) и (9.2) трехмерных алгебр Ли с коммутаторами (9). Заме-

тим, что если в базисе (8.2) варьировать постоянную δ, то получим множество неэквивалентных трехмерных алгебр Ли, которые все слабо эквивалентны между собой и потому отождествляются между собой и случаем $\delta = 0$ в классификации С. Ли.

Будем теперь предполагать, что операторы (I9), (2I) удовлетворяют условию коммутирования

$$[X_3, X_1] = -X_2 . \tag{36}$$

Для операторов (I9) это означает: $\lambda_x(x,y)\partial_x + \sigma_x(x,y)\partial_y = y\partial_x$, то есть $\lambda_x(x,y) = y$, $\sigma_x(x,y) = 0$, откуда после интегрирования: $\lambda(x,y) = xy + \lambda(y)$, $\sigma(x,y) = \sigma(y)$ и потому $X_3 = (xy + \lambda(y))\partial_x + \sigma(y)\partial_y$. Произведем допустимую замену координат (20): $X_3 = (xy + \lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y))\partial_\xi + \sigma(y)\partial_\eta$ и функцию $\varphi(y)$ возьмем из решений уравнения $-y\varphi(y) + \sigma(y)\varphi'(y) + \lambda(y) = 0$, всегда, очевидно, интегрируемого. Тогда для оператора X_3 будем иметь более простое выражение: $X_3 = \xi\eta\partial_\xi + \sigma(\eta)\partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям координат, можем записать:

$$X_1 = \partial_x , \quad X_2 = y\partial_x , \quad X_3 = xy\partial_x + \sigma(y)\partial_y . \tag{37}$$

Для операторов (2I) из условия (36) получаем: $\lambda_x(x,y)\partial_x + \sigma_x(x,y)\partial_y = \partial_y$, то есть $\lambda_x(x,y) = 0$, $\sigma_x(x,y) = 1$, откуда после интегрирования: $\lambda(x,y) = \lambda(y)$, $\sigma(x,y) = x + \sigma(y)$ и потому

$$X_1 = \partial_x , \quad X_2 = \partial_y , \quad X_3 = \lambda(y)\partial_x + (x + \sigma(y))\partial_y \tag{38}$$

с допустимой заменой координат (22).

Пусть, далее, операторы (37), (38), удовлетворяющие двум условиям коммутирования (I8) и (36), подчиняются дополнительно третьему условию

$$[X_2, X_3] = -X_1 + qX_2 , \tag{39}$$

где $0 < q^2 < 4$.

Для операторов (37) в этом случае имеем: $(y^2 - \sigma(y))\partial_x = (-1 + qy)\partial_x$, то есть $\sigma(y) = 1 - qy + y^2$ и мы приходим к базису (I0.I) трехмерной алгебры Ли с коммутаторами (I0). Для операторов (38) из условия (39) получаем: $\lambda'(y)\partial_x + \sigma'(y)\partial_y = -\partial_x + q\partial_y$, то есть $\lambda'(y) = -1$, $\sigma'(y) = q$, откуда после интегрирования: $\lambda(y) = -y + a$, $\sigma(y) = qy + b$ и потому $X_3 = (-y + a)\partial_x + (x + qy + b)\partial_y$. Постоянные a и b в выражениях для X_3 исключаются допустимой заменой координат (22), которая в данном конкретном случае запишется так: $\xi = x + qa + b$, $\eta = y - a$. В результате получаем базис (I0.2) трехмерной алгебры Ли с коммутаторами (I0), которая не эквивалентна (и слабо не эквивалентна) трехмерной алгебре (I0.I), имеющей ту же структуру (I0). Поскольку в предыдущих рассуждениях ограничение $q \neq 0$ в условии (39) не было использовано, полагая в выражениях (I0.I) и (I0.2) $q = 0$, получаем базисы(II.I) и (II.2) двух изоморфных, но не эквивалентных (и слабо не эквивалентных) трехмерных алгебр Ли с коммутаторами (II).

Выше был полностью рассмотрен случай, когда по классификации (4) - (I3) первый коммутатор обращается в нуль. Перейдем к рассмотрению другого возможного случая, когда этот коммутатор отличен от нуля:

$$[X_1, X_2] = X_3. \qquad (40)$$

Подставим в условие (40) выражения (I6), опустив, в целях сокращения записи, индекс "2" в операторе X_2: $\lambda_x(x,y)\partial_x + \sigma_x(x,y)\partial_y = \lambda_3(x,y)\partial_x + \sigma_3(x,y)\partial_y$, то есть $\lambda_3(x,y) = \lambda_x(x,y)$, $\sigma_3(x,y) = \sigma_x(x,y)$ и потому

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x\,,\ X_2 = \lambda(x,y)\partial_x + \sigma(x,y)\partial_y\,, \\ X_3 = \lambda_x(x,y)\partial_x + \sigma_x(x,y)\partial_y\,. \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Пусть теперь операторы (41) удовлетворяют второму условию коммутирования

$$[X_3, X_1] = X_2\,, \qquad (42)$$

откуда, подставляя их в это условие, находим: $\lambda_{xx}(x,y)\partial_x + \sigma_{xx}(x,y)\partial_y = -\lambda(x,y)\partial_x - \sigma(x,y)\partial_y$, в результате чего получаем линейные дифференциальные уравнения второго порядка для функций $\lambda(x,y)$ и $\sigma(x,y)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{xx}(x,y) + \lambda(x,y) = 0\,, \\ \sigma_{xx}(x,y) + \sigma(x,y) = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Общее решение каждого из уравнений системы (43) хорошо известно:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x,y) = \lambda(y)\sin x + \mu(y)\cos x\,, \\ \sigma(x,y) = \sigma(y)\sin x + \nu(y)\cos x\,, \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

где функции $\lambda(y), \mu(y), \sigma(y), \nu(y)$ произвольны, но не обращаются в нуль одновременно, так как операторы (41) линейно независимы. Для этих операторов с использованием решений (44) получаем следующие выражения;

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x\,, \\ X_2 = (\lambda(y)\sin x + \mu(y)\cos x)\partial_x + (\sigma(y)\sin x + \nu(y)\cos x)\partial_y\,, \\ X_3 = (\lambda(y)\cos x - \mu(y)\sin x)\partial_x + (\sigma(y)\cos x - \nu(y)\sin x)\partial_y\,. \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Произведем в выражениях (45) допустимую замену координат (I7), сохраняющую простую форму оператора X_1 . При этом получим: $X_1 = \partial_\xi$,

$$X_2 = ((\mu + \nu\varphi')\sin\varphi + (\lambda + \sigma\varphi')\cos\varphi)\sin\xi +$$

$$+ (-(\lambda + \sigma\varphi')\sin\varphi + (\mu + \nu\varphi')\cos\varphi)\cos\xi)\partial_\xi +$$

$$+ ((\nu\sin\varphi + \sigma\cos\varphi)\sin\xi + (-\sigma\sin\varphi + \nu\cos\varphi)\cos\xi)\psi'\partial_\eta$$

и аналогично для X_3 , где функции $\lambda, \mu, \sigma, \nu, \varphi, \psi$ зависят только от координаты y . Функцию $\varphi(y)$ замены координат (I7) возьмем из решений уравнения $(\lambda + \sigma\varphi')\sin\varphi - (\mu + \nu\varphi')\cos\varphi = 0$, очевидно, всегда интегрируемого. Если при этом функции $\sigma(y)$ и $\nu(y)$ обращаются в нуль, то, возвращаясь к прежним обозначениям, получим:

$$X_1 = \partial_x\,,\quad X_2 = \lambda(y)\sin x\,\partial_x\,,\quad X_3 = \lambda(y)\cos x\,\partial_x\,. \tag{46}$$

Если же хотя бы одна из функций $\sigma(y)$ и $\nu(y)$ отлична от нуля и при этом $\nu\sin\varphi + \sigma\cos\varphi \neq 0$, то вторую функцию $\psi(y)$ замены координат (I7) возьмем из решений уравнения $(\nu\sin\varphi + \sigma\cos\varphi)\psi' = 1$. Тогда в прежних обозначениях можем записать:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \partial_x\,,\\ X_2 &= \lambda(y)\sin x\,\partial_x + (\sin x + \nu(y)\cos x)\partial_y\,,\\ X_3 &= \lambda(y)\cos x\,\partial_x + (\cos x - \nu(y)\sin x)\partial_y\,, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Если же, наконец, при $\sigma^2 + \nu^2 \neq 0$ будет $\nu\sin\varphi + \sigma\cos\varphi = 0$, то должно быть: $-\sigma\sin\varphi + \nu\cos\varphi \neq 0$ и функцию $\psi(y)$ возьмем из решений уравнения $(-\sigma\sin\varphi + \nu\cos\varphi)\psi' = 1$. И тогда в прежних обозначениях для операторов (45) можем записать:

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x\,,\ X_2 = \lambda(y)\sin x\,\partial_x + \cos x\,\partial_y\,,\\ X_3 = \lambda(y)\cos x\,\partial_x - \sin x\,\partial_y\,. \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

Предположим теперь, что операторы (46), (47), (48), удовлетворяющие двум условиям коммутирования (40) и (42), подчиняются еще третьему условию алгебраической структуры (I2):

$$[X_2, X_3] = X_1\,. \qquad (49)$$

Для операторов (46) это условие не выполняется: $-\lambda^2\partial_x = \partial_x$, то есть $\lambda^2 = -1$, что невозможно, так как функция $\lambda(y)$ вещественная. Подставим в условие (49) операторы (47): $(-\lambda^2 + \lambda'\nu)\partial_x - (\lambda + \nu')\partial_y = \partial_x$, откуда получаем связь: $\lambda + \nu' = 0$. Произведем в выражениях (47) допустимую замену координат (I7):

$$X_2 = ((\nu\varphi'\sin\varphi + (\lambda+\varphi')\cos\varphi)\sin\xi +$$

$$+(-(\lambda+\varphi')\sin\varphi + \nu\varphi'\cos\varphi)\cos\xi)\partial_\xi +$$

$$+((\nu\sin\varphi+\cos\varphi)\sin\xi + (-\sin\varphi+\nu\cos\varphi)\cos\xi)\psi'\partial_\eta$$

и аналогично для X_3. Функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ замены координат (I7) возьмем из решений следующих двух уравнений: $\nu\sin\varphi + \cos\varphi = 0$, $(-\sin\varphi + \nu\cos\varphi)\psi' = 1$. С учетом полученной выше связи $\lambda + \nu' = 0$ будем иметь также, как легко проверить, еще одно соотношение: $-(\lambda+\varphi')\sin\varphi + \nu\varphi'\cos\varphi = 0$. В результате, возвращаясь к прежним обозначениям координат и функций, получаем выражения (48). Подставим теперь в условие (49) операторы (48): $(\lambda' - \lambda^2)\partial_x = \partial_x$, откуда получаем уравнение: $\lambda' - \lambda^2 = 1$, которое имеет единственное решение: $\lambda(y) = tg(y+a)$. Постоянную a в выражениях (48) можно исключить следующей заменой координат: $\xi = x$, $\eta = y + a$. В результате приходим к единственно возможному в

пределах эквивалентности (и тем более, слабой эквивалентности) базису (I2.I) трехмерной алгебры Ли с коммутаторами (I2).

Предположим, в заключение, что операторы (46), (47), (48) подчиняются дополнительно условию коммутирования

$$[X_2, X_3] = -X_1 \qquad (50)$$

алгебраической структуры (I3). Для операторов (46) это означает: $\lambda^2 \partial_x = \partial_x$, то есть $\lambda^2 = 1$ и потому $\lambda = \pm 1$. При $\lambda(y) = +1$ получаем базис (I3.I)трехмерной алгебры Ли с коммутаторами (I3). Если же $\lambda(y) = -1$, то произведя замену координат $\xi = x + \tilde{\pi}$, $\eta = y$, получаем, в прежних обозначениях, тот же базис (I3.I). Если же подставить в условие (50)операторы (47), то, совершенно аналогично предыдущему случаю, получим связь: $\lambda + \nu' = 0$. Используя эту связь и производя в выражениях (47), как и раньше, замену координат (I7), с функциями $\varphi(y)$ и $\psi(y)$, удовлетворяющими уравнениям $\nu \sin\varphi + \cos\varphi = 0$, $(-\sin\varphi + \nu\cos\varphi)\psi' = 1$, получим операторы (48). Для этих же операторов условие (50), как легко проверить, приводит к уравнению: $\lambda' - \lambda^2 + 1 = 0$, которое имеет три различных решения: $\lambda(y) = \pm 1$, $\lambda(y) = -th(y+a)$, $\lambda(y) = -cth(y+a)$. При $\lambda(y) = +1$ из выражений (48)получаем базис (I3.2)трехмерной алгебры Ли с коммутаторами (I3). Если же $\lambda(y) = -1$, то после замены координат $\xi = x + \tilde{\pi}$, $\eta = -y$ приходим к тому же базису (I3.2). И, наконец, подставляя второе и третье решение уравнения $\lambda' - \lambda^2 + 1 = 0$ в операторы (48) получаем соответственно базисы (I3.3) и (I3.4)двух трехмерных алгебр Ли с коммутаторами (I3). Постоянная a при этом исключается заменой координат $\xi = x$, $\eta = y + a$. Заметим, что, в отличие от предыдущего случая, для структуры (I3) в пределах эквивалентности (и слабой эквивалентности) имеются четыре различные изоморфные трехмерные алгебры с базисами (I3.I), (I3.2), (I3.3) и (I3.4). Если в выраже-

ниях (I3.2), (I3.3), (I3.4) произвести соответственно следующие замены координат:

$$\xi = \sin x/(\cos x+1),\ \eta = \exp y/(\cos x+1);$$

$$\xi = \sin x/(\cos x-\operatorname{th} y),\ \eta = 1/\operatorname{ch} y(\cos x-\operatorname{th} y);$$

$$\xi = \sin x/(\cos x-\operatorname{cth} y),\ \eta = 1/\operatorname{sh} y(\cos x-\operatorname{cth} y),$$

то для них всех получаем единообразную запись (после возвращения к прежним обозначениям этих координат);

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \tfrac{1}{2}(1+x^2-\varepsilon y^2)\partial_x + xy\partial_y, \\ X_2 &= x\partial_x + y\partial_y, \\ X_3 &= \tfrac{1}{2}(1-x^2+\varepsilon y^2)\partial_x - xy\partial_y, \end{aligned}\right\} \qquad (5I)$$

где $\varepsilon = 0$ для (I3.2), $\varepsilon = -1$ для (I3.3), $\varepsilon = +1$ для (I3.4).

Как уже было сказано в начале этого параграфа, С. Ли проводил классификацию групп преобразований с точностью до слабой эквивалентности (подобия). На языке соответствующих алгебр Ли это означает, что при сопоставлении двух алгебр одинаковой размерности допускается не только замена координат в базисных операторах одной из них, но и отдельное линейное преобразование этого базиса. Выделим из полного списка конечномерных алгебр Ли преобразований плоскости составленного С. Ли в I893 г., базисные операторы $У_1, У_2, У_3$ всех трехмерных алгебр:

34. $\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_y - y\partial_x + c(x\partial_x + y\partial_y);$

35. $\left\{\begin{aligned} &\partial_x + (x^2-y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, \\ &\partial_y + 2xy\partial_x + (y^2-x^2)\partial_y,\ y\partial_x - x\partial_y; \end{aligned}\right.$

36. $\begin{cases} \partial_x - (x^2-y^2)\partial_x - 2xy\partial_y, \\ \partial_y - 2xy\partial_x - (y^2-x^2)\partial_y, \ y\partial_x - x\partial_y; \end{cases}$

II'. $exp\, d x\, \partial_y,\ y\partial_y,\ \partial_x;$

I2. $\partial_y,\ x\partial_y,\ y\partial_y;$

I4. $\partial_x,\ 2x\partial_x + y\partial_y,\ x^2\partial_x + xy\partial_y;$

I6. $\partial_y,\ \partial_x,\ x\partial_x + (x+y)\partial_y;$

$I7_1'$. $exp\, d x\, \partial_y,\ x\, exp\, d x\, \partial_y,\ \partial_x;$

$I7_2'$. $exp\, d x \cos \beta x\, \partial_y,\ \partial_x,\ exp\, d x \sin \beta x\, \partial_y,\ \beta \neq 0;$

$I7_3'$. $exp\, d_1 x\, \partial_y,\ exp\, d_2 x\, \partial_y,\ \partial_x,\ d_1 \neq d_2,\ d_1 \neq 0;$

I8. $\partial_y,\ x\partial_y,\ F(x)\partial_y;$

20. $\partial_x + \partial_y,\ x\partial_x + y\partial_y,\ x^2\partial_x + y^2\partial_y;$

23. $\partial_y,\ y\partial_y,\ y^2\partial_y;$

25. $\partial_y,\ \partial_x,\ x\partial_x + cy\partial_y,\ c \neq 0, 1;$

26. $\partial_y,\ y\partial_y,\ \partial_x;$

28. $\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x + y\partial_y,$

где слева указан номер по классификации С. Ли (см. /26/, с.25-27).

Результаты данного параграфа, изложенные в теореме, сопоставим в пределах слабой эквивалентности (подобия) с приведенной то-

лько что классификацией С. Ли. Для каждой трехмерной алгебры Ли из этой классификации укажем такое линейное преобразование ее базиса Y_1, Y_2, Y_3 и такую замену координат в нем: $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, при которых получатся базисные операторы X_1, X_2, X_3 из списка теоремы (при возвращении, естественно, к прежним обозначениям координат). Заметим, что в пределах подобия (слабой эквивалентности) следует выпустить все алгебры (5.2), подобные алгебре (5.I), и алгебры (8.2) с $\delta \neq 0$, подобные этой же алгебре с $\delta = 0$.

Итак, трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости из классификации С. Ли слабо эквивалентны следующим алгебрам из классификационной теоремы данного параграфа:

алгебра 34. - алгебре (I0.2) с $q = 2c/\sqrt{1+c^2}$ при $c \neq 0$ и алгебре (II.2) при $c = 0$;

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = Y_1,\ X_2 = (cY_1 + Y_2)/\sqrt{1+c^2},\ X_3 = Y_3/\sqrt{1+c^2}, \\ \xi = x - cy,\ \eta = \sqrt{1+c^2}\,y; \end{array}\right\}$$

алгебра 35. - алгебре (I2.I);

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = Y_1/2,\ X_2 = Y_2/2,\ X_3 = Y_3, \\ \xi = \operatorname{arctg} 2x/(1-x^2-y^2),\ \eta = \arcsin 2y/(1+x^2+y^2); \end{array}\right\}$$

алгебра 36. - алгебре (I3.4);

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = Y_3,\ X_2 = Y_1/2,\ X_3 = Y_2/2, \\ \xi = -\operatorname{arctg} y/x,\ \eta = \operatorname{arcth}(1+x^2+y^2)/2\sqrt{x^2+y^2}; \end{array}\right\}$$

алгебра II'. - алгебре (8.2);

$$X_1 = Y_1\,,\ X_2 = \alpha Y_2 + Y_3\,,\ X_3 = Y_2\,,\qquad \xi = y\exp(-\alpha x)\,,\ \eta = x;$$

алгебра I2. - алгебре (7.I) с $p = 1$:

$$X_1 = Y_1\,,\ X_2 = Y_2\,,\ X_3 = Y_3\,,\qquad \xi = y\,,\ \eta = x;$$

алгебра I4. - алгебре (I3.2):

$$X_1 = (Y_1 + Y_3)/2\,,\ X_2 = Y_2/2\,,\ X_3 = (Y_1 - Y_3)/2\,,\qquad \xi = \operatorname{arctg} 2x/(1-x^2)\,,\ \eta = 2\ln y/(1+x^2);$$

алгебра I6. - алгебре (6.2):

$$X_1 = Y_1\,,\ X_2 = Y_2\,,\ X_3 = Y_3\,,\qquad \xi = y\,,\ \eta = x;$$

алгебра $I7_1'$. - алгебре (5.I) при $\alpha = 0$:

$$X_1 = Y_1\,,\ X_2 = Y_2\,,\ X_3 = -Y_3\,,\qquad \xi = y\,,\ \eta = x$$

и алгебре (6.I) при $\alpha \neq 0$:

$$X_1 = Y_1/\alpha\,,\ X_2 = Y_2\,,\ X_3 = -Y_3/\alpha\,,\qquad \xi = \alpha y\exp(-\alpha x)\,,\ \eta = \alpha x;$$

алгебра $I7_2'$. - алгебре (I0.I) с $q = -2\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ при $\alpha \neq 0$ и

(II.I) при $\alpha = 0$:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= (\alpha Y_1 + \beta Y_3)/\beta \,,\; X_2 = -\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, Y_1/\beta \,,\; X_3 = Y_2/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \\ \xi &= \frac{\beta y \exp(-\alpha x)}{\beta \sin\beta x + \alpha\cos\beta x} \,,\; \eta = -\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\beta x}{\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x}; \end{aligned}\right\}$$

алгебра I7$'_3$. - алгебре (7.I) с $\rho = \alpha_2/\alpha_1$ при $\alpha_2/\alpha_1 \neq 0, -1$, алгебре (8.I) при $\alpha_2/\alpha_1 = 0$, алгебре (9.I) при $\alpha_2/\alpha_1 = -1$:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -Y_1/\alpha_1 \,,\; X_2 = Y_2 \,,\; X_3 = -Y_3/\alpha_1 \,, \\ \xi &= -\alpha_1 y \exp(-\alpha_1 x) \,,\; \eta = -\alpha_1 \exp(\alpha_2 - \alpha_1)x; \end{aligned}\right\}$$

алгебра I8. - алгебре (4.I):

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= Y_1 \,,\; X_2 = Y_2 \,,\; X_3 = Y_3 \,, \\ \xi &= y \,,\; \eta = x; \end{aligned}\right\}$$

алгебра 20. - алгебре (I3.3):

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= (Y_1 + Y_3)/2 \,,\; X_2 = Y_2 \,,\; X_3 = (Y_1 - Y_3)/2 \,, \\ \xi &= \operatorname{arctg}(x+y)/(1-xy) \,,\; \eta = -\operatorname{arth}(1+xy)/\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}; \end{aligned}\right\}$$

алгебра 23. - алгебре (I3.I):

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= (Y_1 + Y_3)/2 \,,\; X_2 = Y_2 \,,\; X_3 = (Y_1 - Y_3)/2, \\ \xi &= 2\operatorname{arctg} y \,,\; \eta = x; \end{aligned}\right\}$$

алгебра 25. - алгебре (7.2) с $\rho \neq 1$ при $c \neq -1$ и алгебре (9.2) при $c = -1$;

$$\left.\begin{aligned} X_1 = Y_2\,,\ X_2 = Y_1\,,\ X_3 = Y_3\,, \\ \xi = x\,,\ \eta = y\,; \end{aligned}\right\}$$

алгебра 26. - алгебре (8.2):

$$\left.\begin{aligned} X_1 = Y_1\,,\ X_2 = Y_3\,,\ X_3 = Y_2\,, \\ \xi = y\,,\ \eta = x\,; \end{aligned}\right\}$$

алгебра 28. - алгебре (7.2) с $\rho = 1$:

$$\left.\begin{aligned} X_1 = Y_1\,,\ X_2 = Y_2\,,\ X_3 = Y_3\,, \\ \xi = x\,,\ \eta = y\,. \end{aligned}\right\}$$

Проведенное сопоставление показывает, что в пределах слабой эквивалентности (подобия) имеется взаимно однозначное соответствие между множеством всех трехмерных алгебр Ли преобразований плоскости по классификации С. Ли и множеством трехмерных алгебр по классификационной теореме настоящего параграфа, причем у С. Ли алгебры II'. и 26. оказались подобными. Все это подтверждает полноту классификации С. Ли с точностью до подобия. Противоположное мнение автора, высказанное в начале работы /I2/, будто "список трехмерных алгебр у него (С. Ли) оказывается почему-то неполным", было ошибочным. Однако результаты работы /I2/, составляющие содержание данного параграфа, дополняют классификацию С. Ли с точностью до эквивалентности, когда при сравнении двух алгебр в каждом изоморфном классе допускается только замена координат. Из классификационной теоремы автора видно, что такое дополнение имеет место только в отношении двух трехмерных алгебр (5.I) и (8.2) с $\delta = 0$, имеющих структуру (5) и (8). Как будет видно по результатам §4 гл.

II, в четырехмерном случае такое дополнение имеет место для значительно большего числа алгебр классификации С. Ли.

§ 5. Метрика плоской (двумерной) геометрии как двухточечный инвариант

Согласно теореме 2 из §2 каждая из феноменологически инвариантных плоских метрик (2) - (11) является невырожденным двухточечным инвариантом трехпараметрической локальной группы Ли локальных преобразований плоскости

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3), \\ y' &= \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

По базисным операторам

$$X_\alpha = \lambda_\alpha(x, y)\partial_x + \sigma_\alpha(x, y)\partial_y, \qquad (2)$$

где $\alpha = 1, 2, 3$ соответствующих трехмерных алгебр Ли, полная классификация которых с точностью до эквивалентности в каждом изоморфном классе была проведена в предыдущем параграфе, можно сразу записать бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование плоскости, близкое к тождественному:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a^1\lambda_1(x, y) + a^2\lambda_2(x, y) + a^3\lambda_3(x, y), \\ y' &= y + a^1\sigma_1(x, y) + a^2\sigma_2(x, y) + a^3\sigma_3(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(см. выражения (1), (2), (3) из §4).

Пусть $i = (x(i), y(i)) \in U(i) \subset R^2$ и $j = (x(j), y(j)) \in U(j) \subset R^2$ - две различные точки плоскости. Функцию пары

$$f(ij) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)) \qquad (4)$$

будем называть локальной метрикой соответствующей плоской геомет-

рии, если она является двухточечным инвариантом группы преобразований (I) окрестностей $U(i)$ и $U(j)$, то есть удовлетворяет уравнению

$$f(x'(i), y'(i), x'(j), y'(j)) = f(x(i), y(i), x(j), y(j)) \qquad (5)$$

(см. выражение (30) и уравнение (33) из §3).

Метрику (4) будем понимать в самом общем смысле как такую достаточно гладкую функцию координат пары точек плоскости, которая сохраняется при преобразованиях (I). Никакие другие ограничения, в том числе и существенная зависимость от координат, не вводятся. Дополнительные свойства метрики, такие как симметрия, неравенство треугольника и т. д., могут вытекать из инвариантности метрики. В случае $f(ij) \equiv const$ будем считать метрику тривиальной.

Подставим в уравнение (5) бесконечно малые преобразования (3) окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ и продифференцируем его отдельно по каждому из независимых параметров a^1, a^2, a^3, полагая затем в результатах дифференцирования $a^1 = a^2 = a^3 = 0$:

$$\lambda_\alpha(i) \frac{\partial f(ij)}{\partial x(i)} + \sigma_\alpha(i) \frac{\partial f(ij)}{\partial y(i)} + \lambda_\alpha(j) \frac{\partial f(ij)}{\partial x(j)} + \sigma_\alpha(j) \frac{\partial f(ij)}{\partial y(j)} = 0, \qquad (6)$$

где, например, $\lambda_\alpha(i) = \lambda_\alpha(x(i), y(i)), \alpha = 1, 2, 3$. Таким образом, если метрика (4) является двухточечным инвариантом группы преобразований (I), то она необходимо является решением системы (6) трех линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка. Согласно инфинитезимальному критерию инвариантности (см. /24/, с. 77) это необходимое условие является также и достаточным. Систему уравнений (6) можно записать более коротко в операторной форме, используя выражения (2):

$$X_\alpha(i) f(ij) + X_\alpha(j) f(ij) = 0, \qquad (6')$$

где, например, $X_\alpha(i) = \lambda_\alpha(i)\partial/\partial x(i) + \sigma_\alpha(i)\partial/\partial y(i)$.

В отношении системы уравнений (6′) необходимо сделать следующее существенное разъяснение. Базисные операторы $X_\alpha(i)$ задают преобразование окрестности $U(i) \subset R^2$, а операторы $X_\alpha(j)$ – окрестности $U(j) \subset R^2$. При вычислении двухточечного инварианта $f(ij)$ по уравнениям (6′) фактически рассматривается преобразование окрестности $U(i) \times U(j)$, задаваемое операторами $X_\alpha(ij) = X_\alpha(i) + X_\alpha(j)$. Поскольку операторы $X_\alpha(i)$ и $X_\alpha(j)$ коммутируют между собой, соответствующие алгебры изоморфны алгебре с базисом $X_\alpha(ij)$ с точностью до совпадения структурных констант и потому изоморфны между собой. Однако это вовсе не означает, что алгебры с базисными операторами $X_\alpha(i)$ и $X_\alpha(j)$ эквивалентны, то есть что эти операторы переходят друг в друга при некоторой локально обратимой замене координат $\varphi(i) \to x(j)$, $\psi(i) \to y(j)$. Поэтому, если, например, имеются две изоморфные, но не эквивалентные (хотя бы и слабо эквивалентные) трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости, то двухточечный инвариант необходимо искать для всех трех принципиально различных сочетаний алгебр в системе уравнений (6′).

Координаты $x(i), y(i)$ и $x(j), y(j)$ могут входить в выражение (4) для двухточечного инварианта существенным или несущественным образом. Существенная зависимость означает, что никакая замена координат не приведет к уменьшению их числа. Если эти координаты входят в выражение (4) несущественным образом, то инвариант $f(ij)$ будем называть локально вырожденным. Если же координаты $x(i), y(i)$ и $x(j), y(j)$ входят в выражение (4) существенным образом, то инвариант (4) будем называть локально невырожденным. Пусть инвариант $f(ij)$ локально невырожден. Этот инвариант определен для локального преобразования окрестности $U(i) \times U(j)$. Если преобразования окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ задаются неэквивалент-

ными алгебрами, то естественно возникает вопрос о том, как зависят от координат двухточечные инварианты преобразований окрестностей $U(i) \times U(i)$ и $U(j) \times U(j)$, то есть "внутри" окрестностей $U(i)$ и $U(j)$. Будем называть инвариант $f(ij)$ полностью невырожденным, или просто невырожденным, если он локально невырожден не только в окрестности $U(i) \times U(j)$, но также и "внутри" окрестностей $U(i)$ и $U(j)$. Ясно, что феноменологически инвариантные плоские метрики, определенные на открытом и плотном в $M \times M$ подмножестве $\mathcal{O}_f$, являются невырожденными (полностью) двухточечными инвариантами $f(ij)$ некоторой локальной трехпараметрической группы преобразований окрестности $U(i) \times U(j)$.

Действия локальной группы Ли в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$, совпадающие в пересечении $U(i) \cap U(j)$, определяют группу преобразований окрестности $U(i) \times U(j)$, которую будем называть взаимным расширением исходных групп преобразований. Соответствующую алгебру Ли с базисом $X_\alpha(ij) = X_\alpha(i) + X_\alpha(j)$ будем называть взаимным расширением алгебр Ли с базисными операторами $X_\alpha(i)$ и $X_\alpha(j)$.

Т е о р е м а. Двухточечные инварианты взаимных расширений локальных трехпараметрических групп Ли локальных преобразований плоскости, задаваемых базисными операторами X_1, X_2, X_3 из теоремы §4, с точностью до переобозначения $\psi(f) \to f$, где ψ - функция одной переменной, задаются следующими выражениями:

для взаимного расширения алгебр (4.I) и (4.I), то есть для алгебры (4.I) + (4.I):

$$f(ij) = \chi(y(i), y(j)); \tag{7}$$

для алгебры (5.I) + (5.I):

$$f(ij) = y(i) - y(j), \tag{8}$$

для алгебры (5.2) + (5.2):

$$f(ij) = (\delta_i - \delta_j)(x(i) - x(j)) - (y(i) - y(j))^2/2, \qquad (9)$$

для алгебры (5.I) + (5.2):

$$f(ij) = x(i) - x(j) - y(i)y(j) - \delta_j y^2(i)/2; \qquad (I0)$$

для алгебры (6.I) + (6.I):

$$f(ij) = y(i) - y(j), \qquad (II)$$

для алгебры (6.2) + (6.2):

$$f(ij) = (x(i) - x(j))/(y(i) - y(j)) - \ln|y(i) - y(j)|, \qquad (I2)$$

для алгебры (6.I) + (6.2):

$$f(ij) = (x(i) - x(j) - y(i)y(j))\exp y(i); \qquad (I3)$$

для алгебры (7.I) + (7.I) при $\rho \neq 0, \pm 1$:

$$f(ij) = y(i)/y(j), \qquad (I4)$$

для алгебры (7.2) + (7.2) при $\rho \neq 0, \pm 1$:

$$f(ij) = (x(i) - x(j))^{\rho}/(y(i) - y(j)), \qquad (I5)$$

для алгебры (7.I) + (7.2) при $\rho \neq 0, \pm 1$:

$$f(ij) = (x(i) - x(j) - y(i)y(j))\sqrt[\rho-1]{y(i)}; \qquad (I6)$$

для алгебры (7.I) + (7.I) при $\rho = +1$:

$$f(ij) = \chi(y(i), y(j)), \qquad (I7)$$

для алгебры (7.2) + (7.2) при $\rho = +1$:

$$f(ij) = (x(i) - x(j))/(y(i) - y(j)), \qquad (I8)$$

для алгебры (7.I) + (7.2) при $\rho = +1$:

$$f(ij) = y(i); \tag{I9}$$

для алгебры (8.I) + (8.I):

$$f(ij) = y(i)/y(j), \tag{20}$$

для алгебры (8.2) + (8.2):

$$f(ij) = y(i) - y(j) - (\delta_i - \delta_j)\ln|x(i) - x(j)|, \tag{2I}$$

для алгебры (8.I) + (8.2):

$$f(ij) = (x(i) - x(j) - y(i)y(j))/y(i) + \delta_j \ln|y(i)|; \tag{22}$$

для алгебры (9.I) + (9.I):

$$f(ij) = y(i)/y(j), \tag{23}$$

для алгебры (9.2) + (9.2):

$$f(ij) = (x(i) - x(j))(y(i) - y(j)), \tag{24}$$

для алгебры (9.I) + (9.2):

$$f(ij) = (x(i) - x(j) - y(i)y(j))/\sqrt{y(i)}; \tag{25}$$

для алгебры (I0.I) + (I0.I) при $0 < q^2 < 4$:

$$f(ij) = \operatorname{arctg}\frac{2y(i) - q}{\sqrt{4 - q^2}} - \operatorname{arctg}\frac{2y(j) - q}{\sqrt{4 - q^2}}, \tag{26}$$

для алгебры (I0.2) + (I0.2) при $0 < q^2 < 4$:

$$f(ij) = \ln((2x(i) + qy(i) - 2x(j) - qy(j))^2 + (y(i) - y(j))^2(4 - q^2)) +$$

$$+ \frac{2q}{\sqrt{4 - q^2}} \operatorname{arctg}\frac{2x(i) + qy(i) - 2x(j) - qy(j)}{(y(i) - y(j))\sqrt{4 - q^2}}, \tag{27}$$

для алгебры (10.1) + (10.2) при $0 < q^2 < 4$:

$$f(ij) = \frac{x(i) - x(j) - y(i)y(j)}{\sqrt{1 - q\,y(i) + y^2(i)}} \exp\left(-\frac{q}{\sqrt{4-q^2}} \operatorname{arctg} \frac{2y(i) - q}{\sqrt{4-q^2}}\right); \quad (28)$$

для алгебры (11.1) + (11.1):

$$f(ij) = \operatorname{arctg} y(i) - \operatorname{arctg} y(j), \quad (29)$$

для алгебры (11.2) + (11.2):

$$f(ij) = (x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2, \quad (30)$$

для алгебры (11.1) + (11.2):

$$f(ij) = (x(i) - x(j) - y(i)y(j))/\sqrt{1 + y^2(i)}; \quad (31)$$

для алгебры (12.1) + (12.1):

$$f(ij) = \cos y(i) \cos y(j) \cos(x(i) - x(j)) + \sin y(i) \sin y(j); \quad (32)$$

для алгебры (13.1) + (13.1):

$$f(ij) = \chi(y(i), y(j)), \quad (33)$$

для алгебры (13.2) + (13.2):

$$f(ij) = \exp\left(-\frac{y(i) + y(j)}{2}\right) \sin\frac{x(i) - x(j)}{2}, \quad (34)$$

для алгебры (13.3) + (13.3):

$$f(ij) = \operatorname{ch} y(i) \operatorname{ch} y(j) \cos(x(i) - x(j)) - \operatorname{sh} y(i) \operatorname{sh} y(j), \quad (35)$$

для алгебры (13.4) + (13.4):

$$f(ij) = \operatorname{sh} y(i) \operatorname{sh} y(j) \cos(x(i) - x(j)) - \operatorname{ch} y(i) \operatorname{ch} y(j), \quad (36)$$

для алгебры (13.2-4) + (13.2-4) в форме (51) + (51):

$$f(ij) = ((x(i) - x(j))^2 + \varepsilon_i y^2(i) + \varepsilon_j y^2(j))/y(i)y(j), \qquad (37)$$

для алгебры (I3.I) + (I3.2-4):

$$f(ij) = y(i), \qquad (38)$$

где $\delta_i, \delta_j, \varepsilon_i, \varepsilon_j$ - постоянные для окрестностей $U(i), U(j)$, причем $\varepsilon_i, \varepsilon_j = 0, \pm 1$; δ_i, δ_j - любые; χ - произвольная функция двух переменных.

В сформулированной только что теореме приведены все нетривиальные двухточечные инварианты. Среди тридцати двух инвариантов эквивалентных и неэквивалентных взаимных расширений трехмерных алгебр Ли преобразований плоскости имеется одиннадцать полностью невырожденных: (I2), (I5), (I8), (24), (27), (30), (32), (34), (35), (36), (37). Остальные либо вырожденны, либо невырожденны только локально. Заметим, что все локально невырожденные инварианты, а именно, (9) при $\delta_i \neq \delta_j$, (I0), (I3), (I6), (2I) при $\delta_i \neq \delta_j$, (22), (25), (28), (3I), появляются при взаимном расширении двух неэквивалентных алгебр, хотя для инвариантов (9) при $\delta_i \neq \delta_j$ (I0) и (2I) при $\delta_i \neq \delta_j$ эти алгебры слабо эквивалентны. Среди же полностью невырожденных двухточечных инвариантов только инвариант (37) в случае $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ возникает при неэквивалентном расширении (I3.2-4) + (I3.2-4) в форме (5I) + (5I) из §4 двух алгебр Ли, которые между собой и слабо неэквивалентны. Заметим еще, что среди локально вырожденных двухточечных инвариантов имеются совпадающие для различных взаимных расширений: (7), (I7) и (33); (8), (9) при $\delta_i = \delta_j$, (II) и (2I) при $\delta_i = \delta_j$; (I4), (20) и (23); (I9) и (38). Есть также два одиночных вырожденных инварианта (26) и (29). Основное отличие невырожденных (полностью и локально) инвариантов от вырожденных состоит в том, что по невырожденным, решая уравнение (33) из §3, можно однозначно восстановить локальные группы

преобразований (3I) из §3 окрестностей $U(i)$ и $U(j)$, то есть найти локальную группу движений метрики, задаваемой этим инвариантом, в то время как по вырожденной метрике трехпараметрическая локальная группа ее движений однозначно не восстанавливается.

Сопоставим полностью невырожденные двухточечные инварианты, перечисленные выше, с феноменологически инвариантными плоскими метриками (2) - (II) из §3. С точностью до некоторых очевидных преобразований координат и несущественных переобозначений констант выражений имеем: (2)⟷(30), (3)⟷(32), (4)⟷(36), (5)⟷(24), (6)⟷(35), (7)⟷(34), (8)⟷(I5) и (I8), (9)⟷(I2), (I0)⟷(27) (II)⟷(37), где первые номера в сопоставлении взяты из §3, а вторые - из настоящего параграфа. Установленное взаимно-однозначное соответствие является следствием и подтверждением эквивалентности феноменологической и групповой симметрий, зафиксированной в теореме 2 из §2.

Двухточечные инварианты (7) - (38), перечисленные в теореме, находятся следующим образом. Для каждого эквивалентного и неэквивалентного взаимного расширения изоморфных трехмерных алгебр Ли преобразований плоскости с базисами X_1, X_2, X_3, задаваемыми соответствующими выражениями из теоремы §4, записывается система уравнений (6′). Отдельные уравнения системы могут быть решены методом характеристик. Найденные решения подставляются в другие уравнения, которые относительно новых неизвестных функций уже меньшего числа переменных также могут быть решены методом характеристик. В решении всей системы (6′) из трех уравнений остается произвол с точностью до одной функции от одной переменной. Полное доказательство теоремы представляет собой последовательное интегрирование всех возможных систем уравнений (6′). Однако, ввиду некоторой однотипности в методах решения систем уравнений (6′), автор считает разумным ограничиться только пятью случаями (из тридцати двух воз-

можных), на примере которых можно понять и освоить эти методы и при желании восстановить во всех деталях полное доказательство теоремы.

Запишем для алгебры (5.I) из теоремы §4 систему уравнений (6′):

$$\left.\begin{aligned} &\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ &y(i)\,\partial f(ij)/\partial x(i) + y(j)\,\partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ &\partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

Из первого и второго уравнений системы (39)получаем, что производные $\partial f(ij)/\partial x(i)$ и $\partial f(ij)/\partial x(j)$ обращаются в нуль, то есть двухточечный инвариант (4) вырожден, так как он не зависит от координат $x(i)$ и $x(j)$. Но третье уравнение системы (39), включающее производные $\partial f(ij)/\partial y(i)$ и $\partial f(ij)/\partial y(j)$, говорит о том, что координаты $y(i)$ и $y(j)$ не могут входить в инвариант $f(ij)$ произвольным образом, как это имеет место, например, в двухточечном инварианте (7). Решая это третье уравнение методом характеристик, находим вырожденную метрику: $f(ij) = \Psi(y(i)-y(j))$, где Ψ произвольная функция одной переменной, то есть метрику (8). Заметим, что алгебра (5.I) определяет локальное движение плоскости Галилея, метрика которой, как известно, вырожденна.

Запишем далее систему уравнений (6′) для алгебры (6.2) из теоремы §4:

$$\left.\begin{aligned} &\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ &\partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \\ &(x(i)+y(i))\,\partial f(ij)/\partial x(i) + y(i)\,\partial f(ij)/\partial y(i) + \\ &+ (x(j)+y(j))\,\partial f(ij)/\partial x(j) + y(j)\,\partial f(ij)/\partial y(j) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Из первых двух уравнений системы легко получаем, что

$$f(ij) = \chi(x(i) - x(j),\ y(i) - y(j)), \qquad (4I)$$

где $\chi(u,v)$ - произвольная функция двух переменных. Подставим результат (4I) в третье уравнениение системы (40). Для функции $\chi(u,v)$ получаем уравнение

$$(u+v)\chi_u(u,v) + v\chi_v(u,v) = 0,$$

решение которого легко находится методом характеристик:

$$\chi(u,v) = \psi(u/v - \ln|v|),$$

где ψ есть уже произвольная функция одной переменной. Подставляя по решению (4I) в этот последний результат $u = x(i) - x(j)$, $v = y(i) - y(j)$, получаем полностью невырожденный двухточечный инвариант (I2).

Пусть теперь локальное преобразование окрестности $U(i)$ задается алгеброй (6.I), а окрестности $U(j)$ изоморфной, но не эквивалентной ей алгеброй (6.2) из теоремы §4. Запишем для этого случая систему уравнений (6′):

$$\left.\begin{aligned} &\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0,\\ &y(i)\,\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0,\\ &x(i)\,\partial f(ij)/\partial x(i) - \partial f(ij)/\partial y(i) +\\ &+ (x(j) + y(j))\,\partial f(ij)/\partial x(j) + y(j)\,\partial f(ij)/\partial y(j) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

Решением первого уравнения системы (42) является, очевидно, следующее выражение:

$$f(ij) = \theta(x(i) - x(j),\ y(i),\ y(j)), \qquad (43)$$

где $\Theta(u,v,w)$ – произвольная функция трех переменных. Подставим решение (43) во второе и третье уравнение системы (42):

$$\left.\begin{aligned} v\Theta_u + \Theta_w &= 0, \\ (1-w)\Theta_u - \Theta_v + w\Theta_w &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Из первого уравнения системы (44) выразим производную Θ_u и подставим во второе. После простых преобразований получаем уравнение

$$v\Theta_v + (u - w - vw)\Theta_w = 0,$$

которое интегрируется методом характеристик:

$$\Theta(u,v,w) = \chi(u, (u - vw)\exp v)$$

где $\chi(s,t)$ – произвольная функция двух переменных. Подставляя последнее выражение в первое уравнение системы (44), устанавливаем, что $\chi_s(s,t) = 0$, то есть

$$\Theta(u,v,w) = \Psi((u - vw)\exp v),$$

где Ψ – произвольная функция только одной переменной. Вспоминая, что по решению (43) $u = x(i) - x(j)$, $v = y(i)$, $w = y(j)$, из последнего выражения получаем двухточечный инвариант (I3) для случая, когда локальное преобразование окрестностей $U(i)$ и $U(j)$ задается неэквивалентными алгебрами (6.I) и (6.2) из теоремы §4. Хотя координаты $x(i), y(i), x(j), y(j)$ входят в инвариант (I3) существенным образом, он локально невырожден только в окрестности $U(i)\times U(j)$, в то время как соответствующий двухточечный инвариант "внутри" окрестности $U(i)$ для локального движения, определяемого только алгеброй (6.I) из теоремы §4, будет уже вырожден, подобно инварианту (II).

Запишем систему уравнений (6′) еще для алгебры (I0.2) из §4:

$$\left.\begin{aligned} &\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0, \\ &\partial f(ij)/\partial y(i) + \partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \\ &-y(i)\,\partial f(ij)/\partial x(i) + (x(i) + q\,y(i))\,\partial f(ij)/\partial y(i) - \\ &-y(j)\,\partial f(ij)/\partial x(j) + (x(j) + q\,y(j))\,\partial f(ij)/\partial y(j) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

причем $0 < q^2 < 4$. Из первых двух уравнений системы (45) получаем выражение (4I). Подставим это выражение в третье уравнение:

$$-v\chi_u(u,v) + (u + qv)\chi_v(u,v) = 0,$$

после чего оно может быть решено методом характеристик:

$$\chi(u,v) = \psi\left(\ln((2u + qv)^2 + v^2(4 - q^2)) + \right.$$

$$\left. + \frac{2q}{\sqrt{4 - q^2}} \operatorname{arctg} \frac{2u + qv}{v\sqrt{4 - q^2}}\right),$$

где ψ - произвольная функция одной переменной. Полагая в последнем выражении по решению (4I) $u = x(i) - x(j)$, $v = y(i) - y(j)$, получим полностью невырожденный двухточечный инвариант (27). Система уравнений (6′) для алгебры (II.2) может быть получена из системы (45), если в ней положить $q = 0$. С другой стороны, при интегрировании этой системы условие $q \neq 0$ не было использовано. Поэтому можно взять решение (27) системы (45) и, положив в этом решении $q = 0$, получить полностью невырожденный двухточечный инвариант (30), задающий метрику евклидовой плоскости.

И в заключение запишем систему уравнений (6′) для алгебры (I2.I) из теоремы §4:

$$\left.\begin{aligned}
&\partial f(ij)/\partial x(i) + \partial f(ij)/\partial x(j) = 0,\\
&tg\,y(i)\sin x(i)\,\partial f(ij)/\partial x(i) + \cos x(i)\,\partial f(ij)/\partial y(i) +\\
&+tg\,y(j)\sin x(j)\,\partial f(ij)/\partial x(j) + \cos x(j)\,\partial f(ij)/\partial y(j) = 0,\\
&tg\,y(i)\cos x(i)\,\partial f(ij)/\partial x(i) - \sin x(i)\,\partial f(ij)/\partial y(i) +\\
&+tg\,y(j)\cos x(j)\,\partial f(ij)/\partial x(j) - \sin x(j)\,\partial f(ij)/\partial y(j) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Решая первое уравнение системы (46), получим выражение (43). Подставим это выражение во второе и третье уравнение системы (46). Затем умножим второе уравнение на $\cos x(j)$ (соответственно на $\cos x(i)$) и сложим с третьим, умноженным на $-\sin x(j)$ (соответственно на $-\sin x(i)$). В результате получаем систему двух уравнений для функции $\Theta(u,v,w)$:

$$\left.\begin{aligned}
&tg\,v\sin u\,\Theta_u + \cos u\,\Theta_v + \Theta_w = 0,\\
&tg\,w\sin u\,\Theta_u + \Theta_v + \cos u\,\Theta_w = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Умножим, далее, первое уравнение системы (47) на $tg\,w$, второе на $-tg\,v$ и сложим:

$$(tg\,w\cos u - tg\,v)\,\Theta_v - (tg\,v\cos u - tg\,w)\,\Theta_w = 0.$$

Это последнее уравнение решается методом характеристик:

$$\Theta(u,v,w) = \chi(u, \cos v\cos w\cos u + \sin v\sin w),$$

где $\chi(s,t)$ - произвольная функция двух переменных. Подставим полученное решение в первое уравнение системы (47): $\chi_s = 0$, то есть

$$\Theta(u,v,w) = \psi(\cos v\cos w\cos u + \sin v\sin w),$$

где справа Ψ – произвольная функция только одной переменной. Вспоминая, что по выражению (43) $u = x(i) - x(j)$, $v = y(i)$, $w = y(j)$, получаем отсюда полностью невырожденный двухточечный инвариант (32), который задает метрику двумерной сферы.

Результаты данного параграфа, а также полная и подробная методика интегрирования каждой из тридцати двух систем уравнений (6′) опубликованы в работе /I3/.

Г Л А В А В Т О Р А Я

Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур)

§ I. Феноменологическая симметрия физических структур и её эквивалентность групповой симметрии в геометрии двух множеств.

Пусть имеются два множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ произвольной природы, в общем случае различной, точки которых будем обозначать строчными латинскими и греческими буквами соответственно, а также функция $f: \mathcal{G}_f \to R^s$, где $\mathcal{G}_f \subset \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ и $s \geq 1$, сопоставляющая паре $\langle i\alpha \rangle \in \mathcal{G}_f$ некоторую совокупность s вещественных чисел $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), \ldots, f^s(i\alpha)) \in R^s$. Заметим, что область определения $\mathcal{G}_f$ функции f не обязательно совпадает с прямым произведением $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Мы будем предполагать, что выполняется следующее условие:

А. Если две произвольные точки i, j из $\mathcal{M}$ (α, β из $\mathcal{N}$) различны, то для некоторого $\gamma \in \mathcal{N}$ ($k \in \mathcal{M}$) пары $\langle i\gamma \rangle, \langle j\gamma \rangle \in \mathcal{G}$ и $f(i\gamma) \neq f(j\gamma)$ ($\langle k\alpha \rangle, \langle k\beta \rangle \in \mathcal{G}_f$ и $f(k\alpha) \neq f(k\beta)$).

Смысл этого условия состоит в том, что рассматриваются только такие свойства множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, которые выражаются посредством функции f.

По функции f, удовлетворяющей условию А, на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ естественным образом можно определить отделимые топологии. Пусть, например, $i \in \mathcal{M}$ - произвольная точка, $\varepsilon > 0$ и $\gamma \in \mathcal{N}$. Если $\langle i\gamma \rangle \in \mathcal{G}_f$, то через $\mathcal{U}(i; \varepsilon, \gamma)$ обозначим множество всех тех точек $i' \in \mathcal{M}$ для которых $\langle i'\gamma \rangle \in \mathcal{G}_f$ и имеет место неравенство $|f(i'\gamma) - f(i\gamma)| < \varepsilon$ (то есть $|f^1(i'\gamma) - f^1(i\gamma)| < \varepsilon, \ldots, |f^s(i'\gamma) - f^s(i\gamma)| < \varepsilon$). Если же $\langle i\gamma \rangle \notin \mathcal{G}_f$, то под $\mathcal{U}(i; \varepsilon, \gamma)$ будем понимать всё множество $\mathcal{M}$. Пусть, далее, $\tilde{\mathcal{N}}$ -конечное множество из $\mathcal{N}$ и $\mathcal{U}(i; \varepsilon, \tilde{\mathcal{N}})$ - пересечение всех $\mathcal{U}(i; \varepsilon, \gamma)$, где $\gamma \in \tilde{\mathcal{N}}$. Семейство $\mathcal{U}(i; \varepsilon, \tilde{\mathcal{N}})$ для произвольных конечных множеств $\tilde{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$ и любых значений положительного числа ε принимается за фундаментальную систему окрестностей точки $i \in \mathcal{M}$.

Пересечение множеств $\mathcal{U}(i;\varepsilon_1,\tilde{\mathcal{N}}_1)$ и $\mathcal{U}(i;\varepsilon_2,\tilde{\mathcal{N}}_2)$ содержит, очевидно, множество $\mathcal{U}(i;\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2),\tilde{\mathcal{N}}_1\cup\tilde{\mathcal{N}}_2)$. Окрестностью точки $\mathcal{U}(i)$ будем считать всякое подмножество из $\mathcal{M}$, содержащее некоторую окрестность этой точки из фундаментальной системы. Совершенно аналогично вводится фундаментальная система окрестностей $\mathcal{U}(\alpha;\varepsilon,\tilde{\mathcal{M}})$ для любой точки $\alpha\in\mathcal{N}$. Окрестность этой точки будем обозначать через $\mathcal{U}(\alpha)$.

Л е м м а I . Введённые для всех точек $i\in\mathcal{M}$ и $\alpha\in\mathcal{N}$ системы множеств $\mathcal{U}(i)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$ удовлетворяют всем аксиомам системы окрестностей и определяют на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ отделимые в смысле Хаусдорфа топологии.

Доказательство этой леммы вполне аналогично доказательству соответствующей леммы I из §I гл.I. В дальнейшем по $\mathcal{U}(i)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$ будем понимать открытые окрестности точек $i\in\mathcal{M}$ и $\alpha\in\mathcal{N}$. Топология в $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ вводится обычным образом, как произведение топологий в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. В $\mathcal{G}_f$ будем рассматривать топологию, индуцированную из $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$. Окрестность пары $\langle i\alpha\rangle$ будем обозначать через $\mathcal{U}(\langle i\alpha\rangle)$.

Пусть $m\geq 1$ и $n\geq 1$ - целые числа. Для некоторых кортежей $\langle\gamma_1,\dots,\gamma_m\rangle\in\mathcal{N}^m$ длины m и $\langle k_1,\dots,k_n\rangle\in\mathcal{M}^n$ длины n введём функции $f^m=f[\gamma_1,\dots,\gamma_m]$ и $f^n=f[k_1,\dots,k_n]$, сопоставляя точкам $i\in\mathcal{M}$ и $\alpha\in\mathcal{N}$ точки $(f(i\gamma_1),\dots,f(i\gamma_m))\in R^{sm}$ и $(f(k_1\alpha),\dots,f(k_n\alpha))\in R^{sn}$, если пары $\langle i\gamma_1\rangle,\dots,\langle i\gamma_m\rangle$ и $\langle k_1\alpha\rangle,\dots,\langle k_n\alpha\rangle$ принадлежат $\mathcal{G}_f$. Функции f^m и f^n определены на некоторых подмножествах в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Будем предполагать выполнение следующих трех аксиом:

I. Область определения $\mathcal{G}_f$ функции f есть открытое и плотное в $\mathcal{M}\times\mathcal{N}$ множество.

II. Существуют открытые и плотные в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ множества, для любых точек i и α которых найдутся в $\mathcal{N}^m$ и $\mathcal{M}^n$ такие кортежи

длины m и n, что для них соответствующие отображения f^m и f^n некоторых окрестностей $U(i)$ и $U(\alpha)$ в R^{sm} и R^{sn} являются локальными гомеоморфизмами.

Согласно аксиоме П, открытые и плотные в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ множества являются топологическими многообразиями размерности sm и sn, в которых локальные координаты можно ввести с помощью отображений f^m и f^n.

Ш. Функция f достаточно гладкая в локальных координатах, описанных в аксиоме П, и плотны в $\mathcal{M}^m$ и $\mathcal{N}^n$ множества таких кортежей длины m и n, для которых соответствующие отображения f^m и f^n имеют ранги sm и sn в точках плотных в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ множеств.

Достаточная гладкость означает, что в указанных координатах непрерывна сама функция f и непрерывны все её производные достаточно высокого порядка. Функцию f, удовлетворяющую условиям аксиомы Ш, будем называть н е в ы р о ж д е н н о й.

Л е м м а 2. Существуют открытые и плотные в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ множества, для каждой точки которых любые две описанные в аксиоме П системы координат, определённые в этой точке, гладко связаны в некоторой её окрестности.

Доказательство этой леммы вполне аналогично доказательству соответствующей леммы 2 из § I гл. I. Таким образом, некоторые открытые и плотные в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ множества имеют структуру гладких многообразий размерности sm и sn.

Введём ещё функцию F, сопоставляя кортежу $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\varkappa\rangle$ длины $m+n+2$ из $\mathcal{M}^{n+1}\times\mathcal{N}^{m+1}$ точку $(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots, f(v\varkappa)) \in R^{s(m+1)(n+1)}$, координаты которой в $R^{s(m+1)(n+1)}$ определяются упорядоченной по исходному кортежу последовательностью значений функции f для всех пар его элементов: $\langle i\alpha\rangle, \langle i\beta\rangle, \ldots, \langle v\varkappa\rangle$, если эти пары принадлежат $\mathcal{G}_f$. Область определения введённой функции есть, очевидно, открытое и плотное в $\mathcal{M}^{n+1}\times$

$\times \mathcal{M}^{m+1}$ множество, которое обозначим через $\mathcal{G}_F$.

О п р е д е л е н и е I . Будем говорить, что функция f задаёт на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$ и порядка S , если, кроме условия А и аксиом I,П,Ш, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IУ. Существует плотное в $\mathcal{G}_F$ множество, для каждого кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$ длины $m+n+2$ которого и некоторой его окрестности $\mathcal{U}(\langle i\ldots\tau\rangle)$ найдётся такая достаточно гладкая функция $\varphi: \mathcal{E} \to R^S$, определённая в некоторой области $\mathcal{E} \subset R^{S(m+1)(n+1)}$, содержащей точку $F(\langle i\ldots\tau\rangle)$, что в ней ранг функции φ равен S и множество $F(\mathcal{U}(\langle i\ldots\tau\rangle))$ является подмножеством множества нулей функции φ , то есть

$$\varphi(f(i\alpha), f(i\beta), \ldots, f(v\tau)) = 0 \qquad (1)$$

для всех кортежей из $\mathcal{U}(\langle i\ldots\tau\rangle)$.

Аксиома IУ составляет содержание принципа феноменологической симметрии в теории физических структур Ю.И.Кулакова /I0, 29/. Уравнения (I) задают S функциональных связей $(\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_S = 0)$ между $S(m+1)(n+1)$ измеряемыми в опыте значениями физических величин $f = (f^1, \ldots, f^S)$ и являются аналитическим выражением физического закона, записанного в феноменологически инвариантной форме. Условие на ранг функции φ означает, что уравнения $\varphi = 0$ не сводимы друг к другу, то есть независимы.

Пусть $x = (x^1, \ldots, x^{sm})$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{sn})$ локальные координаты в множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Для исходной функции f в некоторой окрестности $\mathcal{U}(i) \times \mathcal{U}(\alpha)$ каждой пары $\langle i\alpha\rangle \in \mathcal{G}_f$ получаем тогда локальное координатное представление:

$$f(i\alpha) = f(x(i), \xi(\alpha)) =$$

$$= f(x^1(i), \ldots, x^{sm}(i), \xi^1(\alpha), \ldots, \xi^{sn}(\alpha)), \qquad (2)$$

свойства которого определяются аксиомой Ш. Поскольку ранги отображений f^m и f^n максимальны, координаты x и ξ входят в представление (2) существенным образом. Последнее означает, что никакая локально обратимая гладкая замена координат не приведёт к уменьшению их числа, то есть представление (2) для функции f ни для каких координат нельзя записать в виде $f(i\alpha) = \tilde{f}(x^1(i), \ldots, x^{m'}(i), \xi^1(\alpha), \ldots, \xi^{n'}(\alpha))$, где или $m' < sm$, или $n' < sn$ (см., например, /24/, с. I6).

Функцию $f = (f^1, \ldots, f^s)$ можно рассматривать как своего рода s-мерную метрику в геометрии двух множеств. Но поскольку расстояния $f(i\alpha)$ опередены для точек разных множеств, обычные метрические аксиомы здесь не могут быть наложены. Будем также говорить, что функция f задаёт на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ феноменологически симметричную (sm, sn)-мерную геометрию ранга $(n+1, m+1)$.

Используя представление (2), запишем локальное координатное задание для функции F :

$$\left.\begin{aligned} f(i\alpha) &= f(x(i), \xi(\alpha)), \\ f(i\beta) &= f(x(i), \xi(\beta)), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(v z) &= f(x(v), \xi(z)), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

функциональная матрица которого

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f(i\alpha)}{\partial x(i)} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi(\alpha)} & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f(v z)}{\partial x(v)} & 0 & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f(v z)}{\partial x(v)} \end{matrix} \right\| \qquad (4)$$

имеет $s(m+1)(n+1)$ строк и $s(2mn+m+n)$ столбцов. Здесь через $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial \xi$ обозначены соответствующие матрицы Якоби для функций $f = (f^1, \ldots, f^s)$ по координатам $x = (x^1, \ldots, x^{sm})$ и

$\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{sn})$ соответственно.

Задание (3) для функции F представляет собой систему $s(m+1)(n+1)$ функций $f^1(i\alpha), \ldots, f^s(i\alpha), \ldots, f^1(v\tau), \ldots, f^s(v\tau)$, специальным образом зависящих от $s(2mn+m+n)$ координат $x^1(i), \ldots, x^{sm}(i), \ldots, \xi^1(\tau), \ldots, \xi^{sn}(\tau)$ всех точек кортежа $\langle ijk \ldots v, \alpha\beta\gamma \ldots \tau \rangle$ длины $m+n+2$. Поскольку число функций в системе (3) не больше общего числа координат, наличие связи (I) является нетривиальным фактом, не имеющим места для произвольных функций.

Мы уже знаем (см. § I и § 2 гл. I), что в геометрии одного множества с одним расстоянием наличие связи $\Phi = 0$ между всеми попарными расстояниями для некоторого числа произвольных точек (феноменологическая симметрия) приводит к существованию группы движений с определённым числом параметров (степеней свободы жёсткой фигуры). Например, связь между шестью расстояниями для любых четырёх точек плоской (двумерной) геометрии, не обязательно евклидовой, приводит к существованию группы движений, число параметров которой равно трём. Естественно было предположить, что аналогичная ситуация имеет место и в геометрии двух множеств (физической структуре), причём не только с одним расстоянием /I4/, но и с несколькими /I5/. Под движением в этой геометрии следует понимать такую пару взаимно однозначных отображений (преобразований)

$$\lambda : \mathcal{U} \to \mathcal{U}', \quad \sigma : V \to V', \qquad (5)$$

где $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \subset \mathfrak{M}$ и $V, V' \subset \mathfrak{N}$, при которых функция f сохраняется. Последнее означает, что для каждой пары $\langle i\alpha \rangle \in \mathfrak{S}_f$, такой что $i \in \mathcal{U}, \alpha \in V$ и $\langle i'\alpha' \rangle \in \mathfrak{S}_f$, где $i' = \lambda(i) \in \mathcal{U}'$, $\alpha' = \sigma(\alpha) \subset V'$, имеет место равенство

$$f(\lambda(i), \sigma(\alpha)) = f(i\alpha). \qquad (6)$$

Множество всех движений (5) есть группа, для которой функция f, согласно равенству (6), является двухточечным инвариантом. Преобразования λ и σ в движениях (5) сами составляют две отдельные группы, а группа движений есть их взаимное расширение. Если функция f известна, то равенство (6) представляет собой уравнение относительно преобразований λ и σ. Например, для функции $f(i\alpha) = x(i)\xi(\alpha) + \rho(\alpha)$, взятой из работы /16/, уравнение (6) имеет решение $\lambda = ax + b$, $\sigma_1 = \xi/a$, $\sigma_2 = \rho - b\xi/a$, где $a \neq 0$ и b – существенные и независимые параметры (см. следующий § 2). Нам же о функции f известно только, что она невырождена и феноменологически инвариантна, то есть удовлетворяет некоторому уравнению (I). Но этого оказывается достаточно для установления факта существования группы движений с smn параметрами.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что функция f задаёт на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ (sm, sn)-мерную геометрию, наделённую групповой симметрией степени smn, если, кроме условия А и аксиом I,П,Ш, дополнительно имеет место следующая аксиома:

IУ′. Существуют открытые и плотные в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ множества, для всех точек i и α которых определены эффективные гладкие действия smn-мерной локальной группы Ли в некоторых окрестностях $\mathcal{U}(i)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$, такие что действия ее в окрестностях $\mathcal{U}(i)$, $\mathcal{U}(j)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$, $\mathcal{U}(\beta)$ точек i, j и α, β совпадают в пересечениях $\mathcal{U}(i) \cap \mathcal{U}(j)$ и $\mathcal{U}(\alpha) \cap \mathcal{U}(\beta)$ и что функция f является двухточечным инвариантом.

Группы преобразований, о которых говорится в аксиоме IУ′, определяют локальную подвижность жёстких фигур ("твёрдых тел") в (sm, sn) – мерном пространстве $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ с smn степенями свободы. Заметим, что глобальной подвижности при этом может и не быть. Множество пар, для которых функция f определена и является двухточечным инвариантом, очевидно, открыто и плотно в $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.

Согласно аксиоме IУ′, на открытых и плотных в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ мно-

жествах заданы smn -мерные линейные семейства гладких векторных полей X и Ξ , замкнутые относительно операции коммутирования, то есть алгебры Ли локальных преобразований (см./22/, § 60). В некоторых локальных системах координат базисные векторные поля этих семейств запишем в операторной форме:

$$\left.\begin{aligned} X_\omega &= \lambda^\mu_\omega(x)\,\partial/\partial x^\mu, \\ \Xi_\omega &= \sigma^\nu_\omega(\xi)\,\partial/\partial \xi^\nu, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

где $\omega = 1,\dots,smn$ и по "немым" индексам μ и ν производится суммирование в пределах от I до sm и от I до sn соответственно. Согласно инфинитезимальному критерию инвариантности (см. /23/, § I7, с.229; /24/, § I7, с.77) функция $f(i\alpha)$ будет инвариантом локальной группы Ли преобразований некоторой окрестности $U(i)\times U(\alpha)$, то есть двухточечным инвариантом, в том и только в том случае, если она удовлетворяет системе smn уравнений

$$X_\omega(i)\,f(i\alpha) + \Xi_\omega(\alpha)\,f(i\alpha) = 0$$

с операторами (7):

$$\lambda^\mu_\omega(i)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x^{\mu(i)}} + \sigma^\nu_\omega(\alpha)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi^{\nu(\alpha)}} = 0. \qquad (8)$$

Ненулевые векторные поля X и Ξ могут обращаться в нуль в некоторых точках областей своего определения. Если же для соответствующей группы Ли преобразований невырожденная функция f является двухточечным инвариантом, то имеет место следующая лемма:

Л е м м а 3 . Множества точек, где ненулевые векторные поля X и Ξ линейных семейств, удовлетворяющих аксиоме IУ', отличны от нуля, открыты и плотны в $\mathcal{M}_6$ и $\mathcal{T}_6$.

Предположим противное. Пусть, например, ненулевое векторное поле $X = a^{\omega} X_{\omega}$, где $a^{\omega}, \omega = 1,\dots,smn$ - постоянные, не все равные нулю одновременно, в некоторой окрестности $\mathcal{U}(i)$ точки i обращается в нуль тождественно. Рассмотрим соответствующее ненулевое векторное поле $\Xi = a^{\omega} \Xi_{\omega}$, которое в какой-то точке α, а значит и в некоторой её окрестности $\mathcal{U}(\alpha)$, отлично от нуля. Поскольку $\mathcal{O}_f$ открыто и плотно в $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, можно считать, что $\langle i\alpha \rangle$ принадлежит $\mathcal{O}_f$. Тогда, согласно аксиоме IУ', функция $f(i\alpha)$ будет двухточечным инвариантом, являясь решением системы уравнений (8). Поскольку по предположению $X(i) = a^{\omega} X_{\omega}(i) = 0$, а $\Xi(\alpha) = a^{\omega} \Xi_{\omega}(\alpha) \neq 0$, следствием smn уравнений системы (8) будет уравнение

$$a^{\omega} \sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha) \partial f(i\alpha) / \partial \xi^{\nu}(\alpha) = 0, \qquad (9)$$

в которое входят производные только по координатам точки α и от этих же только координат зависят коэффициенты уравнения $a^{\omega} \sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha)$, причём, по крайней мере, один из них отличен от нуля. Уравнение (9) может быть решено методом характеристик. Система уравнений характеристик для него имеет не более $sn-1$ независимых интегралов и потому общее решение уравнения (9) будет

$$f(i\alpha) = \tilde{f}(x^1(i),\dots,x^{sm}(i), \psi^1(\alpha),\dots,\psi^{n'}(\alpha)), \qquad (10)$$

где $n' < sn$. В полученное выражение для функции $f(i\alpha)$ координаты $\xi^1(\alpha),\dots,\xi^{sn}(\alpha)$ входят несущественным образом через n' функций $\psi^1(\alpha),\dots,\psi^{n'}(\alpha)$, что противоречит аксиоме Ш. Таким образом, в окрестности $\mathcal{U}(i)$ обязательно найдётся точка, где исходное векторное поле X отлично от нуля. Поскольку область определения поля X открыта и плотна в $\mathcal{M}$, множество точек, где X отлично от нуля, плотно, и, очевидно, открыто в $\mathcal{M}$. Утверждение леммы относительно векторного поля Ξ доказывается аналогично.

Лемма доказана.

С л е д с т в и е . Множества точек, где базисные векторные поля X_ω и Ξ_ω , $\omega = 1,\dots,smn$ линейных семейств, удовлетворяющих аксиоме IУ′, одновременно отличны от нуля, открыты и плотны в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{T}$.

Следствие очевидно, так как пересечения конечного числа открытых и плотных в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{T}$ множеств, для всех точек которых базисные векторные поля X_ω и Ξ_ω по лемме 3 отличны от нуля, являются открытыми и плотными в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{T}$ множествами.

Смысл только что доказанной леммы 3 и ее следствия состоит в том, что если группы преобразований множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{T}$, составляющие группу движений невырожденной функции f , действуют эффективно в некоторых открытых множествах $U \subset \mathcal{M}$ и $V \subset \mathcal{T}$, то они действуют эффективно и в любых их открытых подмножествах $U' \subset U$ и $V' \subset V$.

Т е о р е м а I . Если функция f задаёт на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{T}$ (sm, sn) - мерную геометрию, наделённую групповой симметрией степени smn , то она на тех же множествах задаёт физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$ и порядка s .

Пусть $\langle ijk\dots v, \alpha\beta\gamma\dots\tau\rangle$ такой кортеж длины $m+n+2$, что точки $i,j,k,\dots,v$ и $\alpha,\beta,\gamma,\dots,\tau$ принадлежат открытым и плотным в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{T}$ множествам, о которых говорится в аксиоме IУ′. Ясно, что множество таких кортежей открыто и плотно в $\mathcal{M}^{n+1} \times \mathcal{T}^{m+1}$, а его пересечение с $\mathcal{G}_F$ открыто и плотно в $\mathcal{G}_F$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\langle i\dots\tau\rangle \in \mathcal{G}_F$ По условиям теоремы и аксиомы IУ′ существуют такие окрестности $U(i),\dots,U(\tau)$ точек этого кортежа, что smn -мерные локальные группы их преобразований сохраняют все функции $f: U(i)\times U(\alpha) \to R^s, \dots, f: U(v)\times U(\tau) \to R^s$. Рассмотрим, далее, про-

извольную $(m+n+2)$-точечную фигуру, соответствующую некоторому кортежу длины $m+n+2$ из окрестности $\mathcal{U}(i)\times\ldots\times\mathcal{U}(z)$. Движение этой фигуры как "твёрдого тела" означает, что при изменении координат её точек все"расстояния" в ней, определяемые системой функций (3), сохраняются, то есть являются двухточечными инвариантами. Инвариантность же функций (3) при локальных преобразованиях, задаваемых векторными полями $X=\lambda^{\mu}(x)\partial/\partial x^{\mu}$ и $\Xi=\sigma^{\nu}(\xi)\cdot\partial/\partial\xi^{\nu}$ в окрестностях $\mathcal{U}(i),\ldots,\mathcal{U}(v)$ и $\mathcal{U}(\alpha),\ldots,\mathcal{U}(\tau)$, означает, что эти функции удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^{\mu}(i)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x^{\mu}(i)}+\sigma^{\nu}(\alpha)\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial\xi^{\nu}(\alpha)}=0,\\
&\lambda^{\mu}(i)\frac{\partial f(i\beta)}{\partial x^{\mu}(i)}+\sigma^{\nu}(\beta)\frac{\partial f(i\beta)}{\partial\xi^{\nu}(\beta)}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda^{\mu}(v)\frac{\partial f(v\tau)}{\partial x^{\mu}(v)}+\sigma^{\nu}(\tau)\frac{\partial f(v\tau)}{\partial\xi^{\nu}(\tau)}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

Система (II) при известной функции $f=(f^1,\ldots,f^s)$ может быть рассмотрена как система $s(m+1)(n+1)$ линейных однородных уравнений относительно $s(2mn+m+n)$ компонент векторных полей X и Ξ в окрестностях точек $i,\ldots,v$ и $\alpha,\ldots,\tau$. Матрица системы (II) совпадает, очевидно, с функциональной матрицей (4). Алгебры Ли векторных полей X и Ξ smn-

мерны, так как такую размерность имеют по условию теоремы локальные группы Ли преобразований окрестностей $U(i), \ldots, U(z)$. Система (II), следовательно, имеет решение:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^{\mu}(i) = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i), \ldots, \lambda^{\mu}(v) = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(v), \\ &\sigma^{\nu}(\alpha) = a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha), \ldots, \sigma^{\nu}(z) = a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(z), \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

где a^{ω} - произвольные числа и суммирование по "немому" индексу ω производится в пределах от I до smn, причем функции λ^{μ}_{ω} и σ^{ν}_{ω} по отдельности линейно независимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами.

Таким образом, система (II) имеет smn линейно независимых с постоянными коэффициентами решений. Эти решения можно получить из решения (I2), беря соответствующее число линейно независимых векторов $(a^1, a^2, \ldots, a^{smn})$, например, $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $(0,0,\ldots,1)$. Покажем, что эти решения будут также линейно независимы и с переменными коэффициентами, то есть в общем смысле. Предположим противное. Пусть найдутся такие переменные коэффициенты c^{ω}, $\omega = 1, \ldots, smn$, что имеют место следующие $s(2mn+m+n)$ соотношений:

$$\left.\begin{aligned} &c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i) = 0, c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(j) = 0, \ldots, c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(v) = 0, \\ &c^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha) = 0, c^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\beta) = 0, \ldots, c^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(z) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

вытекающее из линейной зависимости в общем смысле тех решений из решения (I2), которые с постоянными коэффициентами линейно независимы. Коэффициенты линейной зависимости c^{ω} есть решения системы уравнений (I3) и, по предположению, являются некоторыми функциями координат точек кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots z\rangle$. Заметим, что система (I3) не обязательно имеет ненулевое решение, так как в ней число уравнений больше числа неизвестных. Рассмотрим, далее,

движение фигуры $\langle jk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau\rangle$, содержащей $m+n$ точек, и фигуры $\langle ijk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau\rangle$, содержащей $m+n+1$ точку. Переход от первой фигуры ко второй состоит в [illegible] точки i . Поскольку это движение сохраняет sm функций $f(i\beta)$, $\ldots, f(i\tau)$, относительно компонент векторного поля X в окрестности $\mathcal{U}(i)$ естественно возникает система sm линейных неоднородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{\mu}(i)\frac{\partial f(i\beta)}{\partial x^{\mu}(i)} &= -\sigma^{\nu}(\beta)\frac{\partial f(i\beta)}{\partial \xi^{\nu}(\beta)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda^{\mu}(i)\frac{\partial f(i\tau)}{\partial x^{\mu}(i)} &= -\sigma^{\nu}(\tau)\frac{\partial f(i\tau)}{\partial \xi^{\nu}(\tau)}. \end{aligned}\right\}$$

Ранг матрицы этой системы по условиям аксиомы III определения I равен sm , по крайней мере, для одного кортежа из окрестности $\mathcal{U}(\beta)\times\ldots\times\mathcal{U}(\tau)$ и одной точки из окрестности $\mathcal{U}(i)$. Решая уравнения системы, находим линейное выражение компонет векторного X в окрестности $\mathcal{U}(i)$ через компоненты векторных полей Ξ в окрестностях $\mathcal{U}(\beta), \ldots, \mathcal{U}(\tau)$:

$$\lambda^{\mu}(i) = b^{\mu}_{1\nu}\sigma^{\nu}(\beta) + \ldots + b^{\mu}_{m\nu}\sigma^{\nu}(\tau),$$

которое, в соответствии с решением (I2) и в силу произвольности коэффициентов a^{ω} , переходит в линейную связь:

$$\lambda^{\mu}_{\omega}(i) = b^{\mu}_{1\nu}\sigma^{\nu}_{\omega}(\beta) + \ldots + b^{\mu}_{m\nu}\sigma^{\nu}_{\omega}(\tau). \qquad (I4)$$

Запишем подсистему из $2smn$ уравнений системы (I3), относящуюся к укороченному кортежу $\langle jk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau\rangle$ длины $m+n$;

$$\left.\begin{aligned} c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(j)=0,\ \dots,\ c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(v)=0,\\ c^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\beta)=0,\ \dots,\ c^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\tau)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (13')$$

Соответствующая подсистема системы (13) для кортежа $\langle ijk\dots v,\beta\gamma\dots\tau\rangle$ длины $m+n+1$ получается добавлением к подсистеме (13′) уравнений $c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i)=0$, которые по линейной связи (14) являются следствием уравнений подсистемы (13′). То есть ранги матриц подсистем системы (13), относящиеся к кортежам $\langle jk\dots v,\beta\gamma\dots\tau\rangle$ и $\langle ijk\dots v,\beta\gamma\dots\tau\rangle$, совпадают. Пусть ранг матрицы подсистемы (13′) равен τ. Ясно, что этот ранг не превышает числа неизвестных smn и по следствию леммы 3 не меньше единицы. Однако при $\tau=smn$ подсистема (13′) и полная система (13) будут иметь только нулевое решение, что противоречит сделанному предположению. Если $smn=1$, то обязательно должно быть $smn=\tau$, поэтому будем считать, что $smn>1$. Тогда в матрице подсистемы (13′) найдется такая квадратная подматрица ненулевого порядка $\tau<smn$, определитель которой отличен от нуля. Возьмем определитель $\tau+1$ порядка, содержащий эту подматрицу в качестве минора порядка τ и одну строку из матрицы подсистемы системы (13) для кортежа $\langle ijk\dots v,\beta\gamma\dots\tau\rangle$, в которую входят функции $\lambda^{\mu}_{\omega}(i)$. Поскольку, по доказанному выше, ранг матрицы подсистемы при этом не возрастает, указанный определитель $\tau+1$ порядка должен обращаться в нуль. Раскрывая его по элементам строки, содержащей функции $\lambda^{\mu}_{\omega}(i)$, для всех индексов μ получаем связь

$$\tilde{c}^{\omega}(\langle jk\dots v,\beta\gamma\dots\tau\rangle)\,\lambda^{\mu}_{\omega}(i)=0,$$

где $\tilde{c}^{\omega}$ есть алгебраические дополнения к $\lambda^{\mu}_{\omega}(i)$, зависящие от координат точек кортежа $\langle jk\dots v,\beta\gamma\dots\tau\rangle$ и не зависящие от

координат точки i . Заметим, что хотя бы один из коэффициентов $\tilde{c}^{\omega}$ обязательно отличен от нуля. Фиксируя в полученной связи координаты точек кортежа $\langle jk\ldots v, \beta\gamma\ldots z\rangle$, по которым эта связь выполняется тождественно, устанавливаем, что функции $\lambda^{\mu}_{\omega}(i)$ линейно зависимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами. Однако это противоречит основному условию теоремы, согласно которому локальная группа преобразований окрестности $\mathcal{U}(i)$ smn - мерна и потому такую же размерность имеет семейство векторных полей X в окрестности $\mathcal{U}(i)$ с базисными операторами $X_{\omega}(i) = \lambda^{\mu}_{\omega}(i)\,\partial/\partial x^{\mu}(i)$, $\omega = 1, \ldots, smn$.

Итак, мы показали, что система уравнений (II) имеет smn линейно независимых в общем смысле ненулевых решений в окрестности $\mathcal{U}(i) \times \ldots \times \mathcal{U}(z)$. Пусть в этой окрестности найдется такой кортеж, для которого ранг матрицы (4) превышал бы значение $s(m+1)\cdot(n+1)-s$. В силу достаточной гладкости функций f , этот ранг будет больше $s(m+1)(n+1)-s$ в некоторой окрестности указанного кортежа, содержащейся в $\mathcal{U}(i) \times \ldots \times \mathcal{U}(z)$. Как известно, максимальное число линейно независимых (в общем смысле) ненулевых решений системы линейных однородных уравнений равно числу неизвестных минус ранг матрицы системы. В предполагаемом случае для системы (II) оно будет меньше smn , хотя только что было показано, что эта система имеет, по крайней мере, smn линейно независимых решений. С другой стороны, в матрице (4) имеется, например, определитель порядка $s(m+1)(n+1)-s$, по диагонали которого расположены Якобианы $\partial(f(i\beta), \ldots, f(iz))/\partial(x^1(i), \ldots, x^{sm}(i))$, $\partial(f(j\alpha), \ldots, f(v\alpha))/\partial(\xi^1(\alpha), \ldots, \xi^{sn}(\alpha))$, $\ldots$, $\partial(f(jz), \ldots, f(vz))/\partial(\xi^1(z), \ldots, \xi^{ns}(z))$, не обращающиеся в нуль всюду по условию аксиомы III, произведение которых равно значению этого определителя. Следовательно, в окрестности $\mathcal{U}(i) \times \ldots \times \mathcal{U}(z)$ плотного в $\mathcal{G}_F \subset \mathcal{M}^{n+1} \times \mathcal{M}^{m+1}$ множества кортежей всегда найдется

такой кортеж, для которого ранг матрицы (4) равен $s(m+1)(n+1)-s$. Множество таких кортежей, очевидно, также плотно в $\mathfrak{S}_F$.

Пусть, далее, для некоторого кортежа $<ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau>$ из плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества, установленного выше, ранг матрицы (4) равен $s(m+1)(n+1)-s$. Из вышеприведенных рассуждений следует, что ни для одного кортежа из $\mathfrak{S}_F$ ранг матрицы (4) не превышает этого значения. Следовательно, существует такая окрестность кортежа $<i\ldots\tau>$, в которой ранг матрицы Якоби (4) для системы функций (3) не больше $s(m+1)(n+1)-s$. Но тогда, по хорошо известной из математического анализа теореме о функциональной зависимости, для некоторой окрестности $\mathcal{U}(<i\ldots\tau>)$ существует такая достаточно гладкая функция $\varphi: \mathcal{E} \to R^s$, определенная в некоторой области $\mathcal{E} \subset R^{s(m+1)(n+1)}$, содержащей точку $F(<i\ldots\tau>)$, в которой ее ранг равен s, что множество $F(\mathcal{U}(<i\ldots\tau>))$ принадлежит множеству нулей функции φ, то есть имеет место уравнение (2) для всех кортежей из $\mathcal{U}(<i\ldots\tau>)$. Ясно также, поскольку ранг матрицы (4) для кортежа $<i\ldots\tau>$ равен $s(m+1)(n+1)-s$, что существует такая его окрестность $\mathcal{U}_1(<i\ldots\tau>)$ и такая область $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$, что множество значений $F(\mathcal{U}_1(<i\ldots\tau>))$ совпадает с множеством нулей этой функции в $\mathcal{E}_1$, являясь неособой поверхностью размерности $s(m+1)(n+1)-s$. Теорема I полностью доказана.

Л е м м а 4. Размерность локальной группы локальных движений, допускаемых функцией f, не превышает smn.

Предположим противное, то есть что функция f допускает такую группу движений, размерность которой больше smn. Это означает, что у системы уравнений (II) число линейно независимых с постоянными коэффициентами решений больше smn. Возьмем из них любые $smn+1$ решение. Эти решения будут линейно независимы не только с постоянными, но и с переменными коэффициентами

C^{ω}, то есть в общем смысле. Для установления их линейной независимости в общем смысле достаточно повторить рассуждения следующие за системой уравнений (13), в которых ограничение $\omega \leq smn$ следует заменить на условие $\omega \leq smn+1$. Поскольку система (11) имеет, по крайней мере, $smn+1$ линейно независимое ненулевое решение, ранг ее матрицы, то есть матрицы (4), всюду должен быть меньше $s(m+1)(n+1)-s$. Однако в матрице (4) имеется отличный от нуля определитель порядка $s(m+1)(n+1)-s$, упомянутый в заключительной части доказательства теоремы I, по диагонали которого расположены Якобианы, не обращающиеся всюду в 0 по условию аксиомы III. То есть ранг матрицы (4) не может быть всюду меньше $s(m+1)(n+1)-s$. Установленное противоречие и доказывает лемму 4.

Т е о р е м а 2. Если функция f задает на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$ и порядка s, то она на тех же множествах задает (sm, sn) -мерную геометрию, наделенную групповой симметрией степени smn.

Согласно аксиоме IУ определения I, в любой окрестности произвольного кортежа из $\mathcal{O}_F$ найдется такой кортеж $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$ и такая его окрестность $\mathcal{U}(\langle i\ldots\tau\rangle)$, что множество значений $F(\mathcal{U}(\langle i\ldots\tau\rangle))$ будет удовлетворять некоторой системе уравнений (I), причем ранг матрицы Якоби для функции $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_s)$ в точке $F(\langle i\ldots\tau\rangle)$ будет равен s. Поскольку функция φ достаточно гладкая, можно, не ограничивая общности, считать, что ранг ее равен s для всех точек локальной области $\mathcal{E}$, где определена эта функция, и, конечно же, на множестве значений $F(\mathcal{U}(\langle i\ldots\tau\rangle))$. Но тогда множество нулей функции φ (однако не обязательно множество $F(\mathcal{U}(\langle i\ldots\tau\rangle))$) будет неособой поверхностью размерности $s(m+1)(n+1)-s$ в $\mathcal{E} \subset R^{s(m+1)(n+1)}$.

Продифференцируем уравнение (I) по каждой из $sm(n+1)+$

$+sn(m+1)$ координат $x(i),\ldots,x(v),\xi(\alpha),\ldots,\xi(\tau)$. В результате получим $s(2mn+m+n)$ линейных однородных уравнений относительно $s(m+1)(n+1)$ производных компонент функции φ :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial f(i\alpha)}\cdot\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x(i)}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial f(i\tau)}\cdot\frac{\partial f(i\tau)}{\partial x(i)}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial f(i\tau)}\cdot\frac{\partial f(i\tau)}{\partial\xi(\tau)}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial f(v\tau)}\cdot\frac{\partial f(v\tau)}{\partial\xi(\tau)}=0. \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Матрица системы уравнений (I5) есть транспонированная матрица (4). Поскольку ранг функции φ равен s , уравнения (I5) имеют, по крайней мере, s линейно независимых ненулевых решений в окрестности $\mathcal{U}(<i\ldots\tau>)$. Покажем, что любые $s+1$ ненулевое решение будут линейно зависимы. В самом деле, если бы у системы (I5) было бы $s+1$ линейно независимое ненулевое решение, то ранг ее матрицы, а следовательно, и матрицы (4), в окрестности $\mathcal{U}(<i\ldots\tau>)$ не превышал бы значения $s(m+1)(n+1)-(s+1)$, что невозможно, так как по условию аксиомы III определения I в ней заведомо есть отличный от нуля определитель порядка $s(m+1)(n+1)-s$. Полученное противоречие означает, что в окрестности $\mathcal{U}(<i\ldots\tau>)$ система (I5) имеет s линейно независимых ненулевых решений и не более. Ранг матрицы системы уравнений (I5) не может быть больше $s(m+1)(n+1)-s$ ни для одного кортежа из $\mathcal{U}(<i\ldots\tau>)$, так как, иначе, максимальное число ее линейно независимых ненулевых решений будет меньше s . С другой стороны, ранг матрицы этой системы, то есть ранг матрицы (4), для некоторого кортежа из $\mathcal{U}(<i\ldots$ $\ldots\tau>)$ будет точно на s меньше числа неизвестных производных функции φ , то есть равен $s(m+1)(n+1)-s$. Легко понять, что множество таких кортежей плотно в $\mathfrak{S}_F$, так же как плотно в

$\mathfrak{S}_F$ по условию аксиомы IУ определения I множество кортежей, где ранг функции $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_s)$ равен s.

Пусть для кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau \rangle$ из установленного выше плотного в $\mathfrak{S}_F$ множества ранг матрицы (4) равен $s(m+1)\cdot(n+1)-s$. Поскольку ни для одного кортежа из $\mathfrak{S}_F$ ее ранг не превышает этого значения, можно считать, что ранг матрицы (4) равен тому же значению $s(m+1)(n+1)-s$ для всех кортежей из некоторой окрестности $\mathcal{U}(i) \times \ldots \times \mathcal{U}(\tau)$. Число столбцов в матрице (4), равное $s(2mn+m+n)$, больше ее ранга, поэтому между ними существует линейная связь. Запишем эту связь по элементам каждой строки:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^\mu[i]\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x^\mu(i)} + \sigma^\nu[\alpha]\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi^\nu(\alpha)} = 0,\\
&\lambda^\mu[i]\frac{\partial f(i\beta)}{\partial x^\mu(i)} + \sigma^\nu[\beta]\frac{\partial f(i\beta)}{\partial \xi^\nu(\beta)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda^\mu[v]\frac{\partial f(v\tau)}{\partial x^\mu(v)} + \sigma^\nu[\tau]\frac{\partial f(v\tau)}{\partial \xi^\nu(\tau)} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

где, например, $\lambda^\mu[i]$ и $\sigma^\nu[\alpha]$ – коэффициенты линейной зависимости при столбцах с дифференцированием по координатам $x^\mu(i)$ и $\xi^\nu(\alpha)$ соответственно, а для их отличия от компонент $\lambda^\mu(i)$ и $\sigma^\nu(\alpha)$ векторных полей X и Ξ в окрестностях $\mathcal{U}(i)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$, входящих в уравнения системы (II), здесь использованы квадратные скобки.

Соотношение (I6) при известной функции $f = (f^1, \ldots, f^s)$ естественно рассматривать как систему $s(m+1)(n+1)$ линейных однородных уравнений относительно $s(2mn+m+n)$ коэффициентов линейной зависимости $\lambda^\mu[i], \ldots, \lambda^\mu[v]$, $\sigma^\nu[\alpha], \ldots, \sigma^\nu[\tau]$.

Матрица системы (16) совпадает с матрицей (4), поэтому ее ранг равен $s(m+1)(n+1)-s$. Максимальное число линейно независимых (в общем смысле) ненулевых решений системы (16) равно числу неизвестных минус ранг матрицы системы, то есть равно smn. Выпишем общее решение системы (16):

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{\mu}[i] &= a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i, \langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda^{\mu}[v] &= a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(v, \langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle), \\ \sigma^{\nu}[\alpha] &= a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha, \langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma^{\nu}[\tau] &= a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\tau, \langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle), \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

где a^{ω} - линейные коэффициенты общего решения в его выражении через линейно независимые ненулевые решения этой же системы, причем суммирование по "немому" индексу ω производится в пределах от 1 до smn. Однако, в отличие от решения (12) аналогичной системы (11), здесь учтена возможная зависимость выражений $\lambda^{\mu}[\cdot]$ и $\sigma^{\nu}[\cdot]$ не только от координат той точки, по координате которой проводится дифференцирование в соответствующем столбце матрицы (4), но и от координат всех остальных точек, входящих в уравнение (16), условно обозначенная кортежем $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$. Кроме того, в решении (17) линейные коэффициенты a^{ω} являются произвольными функциями координат точек кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$, тогда как в решении (12) они были произвольными числами.

Покажем, что общее решение (17) системы уравнений (16) может быть записано в такой форме, для которой компоненты λ^{μ}_{ω} и σ^{ν}_{ω} линейно независимых ненулевых решений зависят только от координат соответствующей точки, как в решении (12), то есть что, например,

$\lambda^{\mu}[i] = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i)$ и $\sigma^{\nu}[\alpha] = a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha)$.

Возьмем кортеж $\langle jk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau\rangle$ длины $m+n$, полученный из первоначального кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$ длины $m+n+2$ опусканием точек i и α . Выделим из системы уравнений (I6) подсистему smn уравнений, в которые не входят координаты точки i из окрестности $\mathcal{U}(i)$ и координаты точки α из окрестности $\mathcal{U}(\alpha)$:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^{\mu}[j]\frac{\partial f(j\beta)}{\partial x^{\mu}(j)} + \sigma^{\nu}[\beta]\frac{\partial f(j\beta)}{\partial \xi^{\nu}(\beta)} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\lambda^{\mu}[v]\frac{\partial f(v\tau)}{\partial x^{\mu}(v)} + \sigma^{\nu}[\tau]\frac{\partial f(v\tau)}{\partial \xi^{\nu}(\tau)} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (I6')$$

В матрице подсистемы (I6′) отличен от нуля ступенчатый определитель порядка smn , по диагонали которого расположены Якобианы $\partial(f(j\beta),\ldots,f(j\tau))/\partial(x^1(j),\ldots,x^{sm}(j))$, ... , $\partial(f(v\beta),\ldots, f(v\tau))/\partial(x^1(v),\ldots,x^{sm}(v))$, не обращающиеся в нуль по условию аксиомы III определения I. То есть ранг матрицы подсистемы (I6′) равняется своему максимальному значению smn , по крайней мере, для одного укороченного кортежа и некоторой его окрестности. Но тогда подсистема (I6′) имеет smn и не более линейно независимых ненулевых решений, так как максимальное число таких решений равно числу входящих в нее неизвестных (= $2smn$) минус ранг матрицы подсистемы (= smn). В матрице подсистемы (I6′) нет зависимости от координат точек i и α и потому ее общее решение можно записать в такой форме, в которой компоненты λ^{μ}_{ω} и σ^{ν}_{ω} не зависят от этих координат:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^{\mu}[j] = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(j, <jk\ldots v, \beta\gamma\ldots z>),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\lambda^{\mu}[v] = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(v, <jk\ldots v, \beta\gamma\ldots z>),\\
&\sigma^{\nu}[\beta] = a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\beta, <jk\ldots v, \beta\gamma\ldots z>),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\sigma^{\nu}[z] = a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(z, <jk\ldots v, \beta\gamma\ldots z>),
\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

где суммирование по "немому индексу" ω так же, как и в общем решении (17) всей системы (16) производится в пределах от 1 до smn.

Выделим из системы (16) подсистему sm уравнений, содержащих точку i :

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^{\mu}[i]\frac{\partial f(i\beta)}{\partial x^{\mu(i)}} + \sigma^{\nu}[\beta]\frac{\partial f(i\beta)}{\partial \xi^{\nu(\beta)}} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\lambda^{\mu}[i]\frac{\partial f(iz)}{\partial x^{\mu(i)}} + \sigma^{\nu}[z]\frac{\partial f(iz)}{\partial \xi^{\nu(z)}} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (16'')$$

и подсистему sn уравнений, содержащих точку α :

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^{\mu}[j]\frac{\partial f(j\alpha)}{\partial x^{\mu(j)}} + \sigma^{\nu}[\alpha]\frac{\partial f(j\alpha)}{\partial \xi^{\nu(\alpha)}} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\lambda^{\mu}[v]\frac{\partial f(v\alpha)}{\partial x^{\mu(v)}} + \sigma^{\nu}[\alpha]\frac{\partial f(v\alpha)}{\partial \xi^{\nu(\alpha)}} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (16''')$$

Относительно неизвестных $\lambda^{\mu}[i]$ и $\sigma^{\nu}[\alpha]$ эти подсистемы имеют ранги sm и sn соответственно по условиям аксиомы III определения I. Но тогда коэффициенты $\lambda^{\mu}[i]$ и $\sigma^{\nu}[\alpha]$ могут быть однозначно выражены через общее решение (18) подсистемы (16'):

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{\mu}[i] &= a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i, <jk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau>), \\ \sigma^{\nu}[\alpha] &= a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha, <jk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau>). \end{aligned}\right\} \qquad (I9)$$

Ранг подсистемы системы (I6) без первого уравнения

$$\lambda^{\mu}[i]\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial x^{\mu}(i)} + \sigma^{\nu}[\alpha]\frac{\partial f(i\alpha)}{\partial \xi^{\nu}(\alpha)} = 0$$

(а точнее, без S уравнений), содержащего функцию $f(i\alpha) = (f^1(i\alpha), \ldots, f^S(i\alpha))$, равен рангу самой системы (I6), в чем легко убедиться, составляя ее из подсистем (I6′), (I6″), (I6‴). Поэтому первое уравнение в системе (I6) является следствием всех остальных и никаких дополнительных ограничений на решения (I9) не налагает. Совокупность решений (I8) и (I9), следовательно, задает общее решение системы (I6) в некоторой окрестности некоторого кортежа из $\mathcal{U}(i) \times \ldots \times \mathcal{U}(\tau)$, причем в этом решении координаты точек i и α входят явно только в выражения компонент λ^{μ}_{ω} и σ^{ν}_{ω} коэффициентов $\lambda^{\mu}[i]$ и $\sigma^{\nu}[\alpha]$ соответственно.

Покажем, далее, что функции λ^{μ}_{ω} и σ^{ν}_{ω} решений (I9) по отдельности линейно независимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами.

Предположим противное, то есть что найдутся такие постоянные коэффициенты c^{ω}, $\omega = 1, \ldots, smn$, не все равные нулю одновременно, с которыми для всех индексов μ имеет место, например, соотношение $c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i, <jk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau>) = 0$. Предположим при этом, что хотя бы для одной из функций σ^{ν}_{ω} решения (I8), (I9) и для одного индекса ν будет выполняться неравенство $c^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega} \neq 0$, например, $c^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha, <jk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau>) \neq 0$. Тогда, подставляя выражения (I9) для $\lambda^{\mu}[i]$ и $\sigma^{\nu}[\alpha]$ в первое уравнение системы (I6), с учетом независимости линейных коэффици-

ентов a^{ω}, получаем уравнения

$$\lambda^{\mu}_{\omega}(i,<jk\dots v,\beta\gamma\dots\tau>)\,\partial f(i\alpha)/\partial x^{\mu}(i) +$$

$$+\,\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha,<jk\dots v,\beta\gamma\dots\tau>)\,\partial f(i\alpha)/\partial \xi^{\nu}(\alpha) = 0.$$

а затем из них уравнение

$$c^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha,<jk\dots v,\beta\gamma\dots\tau>)\,\partial f(i\alpha)/\partial \xi^{\nu}(\alpha) = 0.$$

Координаты точек кортежа $<jk\dots v,\beta\gamma\dots\tau>$ не входят в функцию $f(i\alpha)$ и по ним последнее уравнение выполняется тождественно. Фиксируя их, получаем уравнение (9), следствием которого является несущественная зависимость функции $f(i\alpha)$ от координат точки α в выражении (I0), что явно противоречит условиям аксиомы III определения I. Значит, должно быть равенство $c^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha,<jk\dots v,\beta\gamma\dots\tau>)=0$. Точно также получаем, что равенство $c^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}=0$ будет иметь место и для всех функций σ^{ν}_{ω} решения (I8), если $c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i,<jk\dots v,\beta\gamma\dots\tau>)=0$. Но тогда, аналогично, и для каждой функции λ^{μ}_{ω} решения (I8) будет выполнятся равенство $c^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}=0$. Однако это противоречит тому, что решение (I8), (I9) системы (I6) общее и максимальное число ее линейно независимых ненулевых решений равно smn. Точно также устанавливается линейная независимость функций $\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha,<jk\dots v,\beta\gamma\dots\tau>)$ с постоянными коэффициентами по нижнему индексу ω в выражении для $\sigma^{\nu}[\alpha]$ решения (I9).

Пусть $<ijk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau>$ и $<\rho\dots q,\delta\dots\rho>$ такие кортежи длины $m+n+2$ и $m+n$, что для всякой пары $<i\alpha>$, $<i\beta>,\dots,<v\tau>$ из первого кортежа, кортежи $<i\rho\dots q,\alpha\delta\dots\rho>$, $<i\rho\dots q,\beta\delta\dots\rho>$, $\dots$, $<v\rho\dots q,\tau\delta\dots\rho>$ принадлежат области $\mathcal{O}_F$. Множество таких кортежей, очевидно, плотно в $\mathcal{R}^{n+1}\times\mathcal{R}^{m+1}$ и $\mathcal{R}^{n}\times\mathcal{R}^{m}$ и, кроме того, $<ijk\dots v,\alpha\beta\gamma\dots\tau>\in$

$\in \mathfrak{S}_F$. Запишем систему уравнений (I6$'$) для кортежа $\langle p \ldots q,$ $\delta \ldots \rho \rangle$ и некоторой его окрестности. Эта система, как было показано выше, имеет не более smn линейно независимых ненулевых решений. Общее решение этой системы можно записать по общему решению (I8) простой заменой точек кортежа $\langle jk \ldots v, \beta\gamma \ldots \tau \rangle$ на соответствующие точки кортежа $\langle p \ldots q, \delta \ldots \rho \rangle$. Затем запишем системы уравнений (I6$''$) и (I6$'''$) для кортежей $\langle i, \delta \ldots \rho \rangle$, ... , $\langle v, \delta \ldots \rho \rangle$ и $\langle p \ldots q, \alpha \rangle$, ... , $\langle p \ldots q, \tau \rangle$. Эти системы имеют решения, которые можно записать по решениям (I9):

$$\left.\begin{aligned}
\lambda^{\mu}[i] &= a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i, \langle p \ldots q, \delta \ldots \rho \rangle),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda^{\mu}[v] &= a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(v, \langle p \ldots q, \delta \ldots \rho \rangle),\\
\sigma^{\nu}[\alpha] &= a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha, \langle p \ldots q, \delta \ldots \rho \rangle),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\sigma^{\nu}[\tau] &= a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\tau, \langle p \ldots q, \delta \ldots \rho \rangle),
\end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

причем функции λ^{μ}_{ω} и σ^{ν}_{ω} в каждом из выражений линейно независимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами. Естественно, решения (20) являются некоторым решением системы (I6), аналогично тому, как решения (I9) являлись некоторым решением первого уравнения этой системы. Координаты точек кортежа $\langle p \ldots q, \delta \ldots \rho \rangle$ не входят в коэффициенты уравнений (I6), поэтому в решении (20) эти координаты могут быть зафиксированы. Для их фиксирования возьмем, в соответствии с аксиомой III определения I такой кортеж $\langle p_0 \ldots q_0, \delta_0 \ldots \rho_0 \rangle$ из окрестности кортежа $\langle p \ldots q, \delta \ldots \rho \rangle$, что ранги отображений $f[\delta_0 \ldots \rho_0]$ и $f[p_0 \ldots q_0]$ будут равны sm и sn на плотных в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ множествах соответственно:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^{\mu}[i] &= a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i), \ldots, \lambda^{\mu}[v] = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(v), \\ \sigma^{\nu}[\alpha] &= a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha), \ldots, \sigma^{\nu}[\tau] = a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\tau), \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

где, например, $\lambda^{\mu}_{\omega}(i) = \lambda^{\mu}_{\omega}(x^1(i), \ldots, x^{sm}(i))$ и $\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha) = \sigma^{\nu}_{\omega}(\xi^1(\alpha), \ldots, \xi^{sn}(\alpha))$ и, кроме того, функции λ^{μ}_{ω} и σ^{ν}_{ω} линейно независимы по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами для каждой точки кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$.

Итак, система (16) имеет smn линейно независимых с постоянными коэффициентами решений, которые можно получить из решения (21), беря для линейных коэффициентов $(a^1, \ldots, a^{smn})$ соответствующие значения, например, $(1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 1)$:

$$(\lambda^{\mu}_{\omega}(i), \ldots, \lambda^{\mu}_{\omega}(v), \sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha), \ldots, \sigma^{\nu}_{\omega}(\tau)). \qquad (21')$$

Решения (21′) системы (16) линейно независимы не только с постоянными коэффициентами, но и в общем смысле, что можно установить точно также, как это было сделано в отношении решений (12) системы (11). Поскольку, с другой стороны, система (16) имеет не более smn линейно независимых ненулевых решений, ее решение (21) есть общее решение, то есть всякое ее частное решение может быть представлено в записи (21) с некоторыми, вообще говоря, переменными линейными коэффициентами a^{ω}, $\omega = 1, \ldots, smn$.

Совокупность smn решений (21′) задает в некоторой окрестности $U(i) \times \ldots \times U(\tau)$ кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$ smn-мерное линейное семейство векторных полей. Покажем, что это семейство замкнуто относительно операции коммутирования.

Пусть векторное поле

$$(\lambda^{\mu}(i), \ldots, \lambda^{\mu}(v), \sigma^{\nu}(\alpha), \ldots, \sigma^{\nu}(\tau)) \qquad (22)$$

есть коммутатор каких-либо двух векторных полей семейства с бази-

сом (2I′). Ясно, что любой коммутатор записывается в форме (22) вследствие независимости координат, относящихся к разным точкам кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$. С другой стороны, коммутатор (22) является некоторым решением системы (I6). Поэтому компоненты его можно выразить линейно через компоненты векторных полей (2I′) согласно общему решению (2I):

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^{\mu}(i) = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(i), \ldots, \lambda^{\mu}(v) = a^{\omega}\lambda^{\mu}_{\omega}(v), \\ &\sigma^{\nu}(\alpha) = a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha), \ldots, \sigma^{\nu}(\tau) = a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\tau). \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Убедимся в том, что в решении (23) линейные коэффициенты a^{ω} постоянны, то есть не зависят от координат точек кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$. Для этого будем рассматривать выражения (23) как систему $s(2mn+m+n)$ линейных неоднородных уравнений относительно коэффициентов a^{ω}, $\omega = 1, \ldots, smn$. Выделим из нее подсистему $s(2mn+m)$ уравнений, опуская выражения $\sigma^{\nu}(\alpha) = a^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha)$. Столбцами матрицы этой подсистемы являются ненулевые решения

$$(\lambda^{\mu}_{\omega}(i), \lambda^{\mu}_{\omega}(j), \ldots, \lambda^{\mu}_{\omega}(v), \sigma^{\nu}_{\omega}(\beta), \ldots, \sigma^{\nu}_{\omega}(\tau))$$

$s(mn+m)$ уравнений (I6′) и (I6″) системы (I6), линейная независимость которых в общем смысле устанавливается точно также, как и линейная независимость в общем смысле решений (I2) системы (II). Таким образом, выделенная из системы (23) опусканием выражения для $\sigma^{\nu}(\alpha)$ подсистема уравнений имеет ранг smn и ее решение может зависеть только от координат точек укороченного кортежа $\langle ijk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau\rangle$:

$$a^{\omega} = a^{\omega}(\langle ijk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau\rangle).$$

Подставим это решение в выпущенное выражение:

$$\sigma^{\nu}(\alpha) = a^{\omega}(\langle ijk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau\rangle)\,\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha) \qquad (24)$$

и предположим, что для некоторого линейного коэффициента a^{ω} производная по какой-либо из координат точек кортежа $\langle ijk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau\rangle$ отлична от нуля. Дифференцируя правую и левую части выражения (24) по этой координате, а затем фиксируя все координаты точек кортежа $\langle ijk\ldots v, \beta\gamma\ldots\tau\rangle$, приходим к соотношению

$$c^{\omega}\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha) = 0,$$

в котором коэффициенты c^{ω} постоянны, и, по крайней мере, один из них отличен от нуля. Но такой результат противоречит линейной независимости функций σ^{ν}_{ω} и λ^{μ}_{ω} по нижнему индексу ω с постоянными коэффициентами в решении (2I) для каждой точки кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$. Следовательно, в выражениях (23) $a^{\omega} = const$, $\omega = 1,\ldots, smn$ и поэтому семейство векторных полей (2I′) замкнуто относительно операции коммутирования, задавая smn-мерную алгебру Ли преобразований окрестности $\mathcal{U}(i)\times\ldots\times\mathcal{U}(\tau)$ кортежа $\langle ijk\ldots v, \alpha\beta\gamma\ldots\tau\rangle$.

В окрестностях $\mathcal{U}(i)$ и $\mathcal{U}(\alpha)$ точек i и α из некоторых открытых и плотных в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ множеств выражениями $\lambda^{\mu}_{\omega}(i)$ и $\sigma^{\nu}_{\omega}(\alpha)$ решений (2I′), где $\mu = 1,\ldots, sm$; $\nu = 1,\ldots, sn$; $\omega = 1,\ldots, smn$, определены smn-мерные семейства гладких векторных полей с сопряженными базисами (7), замкнутые относительно операции коммутирования и задающие smn-мерные алгебры Ли преобразований этих окрестностей. Структурные константы обеих алгебр в базисах (7) будут, очевидно, совпадать. Векторные поля $X = a^{\omega}X_{\omega}$ и $\Xi = a^{\omega}\Xi_{\omega}$, где a^{ω} произвольные числа, определенные в окрестностях $\mathcal{U}(i), \mathcal{U}(j)$ и $\mathcal{U}(\alpha), \mathcal{U}(\beta)$ точек i, j и α, β, совпадают в пересечениях $\mathcal{U}(i)\cap\mathcal{U}(j)$ и $\mathcal{U}(\alpha)\cap\mathcal{U}(\beta)$. Если пара $\langle ij\rangle \in \mathcal{O}_f$, то функция $f(i\alpha)$ удовлетворяет системе

уравнений (8), получающейся из первого уравнения системы (I6) и ее решений (2I′).

Согласно второй (обратной) теореме С.Ли (см., например, /22/, с.438) алгебры Ли векторных полей с сопряженными базисами (7) однозначно определяют эффективные гладкие действия некоторой smn-мерной локальной группы Ли в окрестностях $U(i)$ и $U(\alpha)$ точек i и α, множество которых открыто и плотно в M и N соответственно, причем действия ее в окрестностях $U(i), U(j)$ и $U(\alpha), U(\beta)$ точек i,j и α,β совпадают в пересечениях $U(i) \cap U(j)$ и $U(\alpha) \cap U(\beta)$. То есть алгебры Ли с сопряженными базисами (7), имеющие в них одинаковые структурные константы, определяют smn-мерные локальные группы локальных преобразований некоторых открытых и плотных в M и N множеств, для которых исходная функция f, удовлетворяющая системе уравнений (8), является двухточечным инвариантом. Теорема 2 полностью доказана.

Естественным следствием первой и второй теорем настоящего параграфа является полная эквивалентность феноменологической симметрии физической структуры ранга $(n+1, m+1)$ и порядка s групповой симметрии степени smn (sm, sn)-мерной геометрии, задаваемых на множествах M и N функцией f.

В работе /I6/ для $s=1$ и произвольных m и n приведены все явные выражения функции f, задающей на множествах M и N физическую структуру ранга $(n+1, m+1)$ и порядка I. Решая уравнение (6), можно найти группу движений, допускаемых этой функцией. Соответствующие исследования, подтверждающие лемму 4 и теорему 2, составляют содержание следующего §2.

Заметим, что физические структуры ранга $(n+1, m+1)$ и порядка s в случае $s \geq 2$ еще не изучались подробно. Часть их для $s=2$ может быть получена комплексификацией соответствующих структур порядка I или их тривиальным наложением /30/. В работе /3I/

Ю.С. Владимирова комплексная (то есть порядка 2) физическая структура ранга (3,3) была использована, с одной стороны, для обоснования размерности и сигнатуры классического пространства-времени, а с другой - для интерпретации спиноров и биспиноров, с помощью которых в современной квантовой теории поля описываются состояния частиц и античастиц спина I/2. Комплексные физические структуры более высокого ранга им же предложено использовать для описания взаимодействий и построения их единой теории /32/.

§ 2. Группы движений в геометрии двух множеств

Согласно §I настоящей главы и работе /I4/, геометрия двух множеств (физическая структура) в общих чертах и кратко может быть определена следующим образом. Пусть множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ есть соответственно m -мерное и n -мерное гладкие многообразия. Обозначим локальные координаты этих многообразий через $x = (x^1, \ldots, x^m)$ и $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ и будем считать для определенности, что $m \leq n$. Пусть, далее, имеется функция f с открытой и плотной в $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ областью определения $\mathcal{O}_f$, сопоставляющая каждой паре из нее некоторое число. Функцию f будем условно называть метрикой в пространстве $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$, не требуя, естественно, выполнения обычных метрических аксиом, тем более, что расстояние для двух точек из $\mathcal{M}$ (или $\mathcal{N}$) не определено. Предполагается, что локальное координатное представление метрики f задается достаточно гладкой функцией (2) из §I:

$$f(x, \xi) = f(x^1, \ldots, x^m, \xi^1, \ldots, \xi^n), \qquad (I)$$

в которую координаты x и ξ входят существенным образом. Последнее, как известно, означает, что ни для каких локально обратимых замен координат $x \leftrightarrow y$ и $\xi \leftrightarrow \eta$ в многообразиях $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ функцию (I) нельзя записать в виде $f(y^1, \ldots, y^{m'}, \eta^1, \ldots, \eta^{n'})$, где или $m' < m$ или $n' < n$. Метрику f назовем невырожденной, если в представлении (I) она существенным образом зависит от локальных координат x и ξ .

Построим функцию F с естественной в $\mathcal{M}^{n+1} \times \mathcal{N}^{m+1}$ областью определения $\mathcal{O}_F$, сопоставляя каждому кортежу длины $m+n+2$ из $\mathcal{O}_F$ все $(m+1)(n+1)$ возможные по метрике f расстояния. Будем говорить, что функция f задает на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ феноменологически симметричную (m, n) -мерную геометрию

(физическую структуру) ранга $(n+1, m+1)$, если локально множество значений $F(\mathcal{G}_F)$ в $R^{(m+1)(n+1)}$ является подмножеством множества нулей некоторой достаточно гладкой функции φ от $(m+1)(n+1)$ переменных с $grad\,\varphi \neq 0$ на плотном в $\mathcal{G}_F$ подмножестве, то есть имеет место уравнение (I) из §I.

В работе /I6/ приведена полная сводка локальных результатов для физических структур произвольного ранга, а в работах /2I/, /33/ и диссертации /34/ показаны математические методы, которыми получены все эти результаты. Запишем их здесь с точностью до локально обратимой замены координат и переобозначения $\psi(f) \to f$, где ψ - произвольная функция одной переменной:

$m = 1$, $n = 1$:

$$f = x + \xi; \tag{2}$$

$m = 1$, $n = 2$:

$$f = x\xi + \eta; \tag{3}$$

$m = 1$, $n = 3$:

$$f = (x\xi + \eta)/(x + \vartheta); \tag{4}$$

$m = n \geq 2$:

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m, \tag{5}$$

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m + \xi^m; \tag{6}$$

$m = n - 1 \geq 2$:

$$f = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m + \xi^{m+1}. \tag{7}$$

Для всех остальных пар значений целых чисел m и n физические

структуры ранга $(n+1, m+1)$ не существуют вследствие вырождения метрики (I).

Под движением в геометрии двух множеств следует понимать такую пару достаточно гладких локальных преобразований многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$:

$$x' = \lambda(x), \quad \xi' = \sigma(\xi), \tag{8}$$

при которых метрика (I) сохраняется:

$$f(\lambda(x), \sigma(\xi)) = f(x, \xi). \tag{9}$$

(см. также выражения (5) и (6) из §I).

Если метрика f известна, то равенство (9) представляет собой уравнение относительно функций $\lambda(x)$ и $\sigma(\xi)$, решая которое можно найти полную группу движений и установить ее размерность. В настоящем параграфе находятся полные локальные группы локальных движений для каждой из шести метрик (2) - (7) как общие решения соответствующих уравнений (9), причем на функции $\lambda(x)$ и $\sigma(\xi)$, кроме гладкости и локальной обратимости, никакие ограничения (аналитичность, линейность и т. д.) не вводятся.

Т е о р е м а I. Полная локальная группа локальных движений (8) в геометрии двух множеств с одной из метрик (2) - (7) задается следующими локальными преобразованиями многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$:

для метрики (2):

$$x' = x + a, \quad \xi' = \xi - a; \tag{I0}$$

для метрики (3):

$$x' = ax + b, \quad \xi' = \xi/a, \quad \eta' = \eta - b\xi/a, \tag{II}$$

причем $a > 0$;

для метрики (4):

$$\left.\begin{aligned} x' &= (ax+b)/(cx+d),\ \xi' = (d\xi - c\eta)/(d-c\vartheta), \\ \eta' &= (a\eta - b\xi)/(d-c\vartheta),\ \vartheta' = (a\vartheta - b)/(d-c\vartheta), \end{aligned}\right\} \qquad (I2)$$

причем $ad - bc = 1$;

для метрики (5):

$$\left.\begin{aligned} x'^i &= a^{i1}x^1 + \dots + a^{im}x^m, \\ \xi'^i &= \tilde{a}^{1i}\xi^1 + \dots + \tilde{a}^{mi}\xi^m, \end{aligned}\right\} \qquad (I3)$$

где $i = 1, \dots, m$, a – квадратная невырожденная матрица порядка m с $\det a > 0$, $\tilde{a}$ – обратная к ней матрица;

для метрики (6):

$$\left.\begin{aligned} x'^i &= a^{i1}x^1 + \dots + a^{i,m-1}x^{m-1} + b^i, \\ x'^m &= x^m + c^1x^1 + \dots + c^{m-1}x^{m-1} + b^m, \\ \xi'^i &= \tilde{a}^{1i}(\xi^1 - c^1) + \dots + \tilde{a}^{m-1,i}(\xi^{m-1} - c^{m-1}), \\ \xi'^m &= \xi^m - (b^1\tilde{a}^{11} + \dots + b^{m-1}\tilde{a}^{1,m-1})(\xi^1 - c^1) - \dots - \\ &- (b^1\tilde{a}^{m-1,1} + \dots + b^{m-1}\tilde{a}^{m-1,m-1})(\xi^{m-1} - c^{m-1}) - b^m, \end{aligned}\right\} \qquad (I4)$$

где $i = 1, \dots, m-1$, a – квадратная невырожденная матрица порядка $m-1$ с $\det a > 0$, $\tilde{a}$ – обратная к ней матрица;

для метрики (7):

$$\left.\begin{aligned} x'^i &= a^{i1}x^1 + \dots + a^{im}x^m + b^i, \\ \xi'^i &= \tilde{a}^{1i}\xi^1 + \dots + \tilde{a}^{mi}\xi^m, \\ \xi'^{m+1} &= \xi^{m+1} - (b^1\tilde{a}^{11} + \dots + b^m\tilde{a}^{1m})\xi^1 - \\ &- \dots - (b^1\tilde{a}^{m1} + \dots + b^m\tilde{a}^{mm})\xi^m, \end{aligned}\right\} \qquad (I5)$$

где $i = 1, \ldots, m$, a - квадратная невырожденная матрица порядка m с $\det a > a$, $\tilde{a}$ - обратная к ней матрица.

Все перечисленные в теореме группы движений зависят от конечного числа существенных параметров, максимальное число которых, в соответствии с общими результатами §I гл.II (лемма 4 и теорема 2), равно произведению размерностей многообразий $\mathcal{M}_6$ и $\mathcal{M}_6$. Для сравнения заметим, что в n -мерной геометрии одного множества с одним расстоянием это число равно $n(n+1)/2$. Отметим также, что не для всякой функции (I) уравнение (9) имеет нетривиальное решение, то есть группа движений может состоять только из тождественных преобразований $\mathcal{M}_6$ и $\mathcal{M}_6$. Нетрудно установить, например, что для функции $f(x,\xi) = x\xi + \xi^3$ уравнение (9) имеет только тривиальное решение: $\lambda(x) = x$, $\sigma(\xi) = \xi$.

Приступим к доказательству теоремы I. Запишем сначала уравнение (9) для простейшей метрики (2):

$$\lambda(x) + \sigma(\xi) = x + \xi$$

и разделим в нем координаты x и ξ :

$$\lambda(x) - x = -\sigma(\xi) + \xi = a = const,$$

откуда находим функции $\lambda(x)$ и $\sigma(\xi)$:

$$\lambda(x) = x + a, \quad \sigma(\xi) = \xi - a. \tag{I6}$$

Выражения (I6) задают локальную однопараметрическую группу локальных движений (I0) метрики (2).

Запишем теперь уравнение (9) для метрики (3):

$$\lambda(x)\,\sigma(\xi,\eta) + \rho(\xi,\eta) = x\xi + \eta \tag{I7}$$

и продифференцируем его дважды по координате x :

$$\lambda''(x)\,\sigma(\xi,\eta) = 0.$$

Поскольку $\sigma(\xi,\eta)\neq 0$, имеем $\lambda''(x)=0$ и потому

$$\lambda(x)=ax+b. \tag{18}$$

где a, b – постоянные, причем $a\neq 0$, так как $\lambda'(x)\neq 0$.

Подставим функцию (I8) в исходное уравнение (I7):

$$(ax+b)\sigma(\xi,\eta)+\rho(\xi,\eta)=x\xi+\eta.$$

Сравним справа и слева коэффициенты при x и свободные от x члены:

$$a\sigma(\xi,\eta)=\xi,\quad b\sigma(\xi,\eta)+\rho(\xi,\eta)=\eta,$$

откуда находим:

$$\sigma(\xi,\eta)=\xi/a,\quad \rho(\xi,\eta)=\eta-b\xi/a. \tag{19}$$

Выражения (I8), (I9) задают группу всех движений (8) метрики (3), состоящую из двух несвязных компонент с $a>0$ и $a<0$. Первая связная компонента содержит тождественное преобразование ($a=1, b=0$) и является полной локальной двумерной группой локальных движений (II) этой метрики, входя в группу всех движений как подгруппа.

Запишем, далее, уравнение (9) для метрики (4):

$$\frac{\lambda(x)\sigma(\xi,\eta,\vartheta)+\rho(\xi,\eta,\vartheta)}{\lambda(x)+\tau(\xi,\eta,\vartheta)}=\frac{x\xi+\eta}{x+\vartheta}, \tag{20}$$

продифференцируем его по координате x и умножим на $(\lambda+\tau)^2$:

$$(\sigma\tau-\rho)\lambda'(x)=(\lambda(x)+\tau)^2(\xi\vartheta-\eta)/(x+\vartheta)^2.$$

Повторное дифференцирование этого равенства по координате x приводит к следующим двум соотношениям:

$$(\sigma\tau-\rho)^2\lambda''(x)=2(\lambda(x)+\tau)^3(\xi\nu-\eta)^2/(x+\nu)^4-$$

$$-2(\sigma\tau-\rho)(\lambda(x)+\tau)^2(\xi\nu-\eta)/(x+\nu)^3,$$

$$(\sigma\tau-\rho)^3\lambda'''(x)=6(\lambda(x)+\tau)^4(\xi\nu-\eta)^3/(x+\nu)^6-$$

$$-12(\sigma\tau-\rho)(\lambda(x)+\tau)^3(\xi\nu-\eta)^2/(x+\nu)^5+$$

$$+6(\sigma\tau-\rho)^2(\lambda(x)+\tau)^2(\xi\nu-\eta)/(x+\nu)^4,$$

откуда, имея в виду, что $\sigma\tau-\rho\neq 0$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\lambda(x)$:

$$2\lambda'(x)\lambda'''(x)=3(\lambda''(x))^2.$$

Общее решение этого уравнения записывается в следующем виде:

$$\lambda(x)=(ax+b)/(cx+d), \tag{21}$$

где a, b, c, d - постоянные (см. /35/, с. 526, № 7.10). Заметим, что в решении (21) из четырех параметров a, b, c, d только три существенных, поскольку $a\lambda_a+b\lambda_b+c\lambda_c+d\lambda_d=0$ (см. /36/, с. 78), и, кроме того, $\Delta=ad-bc\neq 0$, так как $\lambda'(x)\neq 0$. Вводя естественное переобозначение $a/\sqrt{|\Delta|}\to a$, $b/\sqrt{|\Delta|}\to b$, $c/\sqrt{|\Delta|}\to c$, $d/\sqrt{|\Delta|}\to d$, связь между параметрами в решении (21) можно записать в следующем виде:

$$\Delta=ad-bc=\pm 1. \tag{22}$$

Подставим выражение (21) в исходное уравнение (20):

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\sigma+\rho\right)(x+\nu)=\left(\frac{ax+b}{cx+d}+\tau\right)(x\xi+\eta),$$

приведем его к общему знаменателю, перемножим скобки и сравним в числителях правой и левой частей коэффициенты при x^2, x и свободные от x члены. Относительно функций σ, τ, ρ получается система трех линейных неоднородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a\sigma + c\rho - c\xi\tau &= a\xi, \\ (b + a\vartheta)\sigma + (d + c\vartheta)\rho - (d\xi + c\eta)\tau &= b\xi + a\eta, \\ b\vartheta\sigma + d\vartheta\rho - d\eta\tau &= b\eta. \end{aligned}\right\}$$

определитель которой, равный

$$(ad - bc)(d - c\vartheta)(\xi\vartheta - \eta),$$

очевидно, отличен от нуля. Используя формулы Крамера, найдем решение этой системы:

$$\left.\begin{aligned} \sigma(\xi, \eta, \vartheta) &= (d\xi - c\eta)/(d - c\vartheta), \\ \rho(\xi, \eta, \vartheta) &= (a\eta - b\xi)/(d - c\vartheta), \\ \tau(\xi, \eta, \vartheta) &= (a\vartheta - b)/(d - c\vartheta). \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Выражения (21), (23) задают группу всех движений метрики (4), состоящую, согласно (22), из двух несвязных компонент с $\Delta = +1$ и $\Delta = -1$. Первая связная компонента с $\Delta = +1$ содержит тождественное преобразование ($a = d = 1$, $b = c = 0$) и является полной локальной трехмерной группой локальных движений (12) этой метрики, входя в группу всех движений как подгруппа.

Перейдем теперь к рассмотрению физических структур ранга $(m+1, m+1)$ с $m \geq 2$ для которых имеются две метрики (5) и (6). Эти метрики неэквивалентны, то есть не могут быть переведены друг в друга никакой локально обратимой заменой координат. Запишем сначала уравнение (9) для первой метрики (5):

$$\lambda^1(x)\sigma^1(\xi) + \ldots + \lambda^m(x)\sigma^m(\xi) = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m \qquad (24)$$

и продифференцируем его отдельно по всем координатам $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^m)$:

$$\lambda^1(x)\sigma^1_{\xi^i}(\xi) + \ldots + \lambda^m(x)\sigma^m_{\xi^i}(\xi) = x^i, \qquad (25)$$

где $i = 1, \ldots, m$. Относительно функций $\lambda^1(x), \ldots, \lambda^m(x)$ получена система m линейных неоднородных уравнений. Матрица системы (25) является одновременно матрицей Якоби для функций $\sigma^1(\xi), \ldots, \sigma^m(\xi)$ и определитель ее отличен от нуля, так как эти функции независимы. Решение системы (25) найдем по правилу Крамера:

$$\lambda^i(x) = a^{i1}x^1 + \ldots + a^{im}x^m. \qquad (26)$$

Матрица a в выражениях (26) квадратная, невырожденная, так как функции $\lambda^1(x), \ldots, \lambda^m(x)$ независимы, и порядок ее равен m, то есть числу координат. Нетрудно убедиться в том, что элементы матрицы a постоянны. Действительно,

$$\partial\lambda^i(x)/\partial x^j = a^{ij}(\xi) = a^{ij} = const.$$

Выражения (26) для функций $\lambda(x)$ подставим в исходное уравнение (24):

$$(a^{11}x^1 + \ldots + a^{1m}x^m)\sigma^1(\xi) + \ldots +$$

$$+ (a^{m1}x^1 + \ldots + a^{mm}x^m)\sigma^m(\xi) = x^1\xi^1 + \ldots + x^m\xi^m.$$

Сравним в правой и левой частях последнего равенства коэффициенты при одинаковых координатах $x = (x^1, \ldots, x^m)$:

$$a^{1i}\sigma^1(\xi) + \ldots + a^{mi}\sigma^m(\xi) = \xi^i. \qquad (27)$$

Относительно функций $\sigma^1(\xi), \ldots, \sigma^m(\xi)$ получена система m линейных неоднородных уравнений. Матрица этой системы с точностью до

транспонирования совпадает с матрицей a, у которой определитель отличен от нуля. Поэтому система (27) может быть решена методом Крамера:

$$\sigma^i(\xi) = \tilde{a}^{1i}\xi^1 + \dots + \tilde{a}^{mi}\xi^m, \tag{28}$$

где $\tilde{a}$ - обратная к a матрица. Выражения (26), (28) задают группу всех движений (8) метрики (5), состоящую из двух несвязных компонент с $det a > 0$ и $det a < 0$. Первая связная компонента с $det a > 0$ содержит тождественное преобразование ($a = I$) и является полной локальной m^2-мерной группой локальных движений (I3) этой метрики.

Запишем, далее, уравнение (9) для второй метрики (6) физической структуры ранга $(m+1, m+1)$:

$$\lambda^1(x)\sigma^1(\xi) + \dots + \lambda^{m-1}(x)\sigma^{m-1}(\xi) + \lambda^m(x) + \sigma^m(\xi) =$$

$$= x^1\xi^1 + \dots + x^{m-1}\xi^{m-1} + x^m + \xi^m \tag{29}$$

и продифференцируем его отдельно по каждой из координат $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^{m-1}, \xi^m)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^1(x)\sigma^1_{\xi^i}(\xi) + \dots + \lambda^{m-1}(x)\sigma^{m-1}_{\xi^i}(\xi) + \sigma^m_{\xi^i}(\xi) = x^i, \\ \lambda^1(x)\sigma^1_{\xi^m}(\xi) + \dots + \lambda^{m-1}(x)\sigma^{m-1}_{\xi^m}(\xi) + \sigma^m_{\xi^m}(\xi) = 1, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

где $i = 1, \dots, m-1$. Относительно функций $\lambda^1(x), \dots, \lambda^{m-1}(x)$ получена система m линейных неоднородных уравнений, ранг матрицы которой равен $m-1$, так как функции $\sigma^1(\xi), \dots, \sigma^{m-1}(\xi)$ независимы. Согласно теореме Кронекера-Капелли для совместности системы уравнений (30) необходимо и достаточно, чтобы ранг ее расширенной матрицы тоже равнялся $m-1$, то есть чтобы обращался в нуль следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} \sigma^{1}_{\xi^1}(\xi) & \dots & \sigma^{m-1}_{\xi^1}(\xi) & x^1 - \sigma^{m}_{\xi^1}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma^{1}_{\xi^{m-1}}(\xi) & \dots & \sigma^{m-1}_{\xi^{m-1}}(\xi) & x^{m-1} - \sigma^{m}_{\xi^{m-1}}(\xi) \\ \sigma^{1}_{\xi^m}(\xi) & \dots & \sigma^{m-1}_{\xi^m}(\xi) & 1 - \sigma^{m}_{\xi^m}(\xi) \end{vmatrix} = 0 .$$

В силу независимости координат $x^1, \dots, x^{m-1}$ отсюда легко получаем, что для системы функций $\sigma^1(\xi), \dots, \sigma^{m-1}(\xi)$ должен быть отличен от нуля только якобиан $\partial(\sigma^1, \dots, \sigma^{m-1})/\partial(\xi^1, \dots, \xi^{m-1})$ и, кроме того, $\sigma^{m}_{\xi^m}(\xi) = 1$. Таким образом, в системе (30) первые $m-1$ уравнений линейно независимы и их решение можно получить по формулам Крамера:

$$\lambda^i(x) = a^{i1}x^1 + \dots + a^{i,m-1}x^{m-1} + b^i . \qquad (3I)$$

Выражения (3I) подставим в исходное уравнение (29) и разрешим его относительно функции $\lambda^m(x)$:

$$\lambda^m(x) = x^m + c^1x^1 + \dots + c^{m-1}x^{m-1} + b^m . \qquad (3I')$$

Заметим, что строение функции (3I′) отличается от строения функций (3I). Аналогично предыдущему, нетрудно убедиться в том, что элементы матрицы a и компоненты строк (b^i, b^m), c^i , где $i = 1, \dots, m-1$, постоянны. Вследствие независимости функций (3I), (3I′), матрица Якоби для них должна быть невырожденной. Но координата x^ω не входит явно в систему функций (3I), поэтому квадратная матрица a , имеющая порядок $m-1$, также невырождена.

Подставим выражения (3I), (3I′) в исходное уравнение (29) и сравним в его правой и левой частях коэффициенты при координатах $x = (x^1, \dots, x^m)$ и свободные от них члены:

$$\left.\begin{aligned} a^{1i}\sigma^1(\xi)+\ldots+a^{m-1,i}\sigma^{m-1}(\xi)+c^i=\xi^i,\\ \sigma^m(\xi)+b^1\sigma^1(\xi)+\ldots+b^{m-1}\sigma^{m-1}(\xi)+b^m=\xi^m. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Решение первых $m-1$ уравнений системы (32) относительно функций $\sigma^i(\xi), i=1,\ldots,m-1$ может быть найдено по формулам Крамера, а затем из последнего уравнения этой системы найдем функцию $\sigma^m(\xi)$. В результате получаем:

$$\left.\begin{aligned} \sigma^i(\xi)=\tilde{a}^{1i}(\xi^1-c^1)+\ldots+\tilde{a}^{m-1,i}(\xi^{m-1}-c^{m-1}),\\ \sigma^m(\xi)=\xi^m-(b^1\tilde{a}^{11}+\ldots+b^{m-1}\tilde{a}^{1,m-1})(\xi^1-c^1)-\ldots-\\ -(b^1\tilde{a}^{m-1,1}+\ldots+b^{m-1}\tilde{a}^{m-1,m-1})(\xi^{m-1}-c^{m-1})-b^m, \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

где $\tilde{a}$ – обратная к a матрица порядка $m-1$. Выражения (3I), (3I′) и (33) задают группу всех движений (8) метрики (6), состоящую из двух несвязных компонент с $deta>0$ и $deta<0$. Первая связная компонента с $deta>0$ содержит тождественное преобразование ($a=I$, $b^1=\ldots=b^{m-1}=b^m=0$, $c^1=\ldots=c^{m-1}=0$) и является полной локальной m^2-мерной группой локальных движений (I4) метрики (6). Эта группа зависит от m^2 существенных параметров – элементов квадратной матрицы a, имеющей порядок $m-1$, и компонент строк $(b^i, b^m), c^i$, где $i=1,\ldots,m-1$, входя в группу всех движений как подгруппа.

Запишем, наконец, уравнение (9) для последней метрики (7), когда многообразия M_b и $\bar{M}_b$ имеют различную размерность:

$$\lambda^1(x)\sigma^1(\xi)+\ldots+\lambda^m(x)\sigma^m(\xi)+\sigma^{m+1}(\xi)=$$

$$=x^1\xi^1+\ldots+x^m\xi^m+\xi^{m+1} \quad (34)$$

и продифференцируем его по каждой из координат $\xi=(\xi^1,\ldots,\xi^m,$

ξ^{m+1}:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^1(x)\,\sigma^1_{\xi i}(\xi) + \dots + \lambda^m(x)\,\sigma^m_{\xi i}(\xi) + \sigma^{m+1}_{\xi i}(\xi) = x^i, \\ \lambda^1(x)\,\sigma^1_{\xi m+1}(\xi) + \dots + \lambda^m(x)\,\sigma^m_{\xi m+1}(\xi) + \sigma^{m+1}_{\xi m+1}(\xi) = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

где $i = 1, \dots, m$. Система уравнений (35) вполне аналогична системе (30) и ее решение можно записать сразу по выражению (31):

$$\lambda^i(x) = a^{i1}x^1 + \dots + a^{im}x^m + b^i. \qquad (36)$$

Квадратная матрица a в решении (36) имеет порядок m и невырождена, так как функции $\lambda^i(x)$, $i = 1, \dots, m$ независимы. Легко также показать, как в случае решения (26), что элементы матрицы a и компоненты строки b^i постоянны.

Подставим выражения (36) в исходное уравнение (34) и сравним в его правой и левой частях коэффициенты при координатах $x = (x^1, \dots, x^m)$ и свободные от них члены:

$$\left.\begin{aligned} a^{1i}\sigma^1(\xi) + \dots + a^{mi}\sigma^m(\xi) = \xi^i, \\ b^1\sigma^1(\xi) + \dots + b^m\sigma^m(\xi) + \sigma^{m+1}(\xi) = \xi^{m+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Система уравнений (37) вполне аналогична частному случаю системы (32) и ее решение можно записать по выражению (33):

$$\left.\begin{aligned} \sigma^i(\xi) = \tilde{a}^{1i}\xi^1 + \dots + \tilde{a}^{mi}\xi^m, \\ \sigma^{m+1}(\xi) = \xi^{m+1} - (b^1\tilde{a}^{11} + \dots + b^m\tilde{a}^{1m})\xi^1 - \\ - \dots - (b^1\tilde{a}^{m1} + \dots + b^m\tilde{a}^{mm})\xi^m, \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

где $\tilde{a}$ - обратная к a матрица порядка m. Выражения (36) и (38) задают группу всех движений (8) метрики (7), зависящую от

$m(m+1)$ существенных параметров - элементов квадратной матрицы a, имеющей порядок m, и компонент строки b^i, $i = 1,\dots,m$. Ее связная компонента с $det\,a > 0$, содержащая тождественное преобразование $(a = I,\ b^1 = \dots = b^m = 0)$, является полной локальной $m(m+1)$- мерной группой локальных движений (I5) метрики (7) и входит в группу всех движений этой метрики как подгруппа. Теорема I полностью доказана.

В каждой из групп движений (I0) - (I5) группы преобразований $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, имея одну и ту же параметрическую группу, изоморфны, но не обязательно эквивалентны, то есть не обязательно переходят друг в друга при некотором локально обратимом гладком отображении $\varphi: \mathcal{M} \to \mathcal{N}$. Эквивалентность имеет место только в однопараметрической группе (I0), в которой локальное движение состоит из двух параллельных переносов. Неэквивалентность в группах движений (II), (I2), (I5) обусловлена тем, что преобразуемые в них многообразия $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ имеют различную размерность. В группах движений (I3), (I4) эти многообразия имеют одинаковую размерность и естественно было ожидать эквивалентности групп их преобразований, однако имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 2. Локальные группы локальных преобразований многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, задающие группы движений (I3), (I4) метрик (5), (6), неэквивалентны.

Докажем сначала теорему 2 для группы движений (I3) метрики (5). Тождественному преобразованию многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответствует единичная матрица $(a = I)$. Рассматривая бесконечно малое движение, из уравнений (I3) сравнительно нетрудно найти инфинитезимальные операторы X_{ij} и Ξ_{ij}, задающие соответствующие локальные группы локальных преобразований многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$:

$$X_{ij} = x^j \partial/\partial x^i,\quad \Xi_{ij} = -\xi^i \partial/\partial \xi^j, \tag{39}$$

где $i,j = 1,\ldots,m$ (см. /36/, с. 48–49). Операторы X_{ij} и Ξ_{ij} являются базисными для соответствующих m^2 -мерных алгебр Ли. Для того, чтобы в группе движений (I3) были эквивалентны локальные группы преобразований многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, необходимо и достаточно, чтобы были эквивалентны их алгебры Ли с базисными операторами X_{ij} и Ξ_{ij} (см. /23/, с. 220 и §3 гл.II).

Предположим, что при некотором локально обратимом отображении

$$\xi = \varphi(x) \tag{40}$$

операторы X_{ij} и Ξ_{ij}, определяемые выражениями (39), переходят соответственно друг в друга. Для функций $\varphi(x) = (\varphi^1(x),\ldots,\varphi^m(x))$ из формул преобразования операторов X_{ij} при замене координат (40) и сравнения их с операторами Ξ_{ij} получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$x^j \partial\varphi^k/\partial x^i = -\delta^{jk}\varphi^i, \tag{4I}$$

где δ – единичная матрица порядка m. Поскольку $i,j,k = 1,\ldots,m$ и $m \geqslant 2$, для любого k можно найти такое j, что $k \neq j$. Но тогда из уравнения (4I) следует, что $\partial\varphi^k/\partial x^i = 0$ для любых i,k, то есть $\varphi(x) = const$, что противоречит, очевидно, локальной обратимости отображения (40). Полученное противоречие означает, что алгебры Ли с базисными операторами (39) неэквивалентны и потому неэквивалентны соответствующие локальные группы преобразований m -мерных многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в группе движений (I3) метрики (5).

Рассмотрим теперь группу движений (I4) метрики (6). Инфинитезимальные операторы, задающие соответствующие локальные преобразования многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в этих движениях, определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned} X_{ij} &= x^j \partial/\partial x^i, & \Xi_{ij} &= -\xi^i \partial/\partial \xi^j, \\ X_{im} &= \partial/\partial x^i, & \Xi_{im} &= -\xi^i \partial/\partial \xi^m, \\ X_{mi} &= x^i \partial/\partial x^m, & \Xi_{mi} &= -\partial/\partial \xi^i, \\ X_{mm} &= \partial/\partial x^m, & \Xi_{mm} &= -\partial/\partial \xi^m, \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

где $i,j = 1,\dots,m-1$. Предположим, что алгебры Ли с базисами (42) эквивалентны, то есть операторы $X_{ij}, X_{im}, X_{mi}, X_{mm}$ переходят соответственно в операторы $\Xi_{ij}, \Xi_{im}, \Xi_{mi}, \Xi_{mm}$ при некотором локально обратимом отображении (40). Тогда относительно функций $\varphi(x) = (\varphi^1(x),\dots,\varphi^{m-1}(x), \varphi^m(x))$, так же как и в предыдущем случае, получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x^j \partial\varphi^k/\partial x^i &= -\delta^{jk}\varphi^i, & x^j \partial\varphi^m/\partial x^i &= 0, \\ \partial\varphi^k/\partial x^i &= 0, & \partial\varphi^m/\partial x^i &= -\varphi^i, \\ x^i \partial\varphi^k/\partial x^m &= -\delta^{ik}, & x^i \partial\varphi^m/\partial x^m &= 0, \\ \partial\varphi^k/\partial x^m &= 0, & \partial\varphi^m/\partial x^m &= -1, \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Система (43) явно несовместна, так как, например, из двух последних уравнений второго столбца получаем $x^i = 0$, $i = 1,\dots,m-1$, что противоречит независимости координаты x^i. Неэквивалентность алгебр Ли с базисными операторами (42) означает неэквивалентность соответствующих локальных групп преобразований m - мерных многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в группе движений (I4) метрики (6). Теорема 2 полностью доказана.

Заметим, что неэквивалентные алгебры Ли с базисами (39) становятся эквивалентными, если в одной из них перейти к другому ба-

зису. Действительно, автоморфизм $X_{ij} \to -X_{ji}$ и тривиальное отображение $\xi^i = x^i$ переводит базис первой алгебры в базис второй. Но автоморфизм $X_{ij} \to -X_{ji}$ индуцируется, очевидно, некоторым автоморфизмом параметрической группы. В этом случае говорят, что группы преобразований многообразий M_6 и N_6 слабо эквивалентны. Как отмечено в /37/ на с. 44, не всегда слабо эквивалентные группы преобразований эквивалентны. Аналогично, неэквивалентные алгебры Ли с базисными операторами (42) становятся эквивалентными при тривиальном отображении (40) и автоморфизме $X_{ij} \to -X_{ji}$, $X_{im} \to -X_{mi}$, $X_{mi} \to -X_{im}$, $X_{mm} \to -X_{mm}$, что говорит о слабой эквивалентности соответствующих неэквивалентных групп преобразований многообразий M_6 и N_6 в группе движений (I4).

Установленная в §I эквивалентность групповой и феноменологической симметрий в геометрии двух множеств естественно приводит к следующей задаче в теории групп Ли:

для всех эквивалентных и не эквивалентных эффективных и гладких локальных действий smn -мерных локальных групп Ли в sm -мерном многообразии M_6 и sn -мерном многообразии N_6 найти все невырожденные двухточечные инварианты, удовлетворяющие уравнению (9).

Так сформулированная задача предполагает предварительную классификацию локальных групп преобразований с точностью до эквивалентности (замены координат) в каждом локально изоморфном классе. Однако имеющаяся полная классификация С. Ли (см./36/, с. 24 - 27) проведена только для одномерного и двумерного многообразий, причем с точностью до слабой эквивалентности. Поскольку слабо эквивалентные группы преобразований могут оказаться неэквивалентными, а также в силу теоремы 2, такая точность классификации оказывается недостаточной.

С другой стороны, для случая $s = 1$ все возможные невырожденные феноменологически инвариантные метрики (I) геометрии двух множеств при любых размерностях m и n многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ были найдены методами теории физических структур без предварительной классификации mn -мерных групп преобразований. По известным выражениям этих метрик, решая уравнение (9), можно затем найти полные локальные группы их локальных движений и соответствующие группы преобразований многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, что и явилось основным содержанием настоящего параграфа.

В заключение приведем пример физической структуры ранга (2,2) и порядка I, задаваемой на двумерных многообразиях $\{x, y\}$ и $\{\xi, \eta\}$ функцией $f = (f^1, f^2)$. Возможны два и только два типа таких структур /30/. Физическая структура первого типа есть простое наложение двух структур ранга (2,2) и порядка I:

$$f^1 = x + \xi \,, \quad f^2 = y + \eta \,. \tag{44}$$

Физическая структура второго типа не сводима к случаю $s = 1$:

$$f^1 = (x + \xi)y \,, \quad f^2 = (x + \xi)\eta \,. \tag{45}$$

Соответствующие группы локальных движений задаются следующими преобразованиями многообразий $\{x, y\}$ и $\{\xi, \eta\}$:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a \,, \quad y' = y + b \,, \\ \xi' &= \xi - a \,, \quad \eta' = \eta - b \,, \end{aligned}\right\} \tag{44'}$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + b \,, \quad y' = y/a \,, \\ \xi' &= a\xi - b \,, \quad \eta' = \eta/a \,. \end{aligned}\right\} \tag{45'}$$

§ 3. Об изоморфизме и подобии, слабой эквивалентности и эквивалентности групп преобразований, их взаимном расширении и двухточечных инвариантах.

Из теоремы 2 предыдущего параграфа следует, что задача вычисления двухточечных инвариантов предполагает проведение классификации групп преобразований с точностью до эквивалентности, допускающей только замену координат. Слабая эквивалентность, допускающая также и замену параметров, для этой цели оказывается недостаточной. Более того, двухточечные инварианты (5) и (6) из § 2 не могут быть получены, если классификация групп преобразований проведена только с точностью до слабой эквивалентности (то есть подобия в каждом классе изоморфных групп). Но именно с такой точностью С.Ли проводил свою классификацию. В § 4 гл.I на примере локальных трёхмерных групп Ли преобразований плоскости было установлено различие классификаций с точностью до эквивалентности и слабой эквивалентности. В следующем параграфе на примере локальных четырёхмерных групп Ли преобразований плоскости наглядно будет показана существенность этого различия, а в § 5 его роль при изучении групповых свойств физической структуры ранга (3,3). В настоящем же параграфе будут даны определения изоморфизма и подобия, слабой эквивалентности и эквивалентности групп преобразований, обсуждены их связи и различия в свете задач, возникающих в теории физических структур.

В начале § 2 гл. I по монографии Л.С.Понтрягина (см./22/, с. 435) было дано определение локальной группы Ли $G^r(\lambda)$ преобразований области $\mathcal{U}$ многообразия $\mathcal{M}$ как эффективного действия локальной группы Ли G^r на $\mathcal{U}$. Будем говорить, что задана локальная группа Ли локальных преобразований многообразия $\mathcal{M}$, если

для каждой его точки задано эффективное гладкое действие G^r в некоторой ее окрестности, причем действия эти совпадают в пересечении окрестностей двух точек. Сохраним для этой группы преобразований прежнее обозначение $G^r(\lambda)$.

Рассмотрим локальную r-мерную группу Ли $G^r(\lambda)$ локальных преобразований m-мерного гладкого многообразия M:

$$x' = \lambda(x, a), \qquad (1)$$

где $a \in G^r$, $x, x' \in M$ и λ - эффективное гладкое действие G^r в M. Группу $G^r(\lambda)$ естественно рассматривать как точное представление (реализацию) r-мерной локальной группы Ли G^r (см. /23/, с.210). Группа G^r с законом умножения

$$ab = \varphi(a, b) \qquad (2)$$

обычно называется параметрической группой группы преобразований $G^r(\lambda)$.

Выбрав некоторую локальную систему координат $x = (x^1, \ldots, x^m)$ на многообразии M и некоторую локальную систему параметров $a = (a^1, \ldots, a^r)$ в группе G^r, обозначим через

$$X_\omega = \lambda^\mu_\omega(x)\,\partial/\partial x^\mu \qquad (3)$$

инфинитезимальные операторы группы $G^r(\lambda)$, где $\omega = 1, \ldots, r$ и по "немому" индексу μ производится суммирование в пределах от I до m. Поскольку группа G^r действует в M эффективно, операторы X_ω линейно независимы с постоянными коэффициентами, образуют базис соответствующей r-мерной алгебры Ли. Коммутаторы операторов (3) выражаются линейно через эти же операторы с помощью структурных констант: $[X_\omega, X_{\omega'}] = C^{\omega''}_{\omega\omega'} X_{\omega''}$.

Пусть имеется ещё одна локальная r-мерная группа Ли $H^r(\sigma)$ локальных преобразований n-мерного гладкого многообразия N:

$$\xi' = \sigma(\xi, \alpha) \qquad (4)$$

где $\alpha \in H^r$, $\xi, \xi' \in \mathcal{N}$ и σ - эффективное гладкое действие H^r в $\mathcal{N}$. Закон умножения в параматрической группе H^r будет:

$$\alpha\beta = \psi(\alpha, \beta). \qquad (5)$$

Выбрав некоторую локальную систему координат $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ на многообразии $\mathcal{N}$ и некоторую локальную систему переметров $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^r)$ в группе H^r, обозначим через

$$\Xi_\omega = \sigma^\nu_\omega(\xi)\partial/\partial\xi^\nu \qquad (6)$$

инфинитезимальные операторы группы $H^r(\sigma)$, где $\omega = 1, \ldots, r$ и $\nu = 1, \ldots, n$. Операторы Ξ_ω образуют базис соответствующей r-мерной алгебры Ли, причём $[\Xi_\omega, \Xi_{\omega'}] = \tilde{C}^{\omega''}_{\omega\omega'}\Xi_{\omega''}$.

Заметим, что группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $H^r(\sigma)$ зависят от одинакового числа параметров, равного r, однако законы умножения (2) и (5) в их параметрических группах не предполагаются как-то связанными, в частности, не обязательно, $C^{\omega''}_{\omega\omega'} = \tilde{C}^{\omega''}_{\omega\omega'}$. Многообразия же $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, в которых эффективно действуют группы G^r и H^r, могут иметь различную размерность. Отметим также, что замена параметров $a = (a^1, \ldots, a^r)$ в группе $G^r(\lambda)$, например, индуцирует линейное преобразование базиса (3) соответствующей алгебры, причём структурные константы $C^{\omega''}_{\omega\omega'}$ могут измениться, в то время как замена локальных координат $x = (x^1, \ldots, x^m)$ на многообразии $\mathcal{M}$ меняет только выражения для базисных операторов (см./24/, с.35).

О п р е д е л е н и е I. Группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $H^r(\sigma)$ называются локально изоморфными, если локально изоморфны их параметрические группы G^r и H^r.

Локальный изоморфизм групп Ли G^r и H^r, как известно

(см./23/, с.152), означает, что существует такое локально обратимое отображение $u : G^r \to H^r$, при котором законы умножения (2) и (5) переходят друг в друга, то есть справедливо равенство:

$$u(\varphi(a,b)) = \psi(u(a), u(b)) \qquad (7)$$

для всех a, b из некоторой окрестности единичного элемента $e \in G^r$.

Из теорем С.Ли о соответствии локальных групп преобразований и их алгебр непосредственно вытекает следующая лемма:

Л е м м а I. Для того, чтобы группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $H^r(\sigma)$ были локально изоморфными, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое невырожденное линейное преобразование базиса (3) при котором структурные константы в новом базисе и в базисе (6) совпадут.

О п р е д е л е н и е 2. Группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $H^r(\sigma)$ называются локально подобными, если существуют такие локально обратимые отображения $u : G^r \to H^r$ и $v : M^n \to M^n$, при которых законы умножения (2) и (5), а также действия (I) и (4) переходят друг в друга, то есть, кроме равенства (7), имеет место второе равенство:

$$v(\lambda(x,a)) = \sigma(v(x), u(a)) \qquad (8)$$

для всех x из некоторой области в M^n и всех a из некоторой окрестности единичного элемента $e \in G^r$.

Подобные группы по определению изоморфны, однако изоморфные группы преобразований не обязательно подобны. В частности, подобие невозможно, когда преобразуемые многообразия M^n и M^n имеют различную размерность. Но даже и при $m = n$ изоморфные группы преобразований могут не быть подобными. Например, группа движений плоскости Лобачевского локально изоморфна группе движений симплекти-

ческой плоскости, но подобия между этими группами нет, что является одним из признаков принципиального различия соответствующих плоских геометрий.

Л е м м а 2 . Для того, чтобы группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $H^r(\sigma)$ были локально подобны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такое невырожденное линейное преобразование базиса (3) и такая локально обратимая замена координат $x \to \xi$, при которых в новом базисе и в базисе (6) операторы с одним и тем же индексом ω будут иметь одинаковые выражения.

Все свои результаты по классификации групп преобразований С.Ли получал с точностью до локального подобия. Действительно, в его работах (см., например, /25/) постоянно используется линейное преобразование базисных операторов соответствующей алгебры Ли для приведения их к "системе операторов возможно более высоких порядков" (см./36/, с. 213), а также замена координат для максимального упрощения выражений этих операторов.

Рассмотрим теперь две локальные группы Ли $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ локальных преобразований многообразий M и N размерности m и n , у которых одна и та же параметрическая группа G^r :

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x, a), \\ \xi' &= \sigma(\xi, a), \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

где $a \in G^r$, $x, x' \in M$ и $\xi, \xi' \in N$, λ и σ - эффективные гладкие действия G^r в M и N . В этом случае базисы (3) и (6) сопряжены друг другу и структурные константы в них совпадают, то есть $C_{\omega\omega'}^{\omega''} = \tilde{C}_{\omega\omega'}^{\omega''}$.

О п р е д е л е н и е 3 . Группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, имеющие одну и ту же параметрическую группу G^r , называются локально слабо эквивалентными, если существует такой ло-

кальный автоморфизм $u: G^r \to G^r$ и такое локально обратимое отображение $v: M \to M$, что для действий (9) имеет место равенство (8).

Таким образом, слабая эквивалентность групп $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ есть их подобие, причём в равенстве (7) должно быть $\psi = \varphi$, так как u в определении 3 является автоморфизмом.

Л е м м а 3. Для того, чтобы группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, имеющие одну и ту же параметрическую группу G^r, были локально слабо эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такое невырожденное линейное преобразование базиса (3), сохраняющее структурные константы, и такая локально обратимая замена координат $x \to \xi$, при которых в новом базисе и в базисе (6) операторы с одним и тем же индексом ω будут иметь одинаковые выражения.

О п р е д е л е н и е 4. Группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, имеющие одну и ту же параметрическую группу G^r, называются локально эквивалентными, если существует такое локально обратимое отображение $w: M \to M$, при котором действия (9) переходят друг в друга, то есть имеет место равенство

$$w(\lambda(x, a)) = \sigma(w(x), a) \qquad (10)$$

для всех x из некоторой области в M и всех a из некоторой окрестности единичного элемента $e \in G^r$.

Л е м м а 4. Для того, чтобы группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, имеющие одну и ту же параметрическую группу G^r, были локально эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая локально обратимая замена координат $x \to \xi$, при которой в сопряжённых базисах (3) и (6) операторы X_ω и Ξ_ω будут иметь одинаковые выражения.

Так же, как и лемма I, леммы 2, 3 и 4 являются следствием

теорем С.Ли о соответствии групп преобразований и их алгебр в виду леммы I-4, будем говорить также, что изоморфны, подобны, слабо эквивалентны или эквивалентны алгебры Ли преобразований с базисами (3), (6), если изоморфны, подобны, слабо эквивалентны или эквивалентны группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $H^r(\sigma)$ с эффективными действиями λ и σ, которым эти алгебры соответствуют.

Эквивалентные группы преобразований по определению слабо эквивалентны, но, как отмечено в /37/ на стр. 44, слабо эквивалентные группы не обязательно эквивалентны, хотя те и другие подобны. То есть если уравнения (8) при заданных действиях λ и σ имеют решение относительно автоморфизма u и отображения v, то соответствующие эквивалентности уравнения (I0) относительно отображения w могут оказаться несовместными.

Заметим, что различию между эквивалентностью и слабой эквивалентностью обычно не придают особого значения. Например, Эйзенхарт /24/ на стр. 95 следующим образом формулирует критерий подобия групп преобразований $G^r(\lambda)$ и $H^r(\sigma)$: пусть базисы (3) и (6) соответствующих алгебр Ли выбраны так, что структурные константы в них совпадают; тогда необходимым и достаточным условием подобия является тождество координатных выражений для базисных операторов обеих алгебр при некоторой замене координат. Линейное преобразование, приводящее к совпадению структурных констант, определяется с точностью до автоморфизмов. Однако не для любого автоморфизма можно найти такую замену координат, которая возвращает базисным операторам их прежние координатные выражения, что будет показано ниже на конкретных примерах.

В §4 гл.I были найдены с точностью до эквивалентности в каждом изоморфном классе все трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости. Рассмотрим из него более подробно пример слабо эквивалентных, но не эквивалентных алгебр с базисами (5.I) и (5.2):

$$X_1 = \partial_x , \quad X_2 = y\partial_x , \quad X_3 = -\partial_y , \tag{II}$$

$$X_1 = \partial_x , \quad X_2 = \partial_y , \quad X_3 = y\partial_x + \delta\partial_y , \tag{I2}$$

где δ - произвольная постоянная, имеющих в заданных базисах одинаковые коммутационные соотношения:

$$[X_1, X_2] = 0, \; [X_3, X_1] = 0, \; [X_2, X_3] = X_1 . \tag{I3}$$

Переход в алгебре (II) к другому базису, а именно: $X_1, -X_3, X_2 - \delta X_3$, при тех же координатах приводит к совпадению с базисными операторами алгебры (I2), что и говорит об их слабой эквивалентности. Если же в алгебре (II) не переходить к указанному базису, то в заданных базисах никакая локально обратимая замена координат:

$$\xi = v(x,y) , \quad \eta = w(x,y) \tag{I4}$$

не приведет к совпадению выражений для базисных операторов (II) и (I2). Докажем это, предположив обратное. Для функций $v(x,y)$ и $w(x,y)$ из формул преобразования трех базисных операторов алгебры (II) при замене координат (I4) и сравнения их с соответствующими операторами алгебры (I2), переписанными в координатах ξ, η, получаем систему шести дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} v_x = 1 , \quad w_x = 0 , \quad y v_x = 0 , \\ y w_x = 1 , \quad -v_y = w , \quad -w_y = \delta . \end{aligned}\right\} \tag{I5}$$

Система эта явно несовместна, что и доказывает неэквивалентность алгебр с базисами (II) и (I2). Заметим, что алгебры (I2) с разными значениями постоянной δ также неэквивалентны, в то время как аналогично устроенные алгебры с базисами

$$X_1 = \partial_x\,,\quad X_2 = y\partial_x\,,\quad X_3 = -\partial_y + \delta y\partial_x$$

все эквивалентны друг другу и эквивалентны алгебре (II).

По инфинитезимальным операторам (II), (I2) можно восстановить локально эффективные действия λ и σ соответствующих групп преобразований:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a^1 + a^2 y - a^2 a^3/2\,,\\ y' &= y - a^3\,, \end{aligned}\right\} \qquad (II')$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a^1 + a^3 y + a^3(a^2 + \delta a^3)/2\\ y' &= y + a^2 + \delta a^3\,, \end{aligned}\right\} \qquad (I2')$$

и закон умножения $c = a\cdot b$ их общей параметрической группы G^3 :

$$\left.\begin{aligned} c^1 &= a^1 + b^1 + (a^2 b^3 - a^3 b^2)/2\,,\\ c^2 &= a^2 + b^2\,,\quad c^3 = a^3 + b^3\,, \end{aligned}\right\} \qquad (I6)$$

в который постоянная δ не входит. Заметим, что автоморфизм $a^1 \to a^1,\ a^2 \to a^3,\ -a^3 - \delta a^2 \to a^2$, сохраняя закон умножения (I6), переводит действие (II′) в действие (I2′) при тех же координатах. Таким образом, группы пресбразований (II′) и (I2′) слабо эквивалентны, но они не эквивалентны в смысле определения 4, так как действия (II′) и (I2′) не переходят друг в друга ни при какой замене координат (I4). Действительно, если бы группы (II′) и (I2′) были эквивалентны, то уравнение (I0) для функций v и w замены координат (I4) представилось бы следующей системой двух функциональных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} v(x+a^1+a^2y-a^2a^3/2,\ y-a^3) &= \\ = v(x,y)+a^1+a^3w(x,y)+a^3(a^2+\delta a^3)/2, & \\ w(x+a^1+a^2y-a^2a^3/2,\ y-a^3) &= \\ = w(x,y)+a^2+\delta a^3. & \end{aligned}\right\}$$

Если продифференцировать эти уравнения по каждому из параметров a^1, a^2, a^3, полагая затем $a^1=a^2=a^3=0$, то придем к системе (I5) шести дифференциальных уравнений, которая несовместна. Точно также слабо эквивалентны, но не эквивалентны группы преобразований с эффективными действиями (I2′) при различных значениях постоянной δ.

Рассмотрим кратко еще и второй случай (из двух возможных) слабо эквивалентных, но не эквивалентных трехмерных алгебр Ли преобразований плоскости с базисами (8.2) из §4 гл. I:

$$X_1=\partial_x,\ X_2=\partial_y,\ X_3=x\partial_x+\delta\partial_y, \qquad (I7)$$

где δ - произвольная постоянная, имеющих в них одинаковые коммутационные соотношения:

$$[X_1,X_2]=0,\ [X_3,X_1]=-X_1,\ [X_2,X_3]=0. \qquad (I8)$$

По базисным операторам (I7) можно найти порождающие отображения соответствующих групп преобразований:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\exp a^3+a^1, \\ y' &= y+a^2+\delta a^3 \end{aligned}\right\} \qquad (I7')$$

и закон умножения $c=a\cdot b$ их общей параметрической группы G_δ^3 :

$$\left.\begin{aligned} c^1 &= a^1 \exp b^3 + b^1, \\ c^2 &= a^2 + b^2, \quad c^3 = a^3 + b^3, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

в который постоянная δ не входит. Слабая эквивалентность алгебр Ли с базисами (17) и групп преобразований с эффективными действиями (17′) при разных значениях постоянной δ очевидна, их неэквивалентность при замене координат (14) устанавливается, как и в первом случае: соответствующая система уравнений, аналогичная системе(15), оказывается несовместной. Нетрудно проверить, что законы умножения (16) и (19) удовлетворяют аксиомам локальной группы Ли (см. /23/, с. 150):

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(\varphi(a,b),c) = \varphi(a,\varphi(b,c)), \\ &\varphi(a,0) = \varphi(0,a) = a. \end{aligned}\right\}$$

Отмеченное выше различие между слабой эквивалентностью и эквивалентностью имеет непосредственное отношение к вопросу о классификации групп преобразований. Естественно проводить ее с точностью до подобия, то есть с точностью до изоморфизма и слабой эквивалентности в каждом изоморфном классе. Но можно проводить эту классификацию и с точностью до изоморфизма и эквивалентности в каждом изоморфном классе. Поскольку слабо эквивалентные группы могут оказаться неэквивалентными, вторая классификация, в общем случае, отличается от первой, уточняет и дополняет ее. На вопрос о том, в каком случае возможно такое уточнение и дополнение обычной классификации, отвечает следующая теорема:

Т е о р е м а. Если группы преобразований $G^2(\lambda)$ и $G^2(\sigma)$ слабо эквивалентны, но не эквивалентны, то их параметрическая группа G^2 имеет внешние автоморфизмы.

Предположим обратное, то есть что параметрическая группа G^r имеет только внутренние автоморфизмы. Тогда, вследствие слабой эквивалентности групп $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, уравнение (8) относительно отображения $v(x)$ и внутреннего автоморфизма $U(a) = bab^{-1}$, где $b \in G^r$, имеет решение, то есть

$$v(\lambda(x,a)) = \sigma(v(x), bab^{-1}). \qquad (20)$$

Покажем, что отображение $w(x) = v(\lambda(x,b))$ является решением уравнения (10). Действительно, подставляя его в это уравнение, получаем соотношение $v(\lambda(\lambda(x,a),b)) = \sigma(v(\lambda(x,b)),a)$, очевидным образом переходящее в равенство (20) при подстановке $\lambda(x,b) \to x$, $b^{-1}ab \to a$. Таким образом, группы $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, в противоречие с условием теоремы, оказываются эквивалентными, что и доказывает неверность сделанного предположения об отсутствии у параметрической группы G^r внешних автоморфизмов.

Автоморфизм параметрической группы индуцирует такое линейное преобразование базиса (3), которое сохраняет коммутационные соотношения с точностью до совпадения структурных констант. Это преобразование будет автоморфизмом алгебры. Ясно, что уточнение в пределах эквивалентности возможно только для тех алгебр Ли с базисом (3), у которых есть внешние автоморфизмы (например, нильпотентных). Поскольку некоторые простые и полупростые алгебры допускают только внутренние автоморфизмы, для них классификации с точностью до слабой эквивалентности и с точностью до эквивалентности совпадают.

Результаты §4 гл.I показывают, что из всех трехмерных алгебр Ли преобразований плоскости в классификации С. Ли только две алгебры с базисами

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x;$$

$$X_1 = \partial_x\,,\quad X_2 = \partial_y\,,\quad X_3 = x\partial_x$$

допускают уточнение в пределах эквивалентности. Для других алгебр каждому автоморфизму (не обязательно внутреннему) может быть сопоставлена такая замена координат (I4), которая возвращает базисным операторам их прежние выражения.

Рассмотрим теперь несколько задач, в которых уточнение классификации С. Ли в пределах эквивалентности имеет принципиальное значение.

Для четырехмерной абстрактной алгебры с базисом X_1, X_2, X_3, X_4 и коммутационными соотношениями в нем:

$$\left.\begin{aligned} &[X_1, X_2] = 0,\ [X_3, X_1] = 0\,,\ [X_2, X_3] = X_1\,,\\ &[X_1, X_4] = X_1\,,\ [X_2, X_4] = X_2\,,\ [X_3, X_4] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

найдем все слабо неэквивалентные представления (реализации) алгебрами Ли преобразований плоскости. Поскольку первые три оператора образуют базис трехмерной подалгебры с коммутаторами (I3), для нее в пределах слабой эквивалентности естественно взять трехмерную алгебру с базисными операторами (I2) при $\delta = 0$. Выражение для оператора X_4 возьмем в самом общем виде:

$$X_4 = \lambda(x,y)\partial_x + \sigma(x,y)\partial_y\,. \qquad (22)$$

Подставляя операторы (I2) при $\delta = 0$ и (22) в последние три коммутатора соотношений (2I), для функций $\lambda(x,y)$ и $\sigma(x,y)$ получаем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_x = 1\,,\ \sigma_x = 0\,,\ \lambda_y = 0\,,\\ &\sigma_y = 1\,,\ y\lambda_x - \sigma = 0\,,\ y\sigma_x = 0. \end{aligned}\right\}$$

Система эта совместна и имеет решение

$$\lambda(x,y) = x + a, \quad \sigma(x,y) = y .$$

Постоянная a *может быть исключена из выражения для оператора* (22) допустимой заменой координат: $x + a \to x$, $y \to y$, оставляющей неизменными выражения для операторов X_1, X_2, X_3. В результате получаем только одну четырехмерную алгебру Ли преобразований плоскости с коммутационными соотношениями (2I):

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \partial_x , \; X_2 = \partial_y , \; X_3 = y\partial_x , \\ X_4 = x\partial_x + y\partial_y . \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Однако по классификации С. Ли /26/ имеется еще одна четырехмерная алгебра, слабо неэквивалентная алгебре (23), с теми же коммутаторами (2I):

$$X_1 = \partial_x , \; X_2 = y\partial_x , \; X_3 = -\partial_y , \; X_4 = x\partial_x \qquad (24)$$

(см. также выражения (8.3) из §4). Но алгебра (24) может быть получена аналогично алгебре (23) только в том случае, если в качестве трехмерной подалгебры взять не алгебру (I2) при $\delta = 0$, а слабо эквивалентную ей, но не эквивалентную алгебру (II). То есть у слабо неэквивалентных алгебр могут быть слабо эквивалентные, но не эквивалентные подалгебры.

Рассмотрим две группы $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ преобразований многообразия M и многообразия N с порождающими отображениями (9), имеющих одну и ту же параметрическую группу G^r, как группу преобразований многообразия $M \times N$. Обозначим эту группу через $G^r(\lambda, \sigma)$.

О п р е д е л е н и е 5. Группа $G^r(\lambda, \sigma)$ преобразований прямого произведения $M \times N$ многообразий M и N на-

зывается взаимным расширением групп $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$.

Пусть базисные операторы алгебр Ли групп $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ задаются соответственно выражениями (3) и (6). Ясно, что в этих базисах коммутационные соотношения будут одинаковыми. Тогда базисные операторы Z_ω алгебры Ли группы $G^r(\lambda,\sigma)$ будут, очевидно, задаваться следующими выражениями:

$$Z_\omega = \lambda^\mu_\omega(x)\partial/\partial x^\mu + \sigma^\nu_\omega(\xi)\partial/\partial\xi^\nu, \tag{25}$$

где $\omega = 1,\dots,r$; $\mu = 1,\dots,m$; $\nu = 1,\dots,n$.

О п р е д е л е н и е 5′. Алгебру Ли группы $G^r(\lambda,\sigma)$ с базисными операторами (25) будем называть взаимным расширением исходных алгебр Ли групп $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ с базисами (3) и (6).

Заметим, что это расширение может быть эквивалентным (кратным), а может быть и неэквивалентным. Если группы (9) и их алгебры эквивалентны, то и расширение называется эквивалентным; если же они неэквивалентны, то и расширение называется неэквивалентным. Эквивалентные (кратные) расширения используются в обычной геометрии одного множества для определения инвариантной метрики (см. /23/, с. 237 и §5 гл.I), в то время как неэквивалентные расширения задают, исключая простейший случай, группы движений в геометрии двух множеств, размерность которых может быть различной (см. §2).

Для слабо эквивалентных алгебр с базисами (II) и (I2) возможны как эквивалентные взаимные расширения:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 = \partial_x + \partial_\xi\,,\ Z_2 = y\partial_x + \eta\partial_\xi\,,\\ Z_3 = -\partial_y - \partial_\eta\,; \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_1 = \partial_x + \partial_\xi\,,\ Z_2 = \partial_y + \partial_\eta\,,\\ Z_3 = y\partial_x + \delta\partial_y + \eta\partial_\xi + \delta\partial_\eta\,, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

так и неэквивалентные:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \partial_x + \partial_\xi\,,\quad Z_2 = y\partial_x + \partial_\eta\,,\\ Z_3 &= -\partial_y + \eta\partial_\xi + \delta\partial_\eta\,; \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \partial_x + \partial_\xi\,,\quad Z_2 = \partial_y + \partial_\eta\,,\\ Z_3 &= y\partial_x + \delta_1\partial_y + \eta\partial_\xi + \delta_2\partial_\eta\,, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

причем $\delta_1 \neq \delta_2$. Заметим, что эквивалентные расширения (26) и (27) слабо эквивалентны, в то время как неэквивалентные расширения (28) и (29) слабо неэквивалентны между собой при замене координат (I4) и слабо неэквивалентны эквивалентному расширению (26). Если в пределах слабой эквивалентности из расширения (28) можно исключить постоянную δ , то никаким линейным преобразованием базиса и никакой заменой координат (I4) невозможно из расширения (29) исключить постоянные δ_1 и δ_2 .

Для алгебр с базисами (I7) возможно одно эквивалентное взаимное расширение:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \partial_x + \partial_\xi\,,\quad Z_2 = \partial_y + \partial_\eta\,,\\ Z_3 &= x\partial_x + \delta\partial_y + \xi\partial_\xi + \delta\partial_\eta \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

и одно неэквивалентное:

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \partial_x + \partial_\xi\,,\quad Z_2 = \partial_y + \partial_\eta\,,\\ Z_3 &= x\partial_x + \delta_1\partial_y + \xi\partial_\xi + \delta_2\partial_\eta\,, \end{aligned}\right\} \tag{3I}$$

где $\delta_1 \neq \delta_2$. Все эквивалентные расширения (30) для разных значений δ слабо эквивалентны между собой, но неэквивалентному расширению (3I) они слабо неэквивалентны. Постоянные δ_1 и δ_2 в

пределах слабой эквивалентности из расширения (3I) исключить невозможно.

Таким образом, различие между эквивалентностью и слабой эквивалентностью групп преобразований и их алгебр Ли оказывается существенным при построении их взаимных расширений.

О п р е д е л е н и е 6. Гладкую функцию $f(x,\xi)$ будем называть двухточечным инвариантом групп $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$ с эффективными действиями (9), если она является инвариантом [illegible] ного расширения $G^r(\lambda,\sigma)$, то есть если

$$f(\lambda(x,a),\sigma(\xi,a)) = f(x,\xi)$$

для всех x, ξ из некоторых областей в M, N и всех a из некоторой окрестности единичного элемента $e \in G^r$.

Согласно инфинитезимальному критерию инвариантности (см. /23/, с. 229, /24/, с. 77) функция $f(x,\xi)$ будет инвариантом группы $G^r(\lambda,\sigma)$ в том и только в том случае, если в некоторых локальных системах координат и параметров она удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$Z_\omega f(x,\xi) = 0 \qquad (33)$$

с операторами (25):

$$\lambda^\mu_\omega(x)\frac{\partial f(x,\xi)}{\partial x^\mu} + \sigma^\nu_\omega(\xi)\frac{\partial f(x,\xi)}{\partial \xi^\nu} = 0. \qquad (33')$$

Двухточечный инвариант $f(x,\xi)$ имеет содержательный геометрический смысл не только при эквивалентном (кратном) взаимном расширении, когда он задает метрику пространства, но и при неэквивалентном расширении. В этом случае двухточечный инвариат $f(x,\xi)$ можно рассматривать как метрику геометрии двух множеств. Такая геометрия появляется в теории физических структур /I0/, в которой расстояние $f(x,\xi)$ интерпретируется как измеряемая в опыте физическая величина.

По результатам §5 гл.I видим, что двухточечные инварианты эквивалентных расширений (26) и (27) локально вырожденны:

$$f = y - \eta ,$$

в то время как для неэквивалентных расширений (28) и (29) эти инварианты локально невырожденны:

$$f = x - \xi - y\eta - \delta y^2/2 ,$$

$$f = (\delta_1 - \delta_2)(x - \xi) - (y - \eta)^2/2$$

(см. выражения (8), (I0), (9) из §5 гл.I). Аналогично, для эквивалентного расширения (30) двухточечный инвариант локально вырожден:

$$f = y - \eta ,$$

а для неэквивалентного расширения (3I) он локально невырожден:

$$f = y - \eta - (\delta_1 - \delta_2) \ln |x - \xi|$$

(см. выражение (2I) из §5 гл.I при $\delta_i = \delta_j$ и $\delta_i \neq \delta_j$).

Вычисление двухточечных инвариантов наглядно показывает существенность различия между эквивалентностью и слабой эквивалентностью групп преобразований. Действительно, структура этих инвариантов оказывается различной при эквивалентном и неэквивалентном взаимных расширениях, хотя при неэквивалентном расширении группы, в нем участвующие, могут оказаться слабо эквивалентными. Отсюда вытекает, что для полного решения задач, перечисленных выше, классификация С. Ли групп преобразований должна быть уточнена в пределах эквивалентности в каждом изоморфном классе.

Этот вывод можно подтвердить еще более наглядным примером. Рассмотрим две слабо эквивалентные, но не эквивалентные четырехмерные алгебры Ли преобразований плоскости:

$$X_1=\partial_x\,,\ X_2=y\partial_x\,,\ X_3=-\partial_y\,,\ X_4=-y\partial_y\,, \tag{34}$$

$$X_1=\partial_x\,,\ X_2=\partial_y\,,\ X_3=y\partial_x\,,\ X_4=y\partial_y \tag{35}$$

(см. алгебры (8.I) и (8.2) при $\delta=0$ из §4) и запишем для них два взаимных расширения. Одно эквивалентное:

$$\left.\begin{aligned} Z_1&=\partial_x+\partial_\xi\,,\ Z_2=y\partial_x+\eta\partial_\xi\,,\\ Z_3&=-\partial_y-\partial_\eta\,,\ Z_4=-y\partial_y-\eta\partial_\eta \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

и другое неэквивалентное:

$$\left.\begin{aligned} Z_1&=\partial_x+\partial_\xi\,,\ Z_2=y\partial_x+\partial_\eta\,,\\ Z_3&=-\partial_y+\eta\partial_\xi\,,\ Z_4=-y\partial_y+\eta\partial_\eta\,. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Решая системы (33), легко устанавливаем, что двухточечный инвариант эквивалентного раширения (36) тривиален:

$$f\equiv const\,, \tag{38}$$

в то время как для неэквивалентного расширения (37) он локально невырожден:

$$f=x-\xi-y\eta\,. \tag{39}$$

Ясно, что не только замена координат (I4), но и никакая другая замена, "запутывающая" все четыре координаты x,y,ξ,η, не переведет инварианты (38) и (39) друг в друга. А это означает, что эквивалентное и неэквивалентное расширения (36) и (37) слабо эквивалентных, но не эквивалентных алгебр (34), (35), слабо неэквивалентны как алгебры Ли преобразований четырехмерного пространства R^4.

§ 4. Четырехмерные алгебры Ли преобразований плоскости

В дополнение к §4 гл.I проведем полную классификацию четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости с точностью до эквивалентности в каждом изоморфном классе. Сравнение нижеследующих результатов с соответствующей классификацией С. Ли /26/ еще более явно, чем в трехмерном случае, подтвердит существенность различия слабой эквивалентности и эквивалентности групп преобразований. Действительно, только две трехмерные алгебры в классификации С. Ли допускают уточнение в пределах эквивалентности, в то время как четырехмерных алгебр, допускающих такое уточнение, будет значительно больше. Кроме того, полная классификация четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости оказывается необходимой для анализа групповых свойств физической структуры ранга (3,3), то есть (2,2)-мерной геометрии двух множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, каждое из которых представляет собой двумерное многообразие (см. следующий параграф). Число степеней свободы в этой геометрии, согласно теореме 2 из §I, равно четырем.

Локальная четырехпараметрическая группа Ли локальных преобразований двумерного многообразия $\mathcal{M}$ задается уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3, a^4), \\ y' &= \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3, a^4), \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

причем $\lambda_x \sigma_y - \lambda_y \sigma_x \neq 0$. При специальном выборе параметров a, когда, в частности, их нулевым значениям и только им соответствует тождественное преобразование, бесконечно малое преобразование (I), близкое к тождественному, можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a^{\omega}\lambda_{\omega}(x,y), \\ y' &= y + a^{\omega}\sigma_{\omega}(x,y), \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где $\omega = 1, 2, 3, 4.$

Инфинитезимальные операторы

$$X_{\omega} = \lambda_{\omega}(x,y)\,\partial_x + \sigma_{\omega}(x,y)\,\partial_y \qquad (3)$$

линейно независимы с постоянными коэффициентами и образуют базис четырехмерной алгебры Ли. Напомним, что, согласно замечанию после леммы 4 в §3, мы называем алгебры Ли с базисными операторами (3) и (6) эквивалентными, если эквивалентны группы преобразований $G^r(\lambda)$ и $G^r(\sigma)$, которым эти алгебры соответствуют.

Существует полная классификация вещественных абстрактных четырехмерных алгебр Ли с точностью до изоморфизма (см., например, /27/, с. 72-74). Приведем эту классификацию, записывая шесть коммутаторов $[X_1, X_2]$, $[X_3, X_1]$, $[X_2, X_3]$, $[X_1, X_4]$, $[X_2, X_4]$, $[X_3, X_4]$ в соответствующей последовательности:

$$0,\ 0,\ 0,\ \varepsilon X_1,\ kX_2,\ \ell X_3; \qquad (4)$$

$$0,\ 0,\ 0,\ kX_1+X_2,\ -X_1+kX_2,\ \ell X_3; \qquad (5)$$

$$0,\ 0,\ 0,\ kX_1+X_2,\ kX_2,\ \varepsilon X_3; \qquad (6)$$

$$0,\ 0,\ 0,\ kX_1+X_2,\ kX_2+X_3,\ \varepsilon X_3; \qquad (7)$$

$$0,\ 0,\ X_1,\ cX_1,\ X_2,\ (c-1)X_3; \qquad (8)$$

$$0,\ 0,\ X_1,\ 2X_1,\ X_2,\ X_2+X_3; \qquad (9)$$

$$0,\ 0,\ X_1,\ qX_1,\ X_3,\ -X_2+qX_3; \qquad (10)$$

$$0, \quad -X_1, \quad 0, \quad 0, \quad X_2, \quad 0; \qquad (II)$$

$$0, \quad -X_1, \quad X_2, \quad X_2, \quad -X_1, \quad 0; \qquad (I2)$$

$$X_3, \quad X_2, \quad X_1, \quad 0, \quad 0, \quad 0; \qquad (I3)$$

$$X_3, \quad X_2, \quad -X_1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \qquad (I4)$$

где $\varepsilon = 0, I$; $q^2 < 4$; k, l, c - произвольные числа.

Заметим, что по сравнению с /27/здесь для удобства исследования в алгебрах (II) и (I4) осуществлен переход к другим базисам (в алгебре (II) была произведена только перестановка операторов X_1 и X_2, а в алгебре (I4) переход к новому базису был следующим: $(X_1 + X_3)/2 \to X_1$, $X_2 \to X_2$, $(X_1 - X_3)/2 \to X_3$, $X_4 \to X_4$). Кроме того, оказывается, алгебра с коммутаторами (7) для случая $\varepsilon = 0$, $k \neq 0$ и $\varepsilon = I$, $k \neq I$ изоморфны алгебре (6) с $\varepsilon = 0$, $k \neq 0$ и $\varepsilon = I$, $k \neq I$ соответственно. Изоморфизм устанавливается следующим линейным преобразованием базиса алгебры (6): $X_1 + X_3/k^2 \to X_1$, $X_2 - X_3/k \to X_2$, $X_3 \to X_3$, $X_4 \to X_4$ - для случая $\varepsilon = 0$, $k \neq 0$ и $X_1 + X_3/(k-1)^2 \to X_1$, $X_2 - X_3/(k-1) \to X_2$, $X_3 \to X_3$, $X_4 \to X_4$ - для случая $\varepsilon = I$, $k \neq I$.

Согласно приведенной таблице, в четырехмерных алгебрах (4) - (I4) первые три оператора X_1, X_2, X_3 образуют базис трехмерной подалгебры. Выпишем из классификационной теоремы §4 гл.I соответствующие выражения операторов X_1, X_2, X_3 :

для алгебр (4), (5), (6), (7):

$$\partial_x, \quad y\partial_x, \quad \lambda(y)\partial_x; \qquad (I5)$$

для алгебр (8), (9), (I0):

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ -\partial_y, \tag{I6}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ y\partial_x+\delta\partial_y; \tag{I7}$$

для алгебры (II):

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ x\partial_x+y\partial_y, \tag{I8}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x+\delta\partial_y; \tag{I9}$$

для алгебры (I2):

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ x\partial_x, \tag{20}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x+y\partial_y; \tag{2I}$$

для алгебры (I3):

$$\left.\begin{aligned}\partial_x,\ tgy\sin x\,\partial_x+\cos x\,\partial_y,\\ tgy\cos x\,\partial_x-\sin x\,\partial_y;\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

для алгебры (I4):

$$\partial_x,\ \sin x\,\partial_x,\ \cos x\,\partial_x,$$

$$\partial_x,\ \sin x\,\partial_x+\cos x\,\partial_y,\ \cos x\,\partial_x-\sin x\,\partial_y,$$

$$\left.\begin{aligned}\partial_x,\ -thy\sin x\,\partial_x+\cos x\,\partial_y,\\ -thy\cos x\,\partial_x-\sin x\,\partial_y,\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned}\partial_x,\ -cthy\sin x\,\partial_x+\cos x\,\partial_y,\\ -cthy\cos x\,\partial_x-\sin x\,\partial_y,\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где $\lambda_y \neq const$, δ - любое число.

Для того, чтобы провести полную классификацию четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости с точностью до эквивалентности в каждом изоморфном классе, необходимо найти выражение для оператора

$$X_4 = \lambda(x,y)\partial_x + \sigma(x,y)\partial_y , \qquad (27)$$

удовлетворяющего вместе с операторами (I5) - (26) трем последним коммутационным соотношениям каждой из четырехмерных алгебр (4) - (I4). При этом могут возникнуть дополнительные ограничения на выражения (I5) - (26). В частности, не всякие три оператора из списка (I5) - (26) образуют базис трехмерной подалгебры четырехмерной алгебры с оператором (27). Кроме того, в отличие от трехмерного случая, рассмотренного в §4 гл.I, некоторые из четырехмерных алгебр (4) - (I4) не могут быть реализованы инфинитезимальными операторами преобразований плоскости. Это: алгебра (4) при $\ell \neq k = \varepsilon = 0$, $k \neq \ell = \varepsilon = 0$, $k = \ell \neq \varepsilon = 0$, $\ell \neq k = \varepsilon = 1$, $k \neq \ell = \varepsilon = 1$, $k = \ell \neq \varepsilon = 1$; алгебра (6) при $\varepsilon = k = 0$ и $\varepsilon = k = 1$; алгебры (I0) и (I3).

Т е о р е м а. Базисные операторы X_1, X_2, X_3, X_4 четырехмерной алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований плоскости, имеющей структуру коммутационных соотношений (4) - (I4), с точностью до эквивалентности (замены координат) задаются следующими выражениями:

$$\partial_x , \; y\partial_x , \; \lambda(y)\partial_x , \; \varphi(y)\partial_x ; \qquad (4.1)$$

$$\partial_x , \; y\partial_x , \; h y^{e/k}\partial_x , \; -k y\partial_y ; \qquad (4.2)$$

$$\partial_x , \; y\partial_x , \; \lambda(y)\partial_x , \; x\partial_x \qquad (4.3)$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ hy^{(1-e)/(1-k)}\partial_x,\ x\partial_x+(1-k)y\partial_y; \tag{4.4}$$

$$\left.\begin{array}{c}\partial_x,\ y\partial_x,\ h\sqrt{1+y^2}\,e^{(k-e)\operatorname{arctg} y}\partial_x,\\ (k+y)x\partial_x+(1+y^2)\partial_y;\end{array}\right\} \tag{5.I}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ hye^{-k/y}\partial_x,\ (k+y)x\partial_x+y^2\partial_y; \tag{6.I}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ hye^{(1-k)/y}\partial_x,\ (k+y)x\partial_x+y^2\partial_y; \tag{6.2}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ y^2/2\partial_x,\ xy\partial_x+y^2/2\partial_y, \tag{7.I}$$

$$\left.\begin{array}{c}\partial_x,\ y\partial_x,\ (1\pm\sqrt{1-hy^2})/h\,\partial_x,\\ xy\partial_x-(1-hy^2\pm\sqrt{1-hy^2})/h\,\partial_y;\end{array}\right\} \tag{7.2}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ y^2/2\partial_x,\ (1+y)x\partial_x+y^2/2\partial_y, \tag{7.3}$$

$$\left.\begin{array}{c}\partial_x,\ y\partial_x,\ (1\pm\sqrt{1-hy^2})/h\,\partial_x,\\ (1+y)x\partial_x-(1-hy^2\pm\sqrt{1-hy^2})/h\,\partial_y;\end{array}\right\} \tag{7.4}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ -\partial_y,\ \delta\partial_x-y\partial_y, \tag{8.I}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ y\partial_x,\ \delta\partial_x+y\partial_y; \tag{8.2}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ -\partial_y,\ x\partial_x, \tag{8.3}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ y\partial_x,\ x\partial_x+y\partial_y; \tag{8.4}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ -\partial_y,\ 2x\partial_x+y\partial_y, \tag{8.5}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ y\partial_x+\delta\partial_y,\ 2x\partial_x+y\partial_y; \tag{8.6}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ -\partial_y,\ cx\partial_x + (c-1)y\partial_y, \tag{8.7}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ y\partial_x,\ cx\partial_x + y\partial_y; \tag{8.8}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ -\partial_y,\ (2x - y^2/2)\partial_x + y\partial_y; \tag{9.I}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ x\partial_x + y\partial_y,\ -y\partial_y, \tag{II.I}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x,\ y\partial_y; \tag{II.2}$$

$$\partial_x,\ y\partial_x,\ x\partial_x,\ xy\partial_x + (1+y^2)\partial_y, \tag{I2.I}$$

$$\partial_x,\ \partial_y,\ x\partial_x + y\partial_y,\ -y\partial_x + x\partial_y; \tag{I2.2}$$

$$\partial_x,\ \sin x\partial_x,\ \cos x\partial_x,\ \partial_y, \tag{I4.I}$$

$$\left.\begin{array}{l} \partial_x,\ \sin x\partial_x + \cos x\partial_y, \\ \cos x\partial_x - \sin x\partial_y,\ h\partial_y, \end{array}\right\} \tag{I4.2}$$

где $h \neq 0$; $c \neq 0, I, 2$; δ - произвольная постоянная.

Среди двадцати шести алгебр из списка теоремы следующие пары алгебр слабо эквивалентны, но не эквивалентны: (7.I-2), (7.3-4), (8.I-2), (8.5-6), (8.7-8); (4.2), (4.4), (5.I), (6.I), (6.2), (7. .2), (7.4), (I4.2) - с разными значениями постоянной $h \neq 0$; (8.I), (8.2), (8.6) - с разными значениями постоянной δ . Пары алгебр (8.3-4), (II.I-2), (I2.I-2), (I4.I-2) изоморфны, но подобия (слабой эквивалентности) между ними нет. Таким образом, уточнение в пределах эквивалентности допускают следующие одиннадцать четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости: (4.2), (4.4), (5.I), (6.I), (6.2), (7.I), (7.3), (8.2), (8.6), (8.8), (I4.2).

Общая схема доказательства сформулированной выше теоремы дос-

таточно проста. Подставляя выражения (I5) - (26) для операторов X_1, X_2, X_3 и выражение (27) для оператора X_4 в коммутаторы $[X_1, X_4]$, $[X_2, X_4]$, $[X_3, X_4]$ четырехмерных алгебр (4) - (I4), получаем систему из шести дифференциальных уравнений для функций $\lambda(x,y)$ и $\sigma(x,y)$. Условие совместности этих уравнений и линейная независимость операторов (3) приводят к дополнительным ограничениям на выражения (I5) - (26), структурные постоянные коммутационных соотношений (4) - (I4) и для некоторых из них вообще не могут выполняться.

Учитывая сделанное замечание, рассмотрим пять характерных случаев из полного доказательства теоремы.

Подставим, например, выражения (I5), (27) в коммутаторы $[X_1, X_4]$, $[X_2, X_4]$, $[X_3, X_4]$ алгебры (4) и в каждом из них сравним справа и слева коэффициенты при линейно несвязных операторах дифференцирования ∂_x и ∂_y. В результате получаем 6 дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_x = \varepsilon\,,\ \sigma_x = 0\,,\ y\lambda_x - \sigma = ky\,, \\ y\sigma_x = 0\,,\ \lambda(y)\lambda_x - \lambda'(y)\sigma = \ell\lambda(y)\,,\ \lambda(y)\sigma_x = 0. \end{array}\right\} \quad (28)$$

Из первого уравнения системы (28) находим: $\lambda(x,y) = \varepsilon x + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ - произвольная функция одной переменной. Из третьего и первого уравнений определяем: $\sigma(x,y) = (\varepsilon - k)y$, то есть $\sigma_x = 0$ и второе, четвертое, шестое уравнения удовлетворяются автоматически. Наконец, подставляя в пятое уравнение системы (28) найденные для $\lambda(x,y)$ и $\sigma(x,y)$ выражения, получаем уравнение

$$(\varepsilon - k)y\lambda'(y) = (\varepsilon - \ell)\lambda(y)\,, \quad (29)$$

которому дополнительно должна удовлетворять нелинейная функция $\lambda(y)$ в подалгебре (I5). Заметим, что функция $\varphi(y)$ в выраже-

нии для оператора

$$X_4 = (\varepsilon x + \varphi(y))\partial_x + (\varepsilon - k)y\partial_y$$

действительно произвольна только при $\varepsilon = k = \ell = 0$. Во всех остальных случаях эта функция может быть исключена заменой координат $x + \psi(y) \to x$, $y \to y$, где $\varepsilon\psi(y) - (\varepsilon - k)y\psi'(y) = \varphi(y)$. То есть при $\varepsilon^2 + k^2 + \ell^2 \neq 0$ в выражении для оператора X_4 можно положить $\varphi(y) = 0$. Кроме того, из уравнения (29) заключаем, что при $\varepsilon = k$ должно быть $\varepsilon = \ell$ и обратно, а при $\varepsilon \neq k$ должно быть $\varepsilon \neq \ell$ и обратно. Если $k = \ell \neq \varepsilon$, то уравнение (29) имеет только линейное решение, что не допускается условием нелинейности функции $\lambda(y)$. Таким образом, из всевозможных значений постоянных ε, k, ℓ алгебры (4) в случае ее представления (реализации) инфинитезимальными операторами преобразований плоскости допускаются только следующие четыре варианта: $\varepsilon = k = \ell = 0$; $\varepsilon = 0, k \neq 0, \ell \neq 0, k \neq \ell$; $\varepsilon = k = \ell = 1$; $\varepsilon = 1, k \neq 1, \ell \neq 1, k \neq \ell$. Остальные шесть вариантов: $\ell \neq k = \varepsilon = 0$, $k \neq \ell = \varepsilon = 0$, $k = \ell \neq \varepsilon = 0$, $\ell \neq k = \varepsilon = 1$, $k \neq \ell = \varepsilon = 1$, $k = \ell \neq \varepsilon = 1$ не допускаются. Для случая $\varepsilon = k = \ell = 0$ уравнение (29) обращается в тождество. В результате получаем четырехмерную алгебру Ли с базисом (4.I), в которой функции $\lambda(y)$ и $\varphi(y)$, очевидно, нелинейны и линейно независимы с постоянными коэффициетами. Для случая $\varepsilon = 0$, $k \neq 0$, $\ell \neq 0$, $k \neq \ell$ уравнение (29) имеет решение $\lambda(y) = h y^{\ell/k}$, причем $h \neq 0$, а оператор $X_4 = -ky\partial_y$, поскольку функцию $\varphi(y)$ в выражении (30) можно исключить удобной заменой координат, о которой говорилось выше. В результате получаем четырехмерную алгебру Ли с базисом (4.2). Совершенно аналогично для третьего и четвертого случаев ($\varepsilon = k = \ell = 1$ и $\varepsilon = 1$, $k \neq 1$, $\ell \neq 1$, $k \neq \ell$) получаем четырехмерные алгебры Ли с

базисами (4.3) и (4.4).

Подставим теперь выражения (I7), (27) в последние три коммутатора алгебры (8):

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_x = c\,,\ \sigma_x = 0\,,\ \lambda_y = 0\,,\ \sigma_y = 1\,,\\ &y\lambda_x + \delta\lambda_y - \sigma = (c-1)y\,,\\ &y\sigma_x + \delta\sigma_y = (c-1)\delta\,. \end{aligned}\right\} \qquad (3I)$$

Из первого и третьего уравнений системы (3I) находим $\lambda(x,y) = cx + d$, где d - произвольная постоянная. Из пятого уравнения по известной функции $\lambda(x,y)$ определяем: $\sigma(x,y) = y$. В результате по выражению (27) получаем оператор

$$X_4 = (cx + d)\partial_x + y\partial_y\,. \qquad (32)$$

Однако постоянная δ в операторе X_3 трехмерной подалгебры (I7) должна удовлетворять дополнительному условию: $(c-2)\delta = 0$, вытекающему из шестого уравнения системы (3I) при $\sigma = y$. То есть в случае $c = 2$ постоянная δ может принимать любые значения. Если же $c \neq 2$, то необходимо $\delta = 0$. Заметим также, что постоянная d в выражении (32) для оператора X_4 действительно произвольна только при $c = 0$. В случае $c \neq 0$ эта постоянная может быть исключена заменой координат $x + d/c \to x$, $y \to y$, то есть при $c \neq 0$ можно положить $d = 0$. Таким образом, в задаче определения представления алгебры (8) инфинитезимальными операторами преобразований плоскости удобно различать следующие четыре случая: $c = 0$, $c = 1$, $c = 2$ и $c \neq 0, 1, 2$, которые приведут соответственно к четырем алгебрам Ли с базисами (8.2), (8.4), (8.6) и (8.8).

Четырехмерные алгебры Ли с базисами (8.I), (8.3), (8.5) и (8.7) получаются для тех же четырех случаев $c = 0$, $c = 1$,

$c = 2$ и $c \neq 0, 1, 2$, когда в алгебре (8) трехмерной подалгеброй будет алгебра Ли с базисом (I6).

Подставим, далее, операторы (I6) и (27) в последние три коммутатора соотношений (9). Операторы дифференцирования $\partial_x = \partial/\partial x$ и $\partial_y = \partial/\partial y$ линейно независимы в общем смысле. Сравнивая коэффициенты при них справа и слева в каждом из трех коммутаторов, получаем следующую систему шести дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_x = 2, \ \sigma_x = 0, \ y\lambda_x - \sigma = y, \\ &y\sigma_x = 0, \ \lambda_y = -y, \ \sigma_y = 1. \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Из первого и третьего уравнений находим функцию σ , а из первого и пятого - функцию λ :

$$\lambda = 2x - y^2/2 + a, \ \sigma = y, \qquad (34)$$

где a - произвольная постоянная, которая из выражения (27) для оператора X_4 может быть исключена заменой координат $x + a/2 \to x$, $y \to y$. Система (33) совместна, так как решение (34) удовлетворяет каждому ее уравнению. Для оператора X_4 по формуле (27) получаем тогда с помощью решений (34) следующее выражение: $X_4 = (2x - y^2/2)\partial_x + y\partial_y$, что вместе с операторами (I6) и приводит к четырехмерной алгебре Ли с базисом (9.I).

Если же в коммутаторы $[X_1, X_4]$, $[X_2, X_4]$, $[X_3, X_4]$ алгебры (9) подставить операторы (I7) и (27), то относительно функций $\lambda(x,y)$ и $\sigma(x,y)$ получаем другую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_x = 2, \ \sigma_x = 0, \ \lambda_y = 0, \ \sigma_y = 1, \\ &y\lambda_x + \delta\lambda_y - \sigma = y, \ y\sigma_x + \delta\sigma_y = 1 + \delta, \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

которая явно несовместна. Действительно, подставляя в шестое урав-

нение этой системы $\sigma_x = 0$ и $\sigma_y = 1$ из второго и четвертого, приходим к противоречию: $0 = 1$. То есть трехмерная алгебра (17) не может быть подалгеброй четырехмерной алгебры с коммутационными соотношениями (9). Таким образом, представление (9.1) является единственным представлением (реализацией) четырехмерной абстрактной алгебры (9) инфинитезимальными операторами преобразований плоскости.

Подставим еще операторы (22), (27) в последние три коммутатора алгебры (13), полагая для сокращения записи $\nu(y) = tgy$:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_x = 0\,,\ \sigma_x = 0\,,\\ &\lambda_x \nu \sin x + \lambda_y \cos x - \lambda \nu \cos x - \sigma \nu_y \sin x = 0\,,\\ &\sigma_x \nu \sin x + \sigma_y \cos x + \lambda \sin x = 0\,,\\ &\lambda_x \nu \cos x - \lambda_y \sin x + \lambda \nu \sin x - \sigma \nu_y \cos x = 0\\ &\sigma_x \nu \cos x - \sigma_y \sin x + \lambda \cos x = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Четвертое и шестое уравнения при $\sigma_x = 0$ образуют подсистему системы (36), которая имеет, очевидно, только нулевое решение: $\lambda = 0$, $\sigma_y = 0$. Но если $\lambda = 0$, то из третьего уравнения получаем $\sigma = 0$. Однако при $\lambda = 0$ и $\sigma = 0$ оператор X_4 по выражению (27) становтся нулевым, что противоречит линейной независимости операторов (3). Установленное противоречие означает, что трехмерная алгебра (22) не может быть подалгеброй четырехмерной алгебры (13), которая, таким образом, не имеет ни одного представления инфинитезимальными операторами преобразований плоскости. При подстановке операторов (25), (27) и (26),(27) в последние три коммутатора алгебры (14) получается та же система (36), в которой $\nu(y) = -thy$ для первого случая и $\nu(y) = -cthy$ - для второго. То есть ни одна из трехмерных алгебр (25), (26) не может

быть подалгеброй четырехмерной алгебры (I4).

Все остальные случаи (из девятнадцати возможных) исследуются сходным образом и при этом никаких принципиальных трудностей не возникает. Поэтому автор считает разумным в доказательстве теоремы ограничиться пятью рассмотренными примерами решения систем (28), (3I), (33), (35), (36).

Если в алгебрах (7.I) и (7.3) произвести линейное преобразование базиса:

$$X_1 + hX_3/2 \to X_1,\ X_2 \to X_2,\ X_3 \to X_3,\ X_4 \to X_4$$

и следующую замену координат:

$$x/(1 + hy^2/4) \to x,\quad y/(1 + hy^2/4) \to y,$$

то получим базисные операторы (7.2) и (7.4) соответственно. То есть четырехмерные алгебры Ли с базисами (7.I) и (7.2), а также (7.3) и (7.4) слабо эквивалентны в смысле леммы 3 из §3. Слабая эквивалентность алгебр Ли с базисами (8.I) и (8.2), (8.5) и (8.6), (8.7) и (8.8), а также алгебр Ли с базисами (4.2), (4.4), (5.I), (6.I), (6.2), (7.2), (7.4), (I4.2) - с разными значениями постоянной $h \neq 0$, (8.I), (8.2), (8.6) - с разными значениями постоянной δ, очевидна.

Учитывая только что сказанное, заключаем, что полная с точностью до подобия классификация четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости будет содержать следующие двадцать одну алгебру из классификационной таблицы теоремы настоящего параграфа: (4.I), (4.2) с $h = 1$, (4.3), (4.4) с $h = 1$, (5.I) с $h = 1$, (6.I) с $h = 1$, (6.2) с $h = 1$, (7.I), (7.3), (8.2) с $\delta = 0$, (8.3), (8.4), (8.6) с $\delta = 0$, (8.8), (9.I), (II.I), (II.2), (I2.I), (I2.2), (I4.I), (I4.2) с $h = 1$.

Напомним, что С. Ли проводил свою классификацию групп преоб-

разований с точностью до подобия, поэтому сопоставление результатов данного параграфа и соответствующих результатов С. Ли необходимо делать в пределах подобия.

Выпишем сначала из полного списка конечномерных алгебр Ли преобразований плоскости, составленного С. Ли в 1893г., базисные операторы Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 всех четырехмерных алгебр:

33. $\partial_x, \partial_y, x\partial_y - y\partial_x, x\partial_x + y\partial_y;$

7. $y\partial_y, \partial_x, x\partial_x, x^2\partial_x + xy\partial_y;$

9. $\partial_y, x\partial_y, \partial_x, x\partial_x + cy\partial_y, c \neq 1;$

10. $\partial_y, x\partial_y, \partial_x, x\partial_x + (2y + x^2)\partial_y;$

$11_1'$. $e^{\alpha x}\cos\beta x\partial_y, y\partial_y, e^{\alpha x}\sin\beta x\partial_y, \partial_x;$

$11_2'$. $e^{\alpha x}\partial_y, xe^{\alpha x}\partial_y, y\partial_y, \partial_x;$

$11_3'$. $e^{\alpha_1 x}\partial_y, y\partial_y, e^{\alpha_2 x}\partial_y, \partial_x;$

12. $\partial_y, x\partial_y, F(x)\partial_y, y\partial_y;$

15. $\partial_y, x\partial_y, \partial_x, x\partial_x + y\partial_y;$

$17_1'$. $\partial_y, x\partial_y, x^2\partial_y, \partial_x;$

$17_2'$. $e^{\alpha x}\partial_y, xe^{\alpha x}\partial_y, x^2e^{\alpha x}\partial_y, \partial_x, \alpha \neq 0;$

$17_3'$. $\left\{\begin{array}{c} e^{\alpha_1 x}\partial_y, \partial_x, e^{\alpha_2 x}\cos\beta x\partial_y, \\ e^{\alpha_2 x}\sin\beta x\partial_y; \end{array}\right.$

$17_4'$. $e^{\alpha_1 x}\partial_y, xe^{\alpha_1 x}\partial_y, \partial_x, \partial_y;$

$I7_5'$. $exp\alpha_1 x\partial_y$, $x exp\alpha_1 x\partial_y$, ∂_x, $exp\alpha_2 x\partial_y$, $\alpha_2 \neq 0$;

$I7_6'$. ∂_y, $exp\alpha_2 x\partial_y$, $exp\alpha_3 x\partial_y$, ∂_x;

$I7_7'$. $exp\alpha_1 x\partial_y$, $exp\alpha_2 x\partial_y$, $exp\alpha_3 x\partial_y$, ∂_x, $\alpha_1 \neq 0$;

I8. ∂_y, $x\partial_y$, $F_1(x)\partial_y$, $F_2(x)\partial_y$;

22. ∂_y, $y\partial_y$, $y^2\partial_y$, ∂_x;

24. ∂_y, $y\partial_y$, ∂_x, $x\partial_x$,

где слева указан номер по классификации С. Ли (см. /26/, с. 25-27).

Результаты настоящего параграфа, изложенные в теореме, сопоставим в пределах подобия с приведенной выше классификацией С. Ли, аналогично тому, как это было сделано в §4 гл.I в случае трехмерных алгебр. Для каждой четырехмерной алгебры Ли из этой классификации укажем такое линейное преобразование ее базиса Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 и такую замену координат в нем: $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, при которых получатся базисные операторы X_1, X_2, X_3, X_4 из списка теоремы.

Четырехмерные алгебры Ли преобразований плоскости из классификации С. Ли подобны следующим алгебрам из классификационной теоремы настоящего параграфа:

алгебра 33. - алгебре (I2.2):

$$\left.\begin{array}{c} X_1 = Y_1,\ X_2 = Y_2,\ X_3 = Y_4,\ X_4 = Y_3, \\ \xi = x,\ \eta = y; \end{array}\right\}$$

алгебра 7. - алгебре (I4.2) с $k = 1$:

$$X_1 = (y_2 + y_4)/2\,,\ X_2 = (2y_3 + y_1)/2\,,$$
$$X_3 = (y_2 - y_4)/2\,,\ X_4 = y_1/2\,,$$
$$\xi = arc\,tg\,2x/(1-x^2)\,,\ \eta = \ln y^2/(1+x^2);$$

алгебра 9. - алгебре (8.2) с $\delta = 0$ при $c = 0$, алгебре (8.6) с $\delta = 0$ при $c = 2$ и алгебре (8.8) при $c \neq 0, 1, 2$:

$$X_1 = y_1\,,\ X_2 = y_3\,,\ X_3 = y_2\,,\ X_4 = y_4\,,$$
$$\xi = y\,,\ \eta = x;$$

алгебра I0. - алгебре (9.I):

$$X_1 = -8y_1\,,\ X_2 = -4y_2\,,\ X_3 = -2y_3\,,\ X_4 = y_4\,,$$
$$\xi = -y/8\,,\ \eta = x/2;$$

алгебра II_1'. - алгебре (I2.I):

$$X_1 = y_3\,,\ X_2 = y_1\,,\ X_3 = y_2\,,\ X_4 = -(y_4 + \alpha y_2)/\beta\,,$$
$$\xi = y\,exp(-\alpha x)/\sin\beta x\,,\ \eta = ctg\,\beta x;$$

алгебра II_2'. - алгебре (8.3):

$$X_1 = y_1\,,\ X_2 = y_2\,,\ X_3 = -\alpha y_3 - y_4\,,\ X_4 = y_3\,,$$
$$\xi = y\,exp(-\alpha x)\,,\ \eta = x;$$

алгебра II_3'. - алгебре (II.I):

$$X_1 = Y_1\,,\ X_2 = Y_3\,,\ X_3 = (\alpha_2 Y_2 + Y_4)/(\alpha_2 - \alpha_1)\,,$$
$$X_4 = -(\alpha_1 Y_2 + Y_4)/(\alpha_2 - \alpha_1)\,,$$
$$\xi = y\exp(-\alpha_1 x)\,,\ \eta = \exp(\alpha_2 - \alpha_1)x\,;$$

алгебра I2. - алгебре (4.3):

$$X_1 = Y_1\,,\ X_2 = Y_2\,,\ X_3 = Y_3\,,\ X_4 = Y_4\,,$$
$$\xi = y\,,\ \eta = x\,;$$

алгебра I5. - алгебре (8.4):

$$X_1 = Y_1\,,\ X_2 = Y_3\,,\ X_3 = Y_2\,,\ X_4 = Y_4\,,$$
$$\xi = y\,,\ \eta = x\,;$$

алгебра $I7_1'$. - алгебре (7.I):

$$X_1 = Y_3/2\,,\ X_2 = -Y_2\,,\ X_3 = Y_1\,,\ X_4 = Y_4\,,$$
$$\xi = 2y/x^2\,,\ \eta = -2x\,;$$

алгебра $I7_2'$. - алгебре (7.3):

$$X_1 = \alpha Y_3/2\,,\ X_2 = Y_2\,,\ X_3 = Y_1/\alpha\,,\ X_4 = -Y_4/\alpha\,,$$
$$\xi = 2y\cdot\exp(-\alpha x)/\alpha x^2\,,\ \eta = 2/\alpha x\,;$$

алгебра $I7_3'$. - алгебре (5.I) с $h = 1$:

$$X_1 = Y_3\,,\ X_2 = Y_4\,,\ X_3 = Y_1\,,\ X_4 = Y_2/\beta\,,$$
$$\xi = y\exp(-\alpha_2 x)/\cos\beta x\,,\ \eta = \operatorname{tg}\beta x\,;$$

алгебра $I7_4'$. - алгебре (6.I) с $h = 1$:

$$\left.\begin{aligned} X_1 = y_2,\ X_2 = y_1,\ X_3 = y_4,\ X_4 = -y_3, \\ \xi = y\exp(-\alpha_1 x)/x,\ \eta = 1/x; \end{aligned}\right\}$$

алгебра $I7_5'$. - алгебре (6.2) с $h = 1$:

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \alpha_2 y_2,\ X_2 = y_1,\ X_3 = y_4,\ X_4 = -y_3/\alpha_2, \\ \xi = y\exp(-\alpha_1 x)/\alpha_2 x,\ \eta = 1/\alpha_2 x; \end{aligned}\right\}$$

алгебра $I7_6'$. - алгебре (4.2) с $h = 1$:

$$\left.\begin{aligned} X_1 = y_1,\ X_2 = y_2,\ X_3 = y_3,\ X_4 = -y_4, \\ \xi = y,\ \eta = \exp\alpha_2 x; \end{aligned}\right\}$$

алгебра $I7_7'$. - алгебре (4.4) с $h = 1$:

$$\left.\begin{aligned} X_1 = y_1,\ X_2 = y_2,\ X_3 = y_3,\ X_4 = -y_4/\alpha_1, \\ \xi = y\exp(-\alpha_1 x),\ \eta = \exp(\alpha_2 - \alpha_1)x; \end{aligned}\right\}$$

алгебра I8. - алгебре (4.I):

$$\left.\begin{aligned} X_1 = y_1,\ X_2 = y_2,\ X_3 = y_3,\ X_4 = y_4, \\ \xi = y,\ \eta = x; \end{aligned}\right\}$$

алгебра 22. - алгебре (I4.I):

$$\left.\begin{aligned} X_1 = (y_1 + y_3)/2,\ X_2 = y_2,\ X_3 = (y_1 - y_3)/2,\ X_4 = y_4 \\ \xi = 2\operatorname{arctg} y,\ \eta = x; \end{aligned}\right\}$$

алгебра 24. - алгебре (II.2):

$$X_1 = Y_3\,,\quad X_2 = Y_1\,,\quad X_3 = Y_4\,,\quad X_4 = Y_2\,,$$

$$\xi = x\,,\quad \eta = y\,.$$

Проведенное сопоставление показывает, что в пределах подобия имеется взаимно однозначное соответствие между множеством всех четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости по классификации С. Ли /25/, /26/ и множеством четырехмерных алгебр по классификационной теореме настоящего параграфа. Напомним, что таким же был результат сопоставления, проведенного в конце §4 гл.I, для трехмерных алгебр Ли преобразований плоскости. Однако, если только две трехмерные алгебры из классификации С. Ли допускали уточнение в пределах эквивалентности, то в случае четырехмерных алгебр их будет одиннадцать, то есть значительно больше. По таблице С. Ли это будут следующие четырехмерные алгебры: 7., 9. с $c = 0$, 9. с $c = 2$, 9. с $c \neq 0,1,2$, $I7'_1$., $I7'_2$., $I7'_3$., $I7'_4$., $I7'_5$., $I7'_6$., $I7'_7$.

Таким образом, результаты настоящего параграфа, также как и результаты §4 гл.I, дополняют соответствующую классификацию С. Ли с точностью до эквивалентности в смысле определения 4 из §3, то есть с точностью до подобия в более узком, чем у С. Ли, смысле, когда в каждом изоморфном классе допускается только замена координат на плоскости. Необходимость такого уточнения подтверждается вычислением двухточечных инвариантов (см. конец следующего параграфа). Например, алгебры (I4.2) с разными значениями постоянной $h \neq 0$ все подобны алгебре 7., поэтому С. Ли их не различает. Но постоянная h в базисе (I4.2) не исключается никакой заменой координат. То есть алгебры (I4.2) при разных значениях h все неэквивалентны друг другу, уточняют алгебру 7. в пределах эквивалент-

ности и без такого уточнения, оказывается, не может быть получен
метрика (3) из §5, которая является одной из двух возможных метр
(2,2)-мерной геометрии двух множеств ранга (3,3).

Отметим, что результаты данного параграфа составляют содержа
ние первого параграфа работы /20/.

§ 5. Групповые свойства физической структуры ранга (3,3)

Физическая структура ранга (3,3) кратко может быть определена следующим образом (см. также начало §2). Пусть множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ есть двумерные многообразия с локальными координатами x, y и ξ, η соответственно. Пусть, далее, имеется функция f с открытой и плотной в $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ областью определения $\mathcal{G}_f$, сопоставляющая каждой паре из $\mathcal{G}_f$ некоторое число. Функцию f назовем метрикой и будем предполагать, что ее координатное представление

$$f = f(x, y, \xi, \eta) \qquad (I)$$

есть достаточно гладкая функция, в которую координаты x, y и ξ, η входят существенным образом.

Построим функцию F с естественной в $\mathcal{M}^3 \times \mathcal{N}^3$ областью определения $\mathcal{G}_F$, сопоставляя шеститочечному кортежу из $\mathcal{G}_F$ девять возможных по метрике f расстояний. Будем говорить, что функция f задает на множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ феноменологически симметричную (2,2)-мерную геометрию (физическую структуру) ранга (3,3), если локально множество значений $F(\mathcal{G}_F)$ является подмножеством множества нулей некоторой гладкой функции φ от девяти переменных с $grad\ \varphi \neq 0$ на плотном в $\mathcal{G}_F$ подмножестве.

В работе /33/ и кандидатской диссертации /34/ автором установлено, что существуют всего два типа физических структур ранга (3,3). Метрика (I) с точностью до переобозначения $\Psi(f) \to f$ и эквивалентности (замены координат) задается следующими двумя выражениями:

$$f = x\xi + y + \eta \qquad (2)$$

для первого типа и

$$f = x\xi + y\eta \tag{3}$$

для второго.

Функциональная связь $\varphi = 0$ между девятью расстояниями, выражающая феноменологическую симметрию физической структуры ранга (3,3), легко находится:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) \\ 1 & f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) \\ 1 & f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\gamma) \end{vmatrix} = 0$$

для метрики (2) и

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\gamma) \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\gamma) \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\gamma) \end{vmatrix} = 0$$

для метрики (3), где, например, $f(i\alpha) = f(x(i), y(i), \xi(\alpha), \eta(\alpha))$.

Под движением в рассматриваемом случае следует понимать такую пару достаточно гладких локальных преобразований многообразий $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$:

$$\left.\begin{aligned} x' = \lambda(x,y)\ ,\ y' = \sigma(x,y), \\ \xi' = \tau(\xi,\eta)\ ,\ \eta' = \rho(\xi,\eta), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

при которых метрика (I) сохраняется:

$$f(x', y', \xi', \eta') = f(x, y, \xi, \eta). \tag{5}$$

Множество всех движений (4) составляет локальную группу, для которой метрика f, согласно уравнению (5), является двухточечным инвариантом. Преобразования многообразий в движении (4) сами составляют две изоморфные группы, а группа движений есть их взаимное расширение в смысле определения 5 из §3. Это расширение может быть и неэквивалентным, когда преобразования многообразий не переходят друг в друга ни при какой замене координат $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$.

Число независимых и существенных параметров множества движений (4), согласно теореме 2 из §I, равно четырем. Его можно также установить из следующих простых соображений. Рассмотрим некоторую фигуру из $\mathcal{M}^3 \times \mathcal{M}^3$ и пусть она движется как твердое тело. Поскольку множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}$ являются двумерными многообразиями, для определения положения фигуры надо задать двенадцать координат шести ее точек. При движении этой фигуры должны сохраняться все девять расстояний, из которых, вследствие феноменологической симметрии, то есть связи $\varphi = 0$, только восемь независимых. Число степеней свободы есть разность между числом независимых координат (= I2) и числом независимых связей на них (= 8), возникающих при сохранении восьми расстояний, и равно, следовательно, четырем. Ясно, что эти простые соображения нельзя рассматривать как доказательство.

В настоящем параграфе на частном примере физической структуры ранга (3,3) изучается групповая симметрия геометрии двух множеств. При этом используется полная классификация четырехмерных алгебр Ли преобразований плоскости, полученная в предыдущем параграфе с точностью до эквивалентности (замены координат) в каждом изоморфном классе. Рассматривая метрику (I) как невырожденный двухточечный инвариант, автор показывает, что выражения (2) и (3) являются единственно возможными. Поскольку метрики (2) и (3) возникают только

при неэквивалентном взаимном расширении, уточнение в пределах эквивалентности классификации С. Ли, осуществленное в предыдущем параграфе, при вычислении двухточечных инвариантов оказывается необходимым.

Итак, полная локальная группа локальных движений метрики (I) зависит существенным образом от четырех независимых параметров:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x, y; a^1, a^2, a^3, a^4), \\ y' &= \sigma(x, y; a^1, a^2, a^3, a^4), \\ \xi' &= \tau(\xi, \eta; a^1, a^2, a^3, a^4), \\ \eta' &= \rho(\xi, \eta; a^1, a^2, a^3, a^4). \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

Инфинитезимальные операторы группы (4′):

$$Z_\omega = \lambda_\omega(x,y)\partial_x + \sigma_\omega(x,y)\partial_y + \\ + \tau_\omega(\xi,\eta)\partial_\xi + \rho_\omega(\xi,\eta)\partial_\eta, \qquad (6)$$

где $\omega = 1, 2, 3, 4$, линейно независимы с постоянными коэффициентами и образуют базис четырехмерной алгебры Ли. Базисные операторы (6) естественно разлагаются в сумму операторов (3) из §4, задающих локальное преобразование множества $\mathcal{M}$ в движении (4′), и операторов

$$\Xi_\omega = \tau_\omega(\xi,\eta)\partial_\xi + \rho_\omega(\xi,\eta)\partial_\eta, \qquad (7)$$

задающих локальное преобразование множества $\mathcal{N}$ в том же движении:

$$Z_\omega = X_\omega + \Xi_\omega. \qquad (6')$$

Алгебра Ли с базисом (6) представляет собой взаимное расширение (в

смысле определения 5′ из §3) алгебр Ли с базисами (3) из §4 и (7).

Согласно инфинитезимальному критерию инвариантности (см. /24/, с. 77), функция (I) будет инвариантом группы (4′) в том и только в том случае, если эта функция удовлетворяет системе четырех уравнений $Z_\omega f = 0$ или, в координатной форме:

$$\lambda_\omega(x,y) f_x + \sigma_\omega(x,y) f_y +$$

$$+ \tau_\omega(\xi,\eta) f_\xi + \rho_\omega(\xi,\eta) f_\eta = 0. \qquad (8)$$

Относительно производных $f_x = \partial f/\partial x$, $f_y = \partial f/\partial y$, $f_\xi = \partial f/\partial \xi$, $f_\eta = \partial f/\partial \eta$ система (8) есть система четырех линейных однородных уравнений. Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение и, следовательно, метрика f не была тривиальной, то есть $f \neq const$, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \sigma_1 & \tau_1 & \rho_1 \\ \lambda_2 & \sigma_2 & \tau_2 & \rho_2 \\ \lambda_3 & \sigma_3 & \tau_3 & \rho_3 \\ \lambda_4 & \sigma_4 & \tau_4 & \rho_4 \end{vmatrix} \qquad (9)$$

был равен нулю.

Операторы X_ω и Ξ_ω, задаваемые выражениями (3) из §4 и (7), образуют базисы изоморфных четырехмерных алгебр Ли. Действительно, по теореме 2 из §I алгебры Ли с базисными операторами X_ω и Ξ_ω четырехмерны. С другой стороны, вследствие разложения (6′) и взаимного коммутирования этих операторов, зависящих от разных координат, коммутационные соотношения для них совпадают с коммутационными соотношениями для операторов Z_ω.

Будучи изоморфными, имея одинаковые структурные константы, алгебры с базисными операторами (3) из §4 и (7) не обязательно эквивалентны. Ясно, что выражения для операторов Ξ_ω получаются из соответствующих выражений классификационной теоремы предыдущего параграфа простым переобозначением координат: $x \to \xi$, $y \to \eta$. При использовании этих выражений для построения системы уравнений (8) не следует забывать о возможности неэквивалентности алгебр с базисными операторами X_ω и Ξ_ω . В частности, у них могут не совпадать постоянные h , δ , так как они, не входя в коммутаторы (4) - (I4), при варьировании не нарушают изоморфизма алгебр.

Т е о р е м а. Для группы преобразований (4′) существуют два и только два типа невырожденных двухточечных инвариантов, которые с точностью до переобозначения $\psi(f) \to f$ и эквивалентности задаются выражениями (2) и (3).

Рассмотрим всевозможные пары изоморфных алгебр с базисными операторами X_ω и Ξ_ω , задающих локальную группу локальных движений (4′), при которых сохраняется метрика f , удовлетворяющая системе уравнений (8). Таких пар в соответствии с классификационной теоремой из §4 будет тридцать пять: I. (4.I) и (4.I), 2. (4.2) и (4.2), 3. (4.3) и (4.3), 4. (4.4) и (4.4), 5. (5.I) и (5.I), 6. (6.I) и (6.I), 7. (6.2) и (6.2), 8. (7.I) и (7.I), 9. (7.I) и (7.2), I0. (7.2) и (7.2), II. (7.3) и (7.3), I2. (7.3) и (7.4), I3. (7.4) и (7.4), I4. (8.I) и (8.I), I5. (8.I) и (8.2), I6. (8.2) и (8.2), I7. (8.3) и (8.3), I8. (8.3) и (8.4), I9. (8.4) и (8.4), 20. (8.5) и (8.5), 2I. (8.5) и (8.6), 22. (8.6) и (8.6), 23. (8.7) и (8.7), 24. (8.7) и (8.8), 25. (8.8) и (8.8), 26. (9.I) и (9.I), 27. (II.I) и (II.I), 28. (II.I) и (II.2), 29. (II.2) и (II.2), 30. (I2.I) и (I2.I), 3I. (I2.I) и (I2.2), 32. (I2.2) и (I2.2), 33. (I4.I) и (I4.I), 34. (I4.I) и (I4.2), 35. (I4.2) и (I4.2).

Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что определитель (9) матрицы системы (8) для следующих восьми пар базисных операторов X_ω и Ξ_ω отличен от нуля: I8. $\Delta = x - \xi - y\eta$, 2I. $\Delta = 2(x - \xi - y\eta) - \delta y$, 22. $\Delta = (y-\eta)^2 + 2(\delta_2 - \delta_1)(x-\xi)$, 24. $\Delta = c(x - \xi - y\eta)$, 28. $\Delta = -y(x - \xi - y\eta)$, 3I. $\Delta = (1+y^2)(x - \xi - y\eta)$, 32. $\Delta = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$, 34. $\Delta = \cos(x-\xi) - 1$. Поскольку для всех перечисленных выше восьми случаев $\Delta \neq 0$, система (8) относительно производных f_x, f_y, f_ξ, f_η имеет только нулевое решение, то есть метрика (I) тривиальна: $f(x, y, \xi, \eta) = const$. Для следующих двадцати пяти пар: I. - I4., I5., I7., I9., 20., 23., 25., 26., 27., 29., 30., 33. в системе (8) найдется такая подсистема двух уравнений, которая относительно производных f_x и f_ξ имеет только нулевое решение, и метрика (I) оказывается вырожденной, вследствие отсутствия зависимости от координат x и ξ.

Таким образом, из тридцати пяти возможных пар базисных операторов X_ω и Ξ_ω невырожденная метрика (I) как решение системы уравнений (8) может получиться только для двух пар: I5. (8.I) и (8.2), 35. (I4.2) и (I4.2). Рассмотрим сначала первую из них. Локальное движение (4′) в этом случае состоит из преобразований множества $\mathcal{M}$, задаваемого алгеброй (8.I) из §4, и изоморфного, но не эквивалентного ему преобразования множества $\mathcal{N}$, задаваемого алгеброй (8.2) из §4. Для того, чтобы система (8) относительно производных f_x, f_y, f_ξ, f_η имела ненулевое решение, необходимо и достаточно обращения в нуль определителя (9) ее матрицы. Раскрывая этот определитель, приходим к уравнению: $\Delta = \delta_1 - \delta_2 = 0$, откуда получаем $\delta_1 = \delta_2$. В системе (8) при $\Delta = 0$ независимыми оказываются только три уравнения:

$$f_x + f_\xi = 0, \quad y f_x + f_\eta = 0, \quad -f_y + \eta f_\xi = 0. \qquad (I0)$$

Решая первое уравнение системы (I0) методом характеристик, легко находим:

$$f = \Theta(x - \xi, y, \eta), \tag{II}$$

где $\Theta(u, v, w)$ - произвольная функция трех переменных. Подставим выражение (II) в остальные два уравнения системы (I0):

$$v\Theta_u + \Theta_w = 0, \quad w\Theta_u + \Theta_v = 0, \tag{I0'}$$

откуда достаточно просто получаем новое уравнение:

$$v\Theta_v - w\Theta_w = 0,$$

решение которого находим методом характеристик:

$$\Theta(u, v, w) = \chi(u, vw), \tag{I2}$$

где $\chi(s,t)$ - произвольная функция уже двух переменных. Подставляя последний результат в первое уравнение системы (I0'), получаем: $\chi_s + \chi_t = 0$, откуда:

$$\chi(s,t) = \psi(t - s), \tag{I3}$$

где ψ - произвольная функция только одной переменной. Подставим решение (I3) в функцию (I2), которую, в свою очередь, подставим в выражение (II). Для невырожденной метрики f, удовлетворяющей системе уравнений (I0), приходим окончательно к следующему выражению:

$$f = \psi(y\eta - x + \xi). \tag{I4}$$

Результат (I4) с точностью до переобозначения $\psi(f) \to f$, заключающегося в свободе выбора функции ψ, и с точностью до эквивалентности, состоящей в очевидной замене координат: $y \to x$, $\eta \to \xi$, $x \to -y$, $\xi \to \eta$, задает метрику (2).

Рассмотрим теперь второй случай, когда локальное движение (4′) состоит из изоморфных преобразований множеств $\mathcal{M}_6$ и $\mathcal{M}_6$, задаваемых алгеброй (I4.2) из §4. Из условия обращения в нуль определителя (9) получаем: $\Delta = (h_1 + h_2)(\cos(x-\xi) - 1) = 0$, откуда: $h_1 = -h_2$, то есть, как и в предыдущем, преобразования множеств $\mathcal{M}_6$ и $\mathcal{M}_6$ неэквивалентны. При условии $h_1 = -h_2$, когда $\Delta = 0$, одно из уравнений системы (8) является следствием трех других. Удобно в системе для алгебры (I4.2) из §4 в случае $h_1 = -h_2$ оставить первое, четвертое и второе уравнения:

$$\left.\begin{aligned} f_x + f_\xi = 0\ ,\ f_y - f_\eta = 0\ , \\ \sin x\, f_x + \cos x\, f_y + \sin\xi\, f_\xi + \cos\xi\, f_\eta = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (I5)$$

Из первого и второго уравнений системы (I5), применяя метод характеристик, находим:

$$f = \chi(x-\xi, y+\eta), \qquad (I6)$$

где $\chi(s,t)$ - произвольная функция двух переменных. Подставим решение (I6) в третье уравнение системы (I5), воспользовавшись известными формулами для разности синусов и суммы косинусов:

$$\sin s/2\ \chi_s + \cos s/2\ \chi_t = 0.$$

Это последнее уравнение также решаем методом характеристик:

$$\chi(s,t) = \psi(\exp(-t/2)\sin s/2), \qquad (I7)$$

где ψ - произвольная функция только одной переменной. Подставляя решение (I7) в результат (I6) получаем невырожденную метрику

$$f = \psi\left(\exp\left(-\frac{y+\eta}{2}\right)\sin\frac{x-\xi}{2}\right),$$

которая с точностью до переобозначения $\psi(f) \to f$, означающего

свободу выбора функции Ψ, и с точностью до эквивалентности, состоящей в замене координат: $exp(-y/2)\sin x/2 \to x$, $exp(-y/2)\cos x/2 \to -y$, $exp(-\eta/2)\cos\xi/2 \to \xi$, $exp(-\eta/2)\sin\xi/2 \to \eta$, совпадает с метрикой (3). Теорема полностью доказана.

Заметим, что результаты только что доказанной теоремы на частном примере физической структуры ранга (3,3) подтверждают установленную в первом параграфе эквивалентность групповой и феноменологической симметрий в геометрии двух множеств. Можно надеяться, что эта эквивалентность, имеющая место также и в геометрии одного множества, позволит методами теории физических структур решить такие задачи в теории групп преобразований, которые обычно в ней не рассматривались из-за отсутствия полной классификации групп преобразований не только с точностью до эквивалентности в каждом изоморфном классе, но и с точностью до подобия. Одной из таких задач является вычисление всех невырожденных двухточечных инвариантов, то есть феноменологически инвариантных метрик, имеющих, согласно /I0/, содержательную физическую интерпретацию.

Анализ деталей доказательства теоремы позволяет также сделать следующее заключительное замечание. Если исходить из классификации С. Ли /26/, то ни одна из метрик (2), (3) не может быть получена как двухточечный инвариант группы движений (4'), так как С. Ли в пределах подобия не различает неэквивалентные алгебры (8.I), (8.2) и не различает неэквивалентные алгебры (I4.2), у которых $h_1 \neq h_2$ (9. при $c = 0$ и 7. по таблице из /26/). То есть для вычисления двухточечных инвариантов необходимо уточнять классификацию С. Ли в пределах эквивалентности, когда допускается только замена координат преобразуемого многообразия в каждом изоморфном классе, как это было сделано выше для трехмерных (§4 гл.I) и четырехмерных (§4 гл.II) алгебр Ли преобразований плоскости.

§ 6. Групповые свойства физических структур ранга $(n+1, 2)$

Будем исходить из общего и краткого определения геометрии двух множеств, данного в начале второго параграфа. Множество $\mathcal{M}$ в рассматриваемом случае будет одномерным многообразием, а множество $\mathcal{N}$ - n-мерным. Для метрики f координатное задание будет следующим:

$$f(x, \xi) = f(x, \xi^1, \ldots, \xi^n). \tag{I}$$

Согласно результатам работы /2I/, физические структуры ранга $(n+1, 2)$ существуют только для $n = 1, 2, 3$ и не существуют для $n \geq 4$. Метрика (I) с точностью до переобозначения $\psi(f) \to f$ и эквивалентности (замены локальных координат в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$) и функциональная связь, определяющая феноменологическую симметрию, задаются следующими выражениями:

для $n = 1$:

$$f = x + \xi, \tag{2}$$

$$f(i\alpha) - f(i\beta) - f(j\alpha) + f(j\beta) = 0;$$

для $n = 2$:

$$f = x\xi + \eta, \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

для $n = 3$:

$$f = (x\xi + \eta)/(x + \nu), \tag{4}$$

$$\begin{vmatrix} f(i\alpha) & f(i\beta) & f(i\alpha)f(i\beta) & 1 \\ f(j\alpha) & f(j\beta) & f(j\alpha)f(j\beta) & 1 \\ f(k\alpha) & f(k\beta) & f(k\alpha)f(k\beta) & 1 \\ f(l\alpha) & f(l\beta) & f(l\alpha)f(l\beta) & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Группа движений метрики (I) согласно теореме 2 из §I зависит от n существенных параметров:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \lambda(x; a^1, \dots, a^n), \\ \xi'^{\nu} &= \sigma^{\nu}(\xi^1, \dots, \xi^n; a^1, \dots, a^n), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где $\nu = 1, \dots, n$.

Локальное преобразование одномерного многообразия m в группе движений (5) задается линейно независимыми инфинитезимальными операторами

$$X_\omega = \lambda_\omega(x)\,\partial_x , \tag{6}$$

где $\omega = 1, \dots, n$. Если в операторах (6) произвести замену координат: $\int dx/\lambda_1(x) \to x$, то для первого оператора X_1 получим максимально простое выражение

$$X_1 = \partial_x , \; X_2 = \lambda_2(x)\partial_x , \dots, X_n = \lambda_n(x)\partial_x . \tag{6'}$$

Т е о р е м а I (С. Ли). Максимальная размерность алгебр Ли преобразований одномерного многообразия $\{x\}$ равна трем. С точностью до подобия базисный оператор X одномерной алгебры зада-

ется выражением

$$X = \partial_x ; \qquad (7)$$

базисные операторы X_1, X_2 двумерной алгебры задаются выражениями

$$X_1 = \partial_x , \quad X_2 = x\partial_x \qquad (8)$$

с коммутатором

$$[X_1, X_2] = X_1 ; \qquad (9)$$

базисные операторы X_1, X_2, X_3 трехмерной алгебры задаются выражениями

$$X_1 = \partial_x , \quad X_2 = x\partial_x , \quad X_3 = x^2\partial_x \qquad (10)$$

с коммутаторами

$$[X_1, X_2] = X_1 , \; [X_1, X_3] = 2X_2 , \; [X_2, X_3] = X_3 . \qquad (11)$$

Результат, изложенный в теореме I, принадлежит, как хорошо известно, Софусу Ли. Следует, однако, подчеркнуть, что его доказательство, воспроизведенное, например, в монографии Н.Г. Чеботарева /36/ на стр. 213, приводит к этому результату не с точностью до эквивалентности, а с точностью до подобия в смысле леммы 2 из §3, когда в исходной группе допускается как замена координат, так и замена параметров. Но подобие не равносильно эквивалентности, когда в каждом изоморфном классе допускается только замена координат преобразуемого многообразия (см., например, /37/, с. 44). С другой стороны, при нахождении феноменологически инвариантных метрик (I), являющихся невырожденными двухточечными инвариантами группы движений (5), необходимо проводить классификацию групп преобразований с точностью до эквивалентности. То есть, в частности,

результат теоремы I необходимо уточнить в пределах эквивалентности.

Т е о р е м а 2. Классификация алгебр Ли преобразований одномерного многообразия $\{x\}$ с точностью до подобия совпадает с их классификацией с точностью до эквивалентности.

Базисный оператор X одномерной алгебры Ли с точностью до эквивалентности, согласно выражениям (6′), может быть записан в виде (7). Базисные операторы X_1, X_2 двумерной алгебры Ли, согласно выражениям (6′), могут быть записаны в виде

$$X_1 = \partial_x \,, \quad X_2 = \lambda(x)\partial_x \,. \tag{I2}$$

Подставим операторы (I2) в коммутатор (9):

$$[X_1, X_2] = \lambda'(x)\partial_x = X_1 = \partial_x \,,$$

откуда получаем уравнение $\lambda'(x) = 1$ с решением $\lambda(x) = x + a$, где $a = const$. Аддитивная постоянная a может быть исключена простой заменой координат: $x + a \to x$, в результате чего с точностью до эквивалентности приходим к выражениям (8). Заметим, что в трехмерной алгебре Ли с коммутационными соотношениями (II) содержится двумерная неабелевая подалгебра с коммутатором (9). Поэтому ее базисные операторы X_1, X_2, X_3, согласно выражениям (8) и (6′), можно записать в следующем виде:

$$X_1 = \partial_x \,, \quad X_2 = x\partial_x \,, \quad X_3 = \lambda(x)\partial_x \,. \tag{I3}$$

Подставим операторы (I3) во второй и третий коммутатор соотношений (II):

$$[X_1, X_3] = \lambda'(x)\partial_x = 2X_2 = 2x\partial_x \,,$$

$$[X_2, X_3] = (x\lambda'(x) - \lambda(x))\partial_x = X_3 = \lambda(x)\partial_x \,,$$

откуда получаем два уравнения: $\lambda'(x) = 2x$ и $x\lambda'(x) = 2\lambda(x)$

с единственным решением $\lambda(x)=x^2$. Подставив его в выражения (I3), получим с точностью до эквивалентности базисные операторы (I0). Для $n>3$, очевидно, нет алгебр Ли преобразований одномерного многообразия с точностью до эквивалентности, как нет их, согласно теореме I, и с точностью до подобия, что и завершает доказательство теоремы 2.

Локальное преобразование множества $\mathcal{M}$ в движении (5) задается линейно независимыми операторами

$$\Xi_\omega = \sigma^\nu_\omega(\xi^1,\dots,\xi^n)\partial/\partial\xi^\nu, \qquad (I4)$$

где $\omega,\nu=1,\dots,n$. Из теоремы I следует, что локальное действие любой n -мерной группы Ли в одномерном многообразии $\mathcal{M}$ в случае $n\geq 4$ не эффективно. То есть группа преобразований $\mathcal{M}$ не может зависеть существенным образом от более чем трех параметров.

Локальное движение (5) задается операторами $Z_\omega = X_\omega + \Xi_\omega$, которые образуют базис n -мерной алгебры Ли. Поскольку операторы X_ω и Ξ_ω взаимно коммутируют, коммутационные соотношения для них совпадают с коммутационными соотношениями для операторов Z_ω . То есть n -мерные алгебры Ли с базисными операторами X_ω и Ξ_ω изоморфны с точностью до совпадения структурных констант. Поэтому дополнительно к результатам теорем I и 2 необходимо только найти с точностью до эквивалентности все двумерные алгебры Ли преобразований двумерного многообразия с коммутатором (9) и все трехмерные алгебры Ли преобразований трехмерного многообразия с коммутационными соотношениями (II). Эти дополнительные результаты надо установить с точностью до эквивалентности потому, что взаимные расширения подобных, но не эквивалентных алгебр Ли могут привести к различным метрикам (I) при решении системы уравнений (33) из §3.

Т е о р е м а 3. С точностью до эквивалентности базисный

оператор Ξ одномерной алгебры Ли преобразований одномерного многообразия $\{\xi\}$ задается выражением

$$\Xi = \partial_\xi ; \tag{15}$$

базисные операторы Ξ_1, Ξ_2 двумерной алгебры Ли преобразований двумерного многообразия $\{\xi, \eta\}$ с коммутатором

$$[\Xi_1, \Xi_2] = \Xi_1 \tag{16}$$

задаются выражениями:

$$\Xi_1 = \partial_\xi , \quad \Xi_2 = \xi \partial_\xi ; \tag{17}$$

$$\Xi_1 = \partial_\xi , \quad \Xi_2 = \xi \partial_\xi + \partial_\eta ; \tag{18}$$

базисные операторы Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 трехмерной алгебры Ли преобразований трехмерного многообразия $\{\xi, \eta, \vartheta\}$ с коммутационными соотношениями

$$[\Xi_1, \Xi_2] = \Xi_1 , \quad [\Xi_1, \Xi_3] = 2\Xi_2 , \quad [\Xi_2, \Xi_3] = \Xi_3 \tag{19}$$

задаются выражениями:

$$\Xi_1 = \partial_\xi , \quad \Xi_2 = \xi \partial_\xi , \quad \Xi_3 = \xi^2 \partial_\xi ; \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} \Xi_1 = \partial_\xi , \quad \Xi_2 = \xi \partial_\xi + \partial_\eta , \\ \Xi_3 = \xi^2 \partial_\xi + 2\xi \partial_\eta ; \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} \Xi_1 = \partial_\xi , \quad \Xi_2 = \xi \partial_\xi + \partial_\eta , \\ \Xi_3 = (\xi^2 \pm \exp 2\eta)\partial_\xi + 2\xi \partial_\eta ; \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} \Xi_1 = \partial_\xi , \quad \Xi_2 = \xi \partial_\xi + \partial_\eta , \\ \Xi_3 = \xi^2 \partial_\xi + 2\xi \partial_\eta + \exp \eta \, \partial_\vartheta . \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Выражение (I5) для оператора Ξ получается сразу же из выражения (7) простой заменой координат: $x \to \xi$, так как оба множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ при $n = 1$ являются одномерными многообразиями.

Если $n = 2$, то множество $\mathcal{N}$ является двумерным многообразием с локальными координатами $\xi = \xi^1$, $\eta = \xi^2$. Базисные операторы Ξ_1, Ξ_2 двумерной алгебры Ли преобразований многообразия $\mathcal{N}$, согласно общим выражениям (I4), можно записать в следующем виде:

$$\Xi_\omega = \sigma_\omega(\xi, \eta)\,\partial_\xi + \rho_\omega(\xi, \eta)\,\partial_\eta, \qquad (24)$$

где $\omega = 1, 2$. Произведем замену координат $\varphi(\xi, \eta) \to \xi$, $\psi(\xi, \eta) \to \eta$, где функции φ и ψ являются некоторыми решениями уравнений $\sigma_1 \varphi_\xi + \rho_1 \varphi_\eta = 1$ и $\sigma_1 \psi_\xi + \rho_1 \psi_\eta = 0$. Для оператора Ξ_1 получаем тогда максимально простое выражение: $\Xi_1 = \partial_\xi$. В результате упростится запись операторов (24):

$$\Xi_1 = \partial_\xi, \quad \Xi_2 = \sigma(\xi, \eta)\,\partial_\xi + \rho(\xi, \eta)\,\partial_\eta. \qquad (24')$$

Подставим операторы (24′) в коммутатор (I6):

$$[\Xi_1, \Xi_2] = \sigma_\xi(\xi, \eta)\,\partial_\xi + \rho_\xi(\xi, \eta)\,\partial_\eta = \Xi_1 = \partial_\xi,$$

откуда получаем $\sigma_\xi(\xi, \eta) = 1$, $\rho_\xi(\xi, \eta) = 0$, то есть $\sigma(\xi, \eta) = \xi + \sigma(\eta)$, $\rho(\xi, \eta) = \rho(\eta)$. Произведем дополнительную замену координат $\xi + \varphi(\eta) \to \xi$, $\psi(\eta) \to \eta$, которая сохраняет за оператором Ξ_1 его простую форму. Если $\rho(\eta) = 0$, то, полагая $\varphi(\eta) = \sigma(\eta)$, получим выражения (I7). Если же $\rho(\eta) \neq 0$, то, полагая $-\varphi(\eta) + \sigma(\eta) + \rho(\eta)\varphi'(\eta) = 0$, $\rho(\eta)\psi'(\eta) = 1$, получим выражения (I8). Заметим, что изоморфные алгебры Ли с базисными операторами (I7) и (I8) и не эквивалентны и не подобны, то есть никаким автоморфизмом и никакой заменой координат эти

которое можно значительно упростить, используя замену координат (27). Если $\rho^2+\tau^2=0$, то полагая $\varphi=\sigma$, получим:

$$\Xi_2=\xi\partial_\xi. \tag{28}$$

Если же $\rho^2+\tau^2\neq 0$, то, беря функции $\varphi,\psi,\varkappa$ как некоторые решения уравнений $-\varphi+\sigma+\rho\varphi_\eta+\tau\varphi_\vartheta=0$, $\rho\psi_\eta+\tau\psi_\vartheta=1$, $\rho\varkappa_\eta+\tau\varkappa_\vartheta=0$, получим второе выражение:

$$\Xi_2=\xi\partial_\xi+\partial_\eta. \tag{29}$$

Подставим операторы (26), (28) и оператор

$$\Xi_3=\sigma(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\xi+\rho(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\eta+\tau(\xi,\eta,\vartheta)\partial_\vartheta \tag{30}$$

из (25) во второй и третий коммутаторы соотношений (I9):

$$[\Xi_1,\Xi_3]=\sigma_\xi\partial_\xi+\rho_\xi\partial_\eta+\tau_\xi\partial_\vartheta=2\Xi_2=2\xi\partial_\xi,$$

$$[\Xi_2,\Xi_3]=\xi\sigma_\xi\partial_\xi+\xi\rho_\xi\partial_\eta+\xi\tau_\xi\partial_\vartheta-\sigma\partial_\xi=$$

$$=\Xi_3=\sigma\partial_\xi+\rho\partial_\eta+\tau\partial_\vartheta.$$

откуда получаем уравнения: $\sigma_\xi=2\xi$, $\rho_\xi=0$, $\tau_\xi=0$, $\xi\sigma_\xi=2\sigma$, $\xi\rho_\xi=\rho$, $\xi\tau_\xi=\tau$. Решения этих уравнений легко находятся $\sigma(\xi,\eta,\vartheta)=\xi^2$, $\rho(\xi,\eta,\vartheta)=0$, $\tau(\xi,\eta,\vartheta)=0$. Используя найденные решения в выражении (30), добавляя к нему выражения (26) и (28), придем к результату (20) доказываемой теоремы.

Подставим операторы (26), (29) и (30) в последние два коммутатора соотношений (I9):

$$[\Xi_1,\Xi_3]=\sigma_\xi\partial_\xi+\rho_\xi\partial_\eta+\tau_\xi\partial_\vartheta=$$

$$=2\Xi_2=2\xi\partial_\xi+2\partial_\eta,$$

$$[\Xi_2,\Xi_3]=(\xi\sigma_\xi+\sigma_\eta)\partial_\xi+(\xi\rho_\xi+\rho_\eta)\partial_\eta+$$

$$+(\xi\tau_\xi+\tau_\eta)\partial_\vartheta-\sigma\partial_\xi=\Xi_3=\sigma\partial_\xi+\rho\partial_\eta+\tau\partial_\vartheta,$$

откуда получаем уравнения: $\sigma_\xi=2\xi$, $\rho_\xi=2$, $\tau_\xi=0$, $\xi\sigma_\xi+\sigma_\eta=2\sigma$, $\xi\rho_\xi+\rho_\eta=\rho$, $\xi\tau_\xi+\tau_\eta=\tau$. Решения этих уравнений нетрудно найти: $\sigma(\xi,\eta,\vartheta)=\xi^2+\sigma(\vartheta)\exp 2\eta$, $\rho(\xi,\eta,\vartheta)=2\xi+\rho(\vartheta)\exp\eta$, $\tau(\xi,\eta,\vartheta)=\tau(\vartheta)\exp\eta$, где $\sigma(\vartheta)$, $\rho(\vartheta)$, $\tau(\vartheta)$ - произвольные функции одной переменной. Подставим эти решения в выражение (30):

$$\Xi_3=(\xi^2+\sigma(\vartheta)\exp 2\eta)\partial_\xi+$$

$$+(2\xi+\rho(\vartheta)\exp\eta)\partial_\eta+\tau(\vartheta)\exp\eta\,\partial_\vartheta$$

и произведем замену координат: $\xi+\varphi(\vartheta)\exp\eta\to\xi$, $\eta+\psi(\vartheta)\to\eta$, $\varkappa(\vartheta)\to\vartheta$, сохраняющую форму операторов (26) и (29). Если $\tau=0$ и $4\sigma+\rho^2=0$, то, полагая $\varphi=\rho/2$, приходим к результату (2I). Если же $\tau=0$ и $4\sigma+\rho^2\neq 0$, то, полагая $\varphi=\rho/2$ и $-\varphi^2+\sigma+\rho\varphi=\pm\exp 2\psi$, приходим к результату (22). Если же, наконец, $\tau\neq 0$, то, полагая $\tau\varkappa'=\exp\psi$, $-2\varphi+\rho+\tau\psi'=0$, $-\varphi^2+\sigma+\rho\varphi+\tau\varphi'=0$, приходим к последнему результату (23). Заметим, что изоморфные трехмерные алгебры Ли с базисными операторами (20) - (23) попарно и не эквивалентны и не подобны. Теорема полностью доказана.

Локальное движение (5) задается суммой операторов (6) и (I4):

$$Z_\omega=\lambda_\omega(x)\partial/\partial x+\sigma^\nu_\omega(\xi^1,\dots,\xi^n)\partial/\partial\xi^\nu. \qquad (3I)$$

Сопоставляя результаты первой, второй и третьей теорем, можно получить конкретные выражения для операторов Z_ω, которые составят базис (3I) взаимного расширения алгебр (6) и (I4). Базисный оператор Z одномерной алгебры Ли движений (5) для случая $n=1$ определится суммой выражений (7) и (I5). Базисные операторы

базисы не могут быть сведены друг к другу.

Для $n=3$ множество $\mathcal{M}$ является трехмерным многообразием, локальные координаты которого обозначим через $\xi=\xi^1$, $\eta=\xi^2$, $\nu=\xi^3$. Базисные операторы Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 трехмерной алгебры Ли преобразований многообразия $\mathcal{M}$, согласно общим выражениям (I4), можно записать в следующем виде:

$$\Xi_\omega = \sigma_\omega(\xi,\eta,\nu)\partial_\xi + \rho_\omega(\xi,\eta,\nu)\partial_\eta + \tau_\omega(\xi,\eta,\nu)\partial_\nu, \quad (25)$$

где $\omega = 1, 2, 3$. Заменой координат $\varphi(\xi,\eta,\nu)\to\xi$, $\psi(\xi,\eta,\nu)\to\eta$, $\varkappa(\xi,\eta,\nu)\to\nu$ с независимыми функциями $\varphi, \psi, \varkappa$, являющимися некоторыми решениями уравнений $\sigma_1\varphi_\xi+\rho_1\varphi_\eta+\tau_1\varphi_\nu=1$, $\sigma_1\psi_\xi+\rho_1\psi_\eta+\tau_1\psi_\nu=0$, $\sigma_1\varkappa_\xi+\rho_1\varkappa_\eta+\tau_1\varkappa_\nu=0$, выражение для оператора Ξ_1 можно сделать максимально простым:

$$\Xi_1 = \partial_\xi. \quad (26)$$

Заметим, что выражение (26), в котором $\sigma_1=1$, $\rho_1=\varkappa_1=0$, сохраняет свою простую форму при любой замене координат вида:

$$\xi+\varphi(\eta,\nu)\to\xi,\ \psi(\eta,\nu)\to\eta,\ \varkappa(\eta,\nu)\to\nu, \quad (27)$$

где $\varphi, \psi, \varkappa$ - произвольные функции двух переменных при условии, конечно, что ψ и $\varkappa$ независимы.

Подставим оператор (26) и оператор Ξ_2 из (25) в первый коммутатор соотношений (I9):

$$[\Xi_1,\Xi_2] = \sigma_{2\xi}\partial_\xi + \rho_{2\xi}\partial_\eta + \tau_{2\xi}\partial_\nu = \Xi_1 = \partial_\xi.$$

откуда получаем уравнения $\sigma_{2\xi}=1$, $\rho_{2\xi}=0$, $\tau_{2\xi}=0$ с решениями $\sigma_2(\xi,\eta,\nu)=\xi+\sigma(\eta,\nu)$, $\rho_2(\xi,\eta,\nu)=\rho(\eta,\nu)$, $\tau_2(\xi,\eta,\nu)=\tau(\eta,\nu)$. Для оператора Ξ_2 теперь имеем выражение

$$\Xi_2 = (\xi+\sigma(\eta,\nu))\partial_\xi + \rho(\eta,\nu)\partial_\eta + \tau(\eta,\nu)\partial_\nu,$$

Z_1, Z_2 двумерной алгебры Ли движений (5) для случая $n = 2$ определяются суммами выражений (8) и (I7), а также (8) и (I8). Базисные операторы Z_1, Z_2, Z_3 трехмерной алгебры Ли движений (5) для случая $n = 3$ определяются суммами выражений (I0) и (20), (I0) и (2I), (I0) и (22), (I0) и (23).

Согласно инфинитезимальному критерию инвариантности (см., /24/, с. 77), метрика (I) будет двухточечным инвариантом группы преобразований (5) в том и только в том случае, если она удовлетворяет системе уравнений $Z_\omega f = 0$ с операторами (3I):

$$\lambda_\omega(x)\,\partial f/\partial x + \sigma^\nu_\omega(\xi^1, \ldots, \xi^n)\,\partial f/\partial \xi^\nu = 0. \qquad (32)$$

Т е о р е м а 4. С точностью до переобозначения $\psi(f) \to f$ и эквивалентности (замены локальных координат) невырожденная метрика (I), определяемая как двухточечный инвариант группы движений (5), задается выражениями: (2) для $n = 1$, (3) для $n = 2$ и (4) для $n = 3$.

В случае $n = 1$ метрика $f(x, \xi)$, рассматриваемая как двухточечный инвариант, является решением уравнения (32) с операторами (7) и (I5):

$$f_x + f_\xi = 0.$$

Решение этого уравнения легко находится методом характеристик:

$$f(x, \xi) = \psi(x - \xi), \qquad (33)$$

где ψ - произвольная функция одной переменной. Решение (33) с точностью до произвола выбора функции ψ и с точностью до эквивалентности, состоящей в очевидной замене координат: $x \to x$, $-\xi \to \xi$, совпадает с выражением (2).

Если же $n = 2$, то метрика $f(x, \xi, \eta)$ является решением

одной из двух систем уравнений (32) либо с операторами (8) и (I7), либо с операторами (8) и (I8). Однако в отношении производных $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial \xi$ первая система имеет только нулевое решение. Метрика оказывается вырожденной, так как не зависит от координат x, ξ . Запишем вторую систему:

$$\left.\begin{aligned} f_x + f_\xi &= 0, \\ x f_x + \xi f_\xi + f_\eta &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Решение первого уравнения системы (34) будет:

$$f(x, \xi, \eta) = \chi(x-\xi, \eta), \qquad (35)$$

где $\chi(u, v)$ - произвольная функция двух переменных. Подставим решение (35) во второе уравнение системы (34). Произведя замену $u = x - \xi$, $v = \eta$, получим уравнение для функции χ :

$$u \chi_u + \chi_v = 0,$$

решение которого легко находится:

$$\chi(u, v) = \Psi(u \exp(-v)), \qquad (36)$$

где Ψ - произвольная функция одной переменной. Из выражений (35) и (36) получаем решение исходной системы (34):

$$f(x, \xi, \eta) = \Psi((x-\xi)\exp(-\eta)). \qquad (37)$$

Решение (37) с точностью до произвола выбора функции Ψ и с точностью до эквивалентности, состоящей в замене координат: $x \to x$, $\exp(-\eta) \to \xi$, $-\xi \exp(-\eta) \to \eta$ совпадает с выражением (3).

Для случая $n = 3$ метрика $f(x, \xi, \eta, \nu)$ является решением одной из четырех систем уравнений (32) с операторами (I0) и (20),

(I0) и (2I), (I0) и (22), (I0) и (23). Но первая система относительно производных $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial \xi$, вторая и третья относительно производных $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial \xi$, $\partial f/\partial \eta$ имеют только нулевые решения, что приводит, очевидно, к вырождению метрики. Запишем четвертую систему:

$$\left.\begin{aligned} f_x + f_\xi &= 0, \\ x f_x + \xi f_\xi + f_\eta &= 0, \\ x^2 f_x + \xi^2 f_\xi + 2\xi f_\eta + \exp\eta f_\nu &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

в которой первые два уравнения составляют систему (34). Ее решение для метрики $f(x,\xi,\eta,\nu)$ легко получить, используя выражение (37):

$$f(x,\xi,\eta,\nu) = \theta((x-\xi)\exp(-\eta),\nu), \qquad (39)$$

где $\theta(s,t)$ - произвольная функция двух переменных. Подставим решение (39) в третье уравнение системы (38), полагая $s = (x-\xi)\cdot\exp(-\eta)$, $t = \nu$:

$$s^2\theta_s + \theta_t = 0. \qquad (40)$$

Уравнение (40) интегрируется методом характеристик:

$$\theta(s,t) = \psi((st+1)/s), \qquad (4I)$$

где ψ - произвольная функция одной переменной. Из выражений (4I) и (39) получаем решение исходной системы (38):

$$f(x,\xi,\eta,\nu) = \psi\left(\frac{(x-\xi)\nu\exp(-\eta)+1}{(x-\xi)\exp(-\eta)}\right). \qquad (42)$$

Решение (42) с точностью до произвола выбора функции ψ и с точностью до эквивалентности, состоящей в замене координат: $x \to x$,

$\vartheta \to \xi$, $-\xi\vartheta + exp\eta \to \eta$, $-\xi \to \vartheta$, совпадает с выражением (4). Теорема 4 полностью доказана.

Для случая $n \geq 4$, как уже было отмечено выше, из теоремы I следует, что действие любой n -мерной локальной группы Ли в одномерном многообразии M^1 не эффективно. То есть никакая функция (I) в случае $n \geq 4$ не может задавать на одномерном и n -мерном многообразиях M^1 и M^n (I, n)-мерную геометрию расстояний, наделенную групповой симметрией степени n и потому, согласно теореме 2 из §I, никакая функция (I) в случае $n \geq 4$ не может задавать на этих многообразиях физическую структуру ранга $(n+1, 2)$ и порядка I. Таким образом, физические структуры ранга $(n+1, 2)$ и порядка I в случае $n \geq 4$ не существуют.

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

§ I. Групповые свойства произвольных физических структур

В первой и второй главах настоящей диссертации были определены бинарные физические структуры, когда функция f сопоставляет число паре точек. Бинарные структуры естественно определяются на одном и двух множествах. Функция f допускает нетривиальную группу движений с конечным числом параметров, которое было названо степенью групповой симметрии. При определенном соотношении между рангом физической структуры, числом существенных параметров группы движений и размерностью множеств групповая и феноменологическая симметрии соответствующей геометрии оказываются эквивалентными. Эти соотношения были заложены в определение физической структуры, ее феноменологической и групповой симметрий. Естественно возникает вопрос об их происхождении и обосновании. Кроме того, имеется много возможностей обобщения и развития понятия физической структуры (см., например, /29/, с. 71 - 76), одна из которых была реализована в §I гл.II, когда двум точкам из разных множеств сопоставлялось S действительных чисел, где $S \geqslant 1$ (физические структуры порядка S или S -метрические физические структуры).

Другая возможность обобщения реализуется в определении тернарных физических структур, когда функция f сопоставляет число не паре точек, как в случае бинарных структур, а трем. Тернарные физические структуры могут быть определены на одном, двух и трех множествах и их простейшие случаи были рассмотрены автором в работах /4/, /38/, /39/. Однако предварительное исследование показало, что тернарные структуры в их естественном определении (см. ниже) в отличие от бинарных никаких групповых свойств не имеют, то есть соответствующие функции f не допускают нетривиальных групп дви-

жений. Этот результат в какой-то мере объясняет, почему столь богаты и содержательны в физическом и математическом смыслах бинарные структуры, в то время как тернарные существуют, по-видимому, только в самых простых случаях наименьшего возможного ранга. И тогда естественно возникает вопрос о внутренних причинах такого различия между бинарными и тернарными физическими структурами.

Для полного ответа на вопрос о соотношении ранга физической структуры, степени ее групповой симметрии и размерности множеств, а также на вопрос о причинах различия бинарных и тернарных структур, необходимо исходить из более общего определения физической структуры. Тогда можно будет понять, при каких соотношениях основных характеристик групповые свойства у структур есть, а при каких их нет. Естественно предположить, что только те структуры содержательны в физическом и математическом смыслах, которые наделены нетривиальными групповыми свойствами. Для краткости изложения определение произвольных физических структур будет дано в самых общих чертах.

Пусть имеются ρ множеств $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_\rho$ произвольной физической природы, каждое из которых в математическом смысле представляет собой гладкое многообразие размерности $m_1, \ldots, m_\rho$ соответственно. Пусть также имеется функция

$$f : \mathcal{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathcal{M}_\rho^{q_\rho} \longrightarrow R^s, \qquad (I)$$

сопоставляющая кортежу длины $q = q_1 + \ldots + q_\rho$ из $\mathcal{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathcal{M}_\rho^{q_\rho}$ некоторую точку из R^s, то есть s действительных чисел. Область определения функции f, как обычно, обозначим через G_f, предполагая ее открытость и плотность в $\mathcal{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathcal{M}_\rho^{q_\rho}$. Предположим, что координатное представление (I) локально достаточно гладкое и координаты точек каждого множества входят в него существенным образом, то есть функция f невырождена. Чисто-

вой кортеж $\langle q_1, \ldots, q_\rho \rangle$ назовем кратностью физической структуры, а S - ее порядком.

Пусть $M_1, \ldots, M_\rho$ - произвольные целые числа, такие, что $M_1 \geq q_1 + 1, \ldots, M_\rho \geq q_\rho + 1$. Построим отображение

$$F: \mathcal{M}_1^{M_1} \times \ldots \times \mathcal{M}_\rho^{M_\rho} \to R^S C_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_\rho}^{q_\rho}, \qquad (2)$$

сопоставляя кортежу длины $M_1 + \ldots + M_\rho$ из $\mathcal{M}_1^{M_1} \times \ldots \times \mathcal{M}_\rho^{M_\rho}$ совокупность $S C_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_\rho}^{q_\rho}$ чисел, соответствующих всем упорядоченным кортежам длины $q = q_1 + \ldots + q_\rho$, являющихся проекциями исходного кортежа на пространство $\mathcal{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathcal{M}_\rho^{q_\rho}$. Естественную область определения F обозначим через $\mathcal{G}_F$. Аналогично построим второе отображение

$$F': \mathcal{M}_1^{M_1'} \times \ldots \times \mathcal{M}_\rho^{M_\rho'} \to R^S C_{M_1'}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_\rho'}^{q_\rho}, \qquad (2')$$

где $M_i' \geq M_i$, $i = 1, \ldots, \rho$, с областью определения $\mathcal{G}_{F'}$. Проекцию отображения F' на пространство меньшей размерности получим, опуская из области его значений все числа, соответствующие по функции (I) некоторой совокупности кортежей длины $q = q_1 + \ldots + q_\rho$.

Будем говорить, что функция (I) задает на множествах $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_\rho$ феноменологически симметричную $(m_1, \ldots, m_\rho)$-мерную геометрию (q-арную физическую структуру) ранга $(M_1, \ldots, M_\rho)$, кратности $\langle q_1, \ldots, q_\rho \rangle$ и порядка S, если на плотном в $\mathcal{G}_F$ множестве ранг отображения F равен $S(C_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_\rho}^{q_\rho} - 1)$, а ранг любой проекции отображения F', не включающей в себя отображения F, максимален на плотном в $\mathcal{G}_{F'}$ множестве. Другими словами, локально множество значений отображения F является подмножеством множества нулей системы S независимых функций $\Phi_1, \ldots, \Phi_S$ от $S C_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_\rho}^{q_\rho}$ переменных,

причем S функциональных связей

$$\Phi_1 = 0 \ , \ \dots \ , \ \Phi_S = 0 \qquad (3)$$

являются порождающими в том смысле, что любые другие нетривиальные связи будут только их следствием.

Будем говорить, что определенная выше физическая структура наделена групповой симметрией, если заданы такие эффективные гладкие локальные действия некоторой локальной группы Ли в многообразиях $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_p$, что для взаимного расширения этих действий на прямое произведение $\mathcal{M}_1^{q_1} \times \dots \times \mathcal{M}_p^{q_p}$ функция f является q -точечным инвариантом, где $q = q_1 + \dots + q_p$. Поскольку преобразуемые многообразия конечномерны и метрика f невырождена, естественно предположить, что максимальное число существенных параметров полной локальной группы локальных движений конечно, то есть что она является конечномерной локальной группой Ли. Обозначим ее размерность через τ и назовем число τ степенью групповой симметрии.

Запишем систему $S\, C_{M_1'}^{q_1} \times \dots \times C_{M_p'}^{q_p}$ уравнений сохранения

$$df\,|_{F'} = 0 \qquad (4)$$

относительно $M_1' m_1 + \dots + M_p' m_p$ дифференциалов координат точек кортежа из $\mathcal{G}_{F'}$. Если физическая структура наделена групповой симметрией, то система (4), с одной стороны, должна иметь, по крайней мере, одно ненулевое решение, а с другой - число ее линейно независимых ненулевых решений для любых чисел $M_1', \dots, M_p'$ не должно превышать некоторого конечного значения, определяющего степень групповой симметрии. Число таких решений равно числу неизвестных в системе минус ранг ее матрицы. Но матрица системы (4) есть матрица Якоби системы функций f , соответствующих всем упо-

рядоченным проекциям из $\mathcal{B}_{F'}$ на пространство $\mathcal{M}_1^{q_1} \times \ldots \times \mathcal{M}_\rho^{q_\rho}$. Ранг ее, очевидно, не изменится, если из системы функций $f|_{F'}$ исключить зависимые по связи (3). Исключив их, получим максимальную проекцию отображения F', не включающую в себя отображения F. Обозначим число функций f в этой максимальной проекции через $\mathcal{N}(M'_1, \ldots, M'_\rho)$. Тогда по определению физической структуры ранг матрицы системы (4) будет равен

$$\min (M'_1 m_1 + \ldots + M'_\rho m_\rho, \mathcal{N}(M'_1, \ldots, M'_\rho)). \qquad (5)$$

Если найдутся такие значения $M'_1, \ldots, M'_\rho$, для которых $M'_1 m_1 + \ldots + M'_\rho m_\rho \leq \mathcal{N}(M'_1, \ldots, M'_\rho)$, то ранг матрицы системы (4) для них будет равен $M'_1 m_1 + \ldots + M'_\rho m_\rho$, то есть числу неизвестных в ней. Но тогда система (4) будет иметь только нулевое решение, что означает отсутствие нетривиальных групповых свойств у рассматриваемой физической структуры. Если же для любых значений $M'_1, \ldots, M'_\rho$ выполняется неравенство $\mathcal{N}(M'_1, \ldots, M'_\rho) < M'_1 m_1 + \ldots + M'_\rho m_\rho$, то ранг матрицы системы (4) будет равен $\mathcal{N}(M'_1, \ldots, M'_\rho)$ и число ее линейно независимых ненулевых решений окажется равным

$$r' = M'_1 m_1 + \ldots + M'_\rho m_\rho - \mathcal{N}(M'_1, \ldots, M'_\rho). \qquad (6)$$

Число решений r', как было отмечено выше, не должно превышать некоторого конечного значения. Из этого условия установим при каких соотношениях между размерностью множеств, рангом и порядком физической структуры она может быть наделена групповой симметрией и определить степень этой симметрии.

Рассмотрим сначала более подробно бинарные структуры на одном и двух множествах, а также тернарные структуры на одном, двух и трех множествах.

Для бинарных структур на одном множестве ранга M и порядка

S множество $\mathcal{M}$ есть m -мерное многообразие, а функция (I) запишется в следующем виде:

$$f: \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow R^s .$$

Отображение

$$F: \mathcal{M}^M \longrightarrow R^{s M(M-1)/2},$$

где $M \geq 3$, по определению физической структуры имеет ранг $s M(M-1)/2 - s$. Найдем, сколько в системе $s M'(M'-1)/2$ функций, соответствующих кортежу из $\mathcal{M}^{M'}$, где $M' \geq M$, при этом зависимых. На матрицу пар для кортежа длины M' будем последовательно налагать матрицу пар для кортежа длины M . При каждом полном наложении вычеркнем одну пару, например, последнюю. Эта процедура повторяется до тех пор, пока возможно наложение без пропусков. Число зависимых функций будет равно, очевидно, числу состоявшихся наложений, умноженному на s . Нетрудно установить, что это число равно $s(M'-M+1)(M'-M+2)/2$ и потому ранг матрицы Якоби всей системы функций $f|_{F'}$ по определению физической структуры оказывается равным

$$\min\left(M'm, s M'(M'-1)/2 - s(M'-M+1)(M'-M+2)/2\right).$$

Если $m < s(M-2)$, то ранг матрицы системы уравнений (4) для достаточно больших значений M' равен числу неизвестных и она имеет для этих значений только нулевое решение, то есть физическая структура не может быть наделена групповой симметрией. Если же $m \geq s(M-2)$, то для всех $M' \geq M$ ранг матрицы системы (4) меньше $M'm$ и она по формуле (6) будет иметь

$$z' = M'm - s M'(M-2) + s(M-1)(M-2)/2$$

линейно независимых ненулевых решений. При $m > s(M-2)$ с рос-

том M' число решений z' может стать сколь угодно большим, что противоречит выводу об ограниченности z' . Поэтому для существования групповых свойств необходимо, чтобы размерность многообразия $\mathcal{M}$ была равна

$$\boxed{m = s(M-2).} \tag{7}$$

В случае (7) число решений z' определяет число существенных и независимых параметров группы движений, то есть степень групповой симметрии:

$$\boxed{z' = z = s(M-2)(M-1)/2 = m(m+s)/2s.} \tag{8}$$

Если $s = 1$, то из равенств (7),(8) получаем $m = M-2$, $z = m(m+1)/2$, то есть такие соотношения между размерностью m множества $\mathcal{M}$, рангом M физической структуры и степенью ее групповой симметрии, которые были использованы в основных определениях §§ I и 2 первой главы.

Рассмотрим теперь бинарные физические структуры ранга (M,N) и порядка s на двух множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, являющихся многообразиями размерности m и n соответственно, задаваемых функцией

$$f: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \to R^s.$$

По определению физической структуры ранг отображения

$$F: \mathcal{M}^M \times \mathcal{N}^N \to R^{sMN},$$

где $M \geq 2, N \geq 2$ равен $s(MN-1)$. Число зависимых функций в системе $sM'N'$ функций, соответствующих кортежу из $\mathcal{M}^{M'} \times \mathcal{N}^{N'}$, где $M' \geq M$, $N' \geq N$, определяется описанным выше способом наложения на матрицу пар для кортежа длины $M'+N'$ матрицы пар для кортежа длины $M+N$. Это число без особых трудностей на-

ходится: $s(M'-M+1)(N'-N+1)$ и потому ранг матрицы Якоби системы функций $f|_{F'}$, а следовательно, и системы уравнений (4), по тому же определению оказывается равным

$$\min\left(M'm+N'n,\ sM'N'-s(M'-M+1)(N'-N+1)\right).$$

Если $m<s(N-1)$ или $n<s(M-1)$, то для некоторых значений M' и N' ранг системы уравнений (4) равен числу неизвестных $M'm+N'n$ и она имеет для этих значений только нулевое решение, что и означает отсутствие у рассматриваемой физической структуры групповых свойств. Если же $m\geqslant s(N-1)$ и $n\geqslant s(M-1)$, то ранг матрицы системы уравнений (4) для любых значений M' и N' равен $sM'N'-s(M'-M+1)(N'-N+1)$ и она имеет

$$r'=M'm+N'n-sM'(N-1)-sN'(M-1)+s(M-1)(N-1)$$

линейно независимых ненулевых решений. При $m>s(N-1)$ или $n>s(M-1)$ с ростом M' и N' число решений r' может стать сколь угодно большим, что противоречит выводу об ограниченности r'. Поэтому физическая структура будет наделена групповой симметрией только в том случае, если между размерностью множеств $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, рангом структуры (M,N) и ее порядком s имеется следующая связь:

$$\boxed{m=s(N-1),\quad n=s(M-1).} \tag{9}$$

Степень групповой симметрии r, то есть число независимых и существенных параметров группы движений, определяется числом линейно независимых ненулевых решений системы (4) при условии (9):

$$\boxed{r'=r=s(M-1)(N-1)=mn/s.} \tag{10}$$

Соотношения (9) и (10) были использованы в основных определениях §1 второй главы.

Перейдем, далее, к качественному рассмотрению тернарных физических структур. Для структуры ранга M и порядка s, задаваемой на множестве $\mathcal{M}$ - многообразии размерности m - функцией

$$f: \mathcal{M}^3 \to R^s,$$

ранг отображения

$$F: \mathcal{M}^M \to R^{s\,M(M-1)(M-2)/6},$$

где $M \geq 4$, равен по определению $s\,M(M-1)(M-2)/6 - s$. Найдем ранг отображения F'. Среди всех $s\,M'(M'-1)(M'-2)/6$ функций отображения F', где $M' \geq M$, число зависимых определяется методом наложения матрицы троек для кортежа длины M на матрицу троек для кортежа длины M'. Этот метод был подробно описан выше при рассмотрении бинарных структур на одном множестве, и для числа зависимых функций отображения F' получаем значение $s(M'-M+1)(M'-M+2)(M'-M+3)/6$. По определению физической структуры ранг матрицы системы уравнений (4) будет равен

$$\min\,(M'm,\ s\,M'(M'-1)(M'-2)/6 -$$

$$-\,s(M'-M+1)(M'-M+2)(M'-M+3)/6).$$

Поскольку $M > 3$, для достаточно больших значений M' ранг матрицы системы уравнений (4) равен $M'm$, то есть числу неизвестных, и она для таких значений M' имеет только нулевое решение. Таким образом, тернарные физические структуры на одном множестве не могут быть наделены групповой симметрией.

Тернарные физические структуры ранга (M, N) и порядка s на двух множествах $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ - многообразиях размерности m и n соответственно - задаются функцией

$$f: \mathcal{M}^2 \times \mathcal{N} \to R^s.$$

По определению этой структуры ранг отображения

$$F : \mathcal{M}^M \times \mathcal{M}^N \to R^{sM(M-1)N/2},$$

где $M \geq 3, N \geq 2$, равен $sM(M-1)N/2 - s$, а ранг отображения F', то есть ранг матрицы системы уравнений (4), найдем, налагая матрицу троек для кортежа длины $M+N$ на матрицу троек для кортежа длины $M'+N'$, где $M' \geq M, N' \geq N$:

$$\min (M'm + N'n, sM'(M'-1)N'/2 -$$

$$- s(M'-M+1)(M'-M+2)(N'-N+1)/2).$$

Поскольку $M > 2$ и $N > 1$ для достаточно больших значений M' и N' ранг отображения F' равен $M'm + N'n$, то есть числу неизвестных в системе уравнений (4), которая тогда будет иметь только нулевое решение. Таким образом, тернарные физические структуры на двух множествах не могут быть наделены групповой симметрией.

Для тернарных физических структур ранга (M, N, L) и порядка s на трех множествах $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{L}$ - многообразиях размерности m, n, l соответственно -, задаваемых функцией

$$f : \mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{L} \to R^s,$$

ранг отображения

$$F : \mathcal{M}^M \times \mathcal{N}^N \times \mathcal{L}^L \to R^{sMNL},$$

где $M \geq 2, N \geq 2, L \geq 2$, по определению равен $sMNL - s$. Ранг отображения F', то есть ранг матрицы системы уравнений (4), можно найти методом, использованным и описанным выше:

$$\min (M'm + N'n + L'l, sM'N'L' -$$

$$- s(M'-M+1)(N'-N+1)(L'-L+1)),$$

где $M' \geq M, N' \geq N, L' \geq L$. Поскольку $M > 1, N > 1, L > 1$, для достаточно больших значений M', N', L' ранг отображения F' равен $M'm + N'n + L'l$, то есть числу неизвестных в системе уравнений (4), которая для этих значений имеет только нулевое решение. Таким образом, тернарные структуры на трех множествах не имеют групповых свойств ни при каких размерностях этих множеств.

Произвольные физические структуры ранга $(M_1, \ldots, M_\rho)$ и *кратности* S *задаются на множествах* $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_\rho$ – многообразиях размерности $m_1, \ldots, m_\rho$ соответственно – функцией (I). Ранг отображения (2) по определению физической структуры равен $s C_{M_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_\rho}^{q_\rho} - S$, а ранг отображения (2′), то есть ранг матрицы системы уравнений (4), можно найти, налагая на матрицу кортежей длины $q_1 + \ldots + q_\rho$ для кортежа длины $M_1' + \ldots + M_\rho'$ из $\mathcal{M}_1^{M_1'} \times \ldots \times \mathcal{M}_\rho^{M_\rho'}$ матрицу тех же кортежей для кортежа длины $M_1 + \ldots + M_\rho$ из $\mathcal{M}_1^{M_1} \times \ldots \times \mathcal{M}_\rho^{M_\rho}$:

$$\min \left(M_1' m_1 + \ldots + M_\rho' m_\rho , s C_{M_1'}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_\rho'}^{q_\rho} - \right.$$

$$\left. - s C_{M_1' - M_1 + q_1}^{q_1} \times \ldots \times C_{M_\rho' - M_\rho + q_\rho}^{q_\rho} \right) . \qquad (5')$$

Поскольку бинарные и тернарные физические структуры выше были подробно рассмотрены, будем предполагать, что $q = q_1 + \ldots + q_\rho > 3$. Число неизвестных в системе уравнений (4) от $M_1', \ldots, M_\rho'$ зависит линейным образом. В то же время разность, входящая в выражение (5′), содержит по $M_1', \ldots, M_\rho'$ члены порядка $q - 1 > 2$, которые неограниченно возрастают, так как $M_1 > q_1, \ldots, M_\rho > q_\rho$. А это означает, что для достаточно больших значений $M_1', \ldots, M_\rho'$ ранг отображения F' равен числу неизвестных в системе (4), которая для этих значений будет иметь только нулевое решение. Таким образом, q -арные физические структуры, задаваемые на множествах $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_\rho$ функцией (I), в случае $q > 3$ не могут быть на-

делены групповой симметрией.

Окончательный вывод, к которому мы приходим по результатам проведенного выше исследования, состоит в следующем:

> групповой симметрией могут быть наделены только бинарные физические структуры на одном и двух множествах, в то время как для q -арных физических структур с $q = q_1 + \dots + q_p \geq 3$ функция (I) не допускает никаких нетривиальных локальных движений.

Только что сформулированному выводу об отсутствии групповых свойств, в частности, у тернарных физических структур как будто бы противоречит следующий простой пример. Сопоставим упорядоченной тройке $\langle ijk \rangle$ точек евклидовой плоскости площадь треугольника с соответствующими вершинами:

$$2S(ijk) = \begin{vmatrix} x(i) & y(i) & 1 \\ x(j) & y(j) & 1 \\ x(k) & y(k) & 1 \end{vmatrix}, \qquad (II)$$

причем эта площадь будет положительной или отрицательной в зависимости от направления обхода $i \to j \to k$. Для произвольной четверки $\langle ijk\ell \rangle$ между четырьмя площадями $S(ijk)$, $S(ij\ell)$, $S(ik\ell)$, $S(jk\ell)$, соответствующих всем упорядоченным по исходной четверке тройкам точек имеется очевидная функциональная связь:

$$S(ijk) - S(ij\ell) + S(ik\ell) - S(jk\ell) = 0 . \qquad (I2)$$

На первый взгляд, функция (II) задает на плоскости тернарную физическую структуру ранга 4, причем эта функция допускает 5-параметрическую группу движений - евклидовые движения и сдвиги. Однако

только наличие функциональной связи (I2), согласно определению, не является достаточным условием того, чтобы функция (II) задавала на плоскости тернарную физическую структуру. Необходимо еще, чтобы связь (I2) была порождающей в следующем смысле: всякая другая нетривиальная связь должна быть ее следствием. Покажем, что связь (I2) как раз этому-то условию и не удовлетворяет. Возьмем на плоскости пятерку точек $\langle ijk\ell p\rangle$, которой по функции (II) сопоставим десять площадей треугольников: $S(ijk)$, $S(ij\ell)$, $S(ijp)$, $S(ik\ell)$, $S(ikp)$, $S(i\ell p)$, $S(jk\ell)$, $S(jkp)$, $S(j\ell p)$, $S(k\ell p)$, соответствующих всем возможным тройкам точек, упорядоченных по исходной пятерке. Из этих десяти площадей по связи (I2) можно исключить четыре: $S(jk\ell)$, $S(jkp)$, $S(j\ell p)$, $S(k\ell p)$. Если связь (I2) порождающая, то оставшиеся шесть площадей

$$S(ijk),\ S(ij\ell),\ S(ijp),\ S(ik\ell),\ S(ikp),\ S(i\ell p) \qquad (I3)$$

должны быть независимыми. Тривиальной связи между ними быть не может, так как они являются функциями десяти координат пяти точек плоскости i,j,k,ℓ,p, но нетривиальная связь между ними, в действительности, есть, в чем можно убедиться из следующих простых соображений. Если бы этой связи не было, то пятиточечная фигура $\langle ijk\ell p\rangle$ в своем движении, сохраняющем все площади, имела бы только четыре степени свободы, так как на десять координат пяти ее точек было бы наложено шесть независимых связей, обусловленных инвариантностью шести площадей (I3). В действительности же, фигура $\langle ijk\ell p\rangle$, сохраняя все площади, может перемещаться по плоскости с пятью степенями свободы: одно вращение, два параллельных переноса и два сдвига. Установленное противоречие и доказывает, что между шестью площадями (I3) должна существовать дополнительная нетривиальная функциональная связь, не являющаяся следствием свя-

зи (I2), которая, таким образом, не может быть порождающей. Функция (II) не задает на плоскости $\mathcal{M} = R^2$ тернарную физическую структуру ранга 4 в смысле общего определения этого параграфа, несмотря на наличие функциональной связи (I2), так как ранг проекции отображения $F': \mathcal{M}^5 \to R^{10}$, задаваемой шестью площадями (I3) и не содержащей отображения $F: \mathcal{M}^4 \to R^6$, меньше шести, то есть не максимален.

В заключение отметим, что групповая симметрия бинарных физических структур, которым уделено основное внимание в настоящей диссертации, является определяющей. То есть функция f будет задавать физическую структуру в том и только в том случае, если она допускает нетривиальную конечномерную группу движений. Условие наделения физической структуры групповой симметрией определяет ее степень, устанавливая связь этой степени с размерностью множеств, рангом и порядком структуры соотношениями (7), (8) и (9), (I0). В то же время без предположения о групповой симметрии даже соотношения (7) и (9), в которых не фигурирует степень групповой симметрии, должны в исходных аксиомах оговариваться дополнительно, и потому в работе /40/ эти соотношения характеризуются как самое слабое и уязвимое место в определении физических структур.

Результаты §I Заключения опубликованы в работе /43/.

§ 2. Некоторые вопросы и замечания

В обеих главах диссертации рассматривались вещественные физические структуры. В первой части - однометрические на одном множестве, во второй - S -метрические на двух множествах. Совершенно очевидно, что групповая симметрия физических структур на одном множестве будет определяющей не только в однометрическом случае, но и в S-метрическом, так как изложенный в §§ I,2 гл.I метод сравнительно просто обобщается на этот последний. Произвольные физические структуры, определенные в §I Заключения, также вещественные.

В связи с содержательной интерпретацией комплексных физических структур в работах Ю.С.Владимирова /3I/, /32/, о чем более подробно сказано в конце §I гл.II, имеет смысл исследовать их независимо от вещественных. Ясно также, что комплексные однометрические физические структуры можно рассматривать как частный случай вещественных двуметрических. Поэтому, с одной стороны, некоторые результаты для комплексных структур можно получить комплексификацией соответствующих результатов для вещественных /30/, а с другой, по полным результатам для двуметрических вещественных физических структур, например, можно было бы установить феноменологические предпосылки происхождения комплексных чисел.

Феноменологически инвариантные метрики f оказались невырожденными двухточечными инвариантами групп преобразований. Задача их вычисления естественно предполагала предварительную классификацию групп преобразований с точностью до эквивалентности (см. §3 гл.II). Однако рассмотренные выше примеры (см. §§ 4, 5 гл.I и §§ 4, 5 гл.II) показывают, что с увеличением размерности множеств решение таких задач становится слишком громоздким и вряд ли может быть до-

ведена до конца, тем более что отсутствует полная классификация r -мерных алгебр Ли уже для $r > 6$. Поэтому естественно возникает вопрос, насколько необходимой является предварительная полная классификация групп преобразований с точностью до эквивалентности в каждом изоморфном классе. Действительно, для очень многих взаимных расширений групп преобразований двухточечные инварианты оказались вырожденными (см. §5 гл.I и §5 гл.II). Следовательно, имеет смысл предварительно установить структурные ограничения на группы преобразований, которые возникают из условия невырожденности двухточечного инварианта, чтобы не проводить их полной классификации. Например, для $n = 2$ еще можно провести полную классификацию трехмерных алгебр Ли преобразований плоскости (см. §4 гл. I), но уже для $n = 3$ задача полной классификации шестимерных алгебр Ли преобразований пространства оказывается за пределами физической возможности. В исследованиях В.Х.Льва /6/ для случая $n=3$ соответствующие ограничения естественно возникали по ходу исследования и использовались для нахождения феноменологически инвариантных метрик в R^3 , но эти ограничения носили частный характер. Поэтому для $n \geq 4$ и, тем более, для s -метрических физических структур и структур на двух множествах вопрос об общих ограничениях на группы преобразований, следующих из невырожденности двухточечного инварианта, остается открытым. В случае физических структур на двух множествах M^n и M^n (см.§2 гл.II, с.I60) имеет смысл и более частная задача установить, при каких размерностях ms и ns этих множеств двухточечные инварианты будут вырожденными для любой группы их преобразований размерности smn .

Отметим в конце, что все исходные определения и все результаты диссертации локальны. Их глобализация требует существенного развития основного метода исследования и является достаточно сложной и интересной задачей, значимость которой обусловлена приложе-

ниями теории физических структур в геометрии и физике.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа")//Об основаниях геометрии. -М.,I956.-С.402-434.

2. Кулаков Ю.И. Геометрия пространств постоянной кривизны как частный случай теории физических структур//Докл. АН СССР. -I970.-Т.I93,№5.-С.985-987.

3. Гельмгольц Г. О фактах, лежащих в основании геометрии// Об основаниях геометрии.-М.,I956.-С.366-388.

4. Михайличенко Г.Г. Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур//Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур.-Новосибирск:НГУ,I968.-С.I75-226.

5. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии//Докл. АН СССР.- I98I.-Т.260,№4.-С.803-805.

6. Лев В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур//Вычислительные системы.-Новосибирск:ИМ СОАН СССР,I988.-Вып. I25.-С.90-I03.

7. Пуанкаре А. Об основных гипотезах геометрии//Об основаниях геометрии.-М.,I956.-С.388-398.

8. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии//Докл. АН СССР.-I983.-Т.269,№2.-С.284-288.

9. Wene G.P. Comments of the geometry of Lie algebras and Lie-homotopic algebras // Hadronic J.-1985.-Vol.8, №2.-P.63-74.

I0. Кулаков Ю.И. О теории физических структур//Записки научных семинаров ЛОМИ.-Л.:Наука,I983.-Т.I27.-С.I03-I5I.

II. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии//Сиб.мат.журн.-I984.-Т.25,№5.-С.99-II3.

I2. Михайличенко Г.Г. Трехмерные алгебры Ли преобразований плоскости//Сиб.мат.журн.-I982.-Т.23,№5.-С.I32-I4I.

I3. Михайличенко Г.Г. Метрика плоскости как двухточечный инвариант/Ред."Сиб.мат.журн.".-I984.-38с.-Деп. в ВИНИТИ 30.I0.84, №6980-84. (Реферат//Сиб.мат.журн.-I985.-Т.26,№5.-С.I98).

I4. Михайличенко Г.Г. Феноменологическая и групповая симметрии в геометрии двух множеств (теории физических структур)//Докл. АН СССР.-I985.-Т.284,№I.-С.39-4I.

I5. Михайличенко Г.Г. Групповые свойства физических структур /Ред."Сиб.мат.журн.".-I989.-35с.-Деп. в ВИНИТИ I0.03.89,№I584-В89.(Реферат//Сиб.мат.журн.- I990.-Т.3I,№3.-С.2I0).

I6. Михайличенко Г.Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур//Докл. АН СССР.-I972.-Т.206,№5.-С.I056-I058.

I7. Михайличенко Г.Г. Группы движений в геометрии двух множеств//Всесоюзная конференция по геометрии "в целом",Новосибирск, сент.I987 г.:Тез. докл.-Новосибирск,I987.-С.85.

I8. Михайличенко Г.Г. Некоторые замечания об изоморфизме и подобии групп преобразований, их расширении и двухточечных инвариантах/Ред."Сиб.мат.журн.".-I987.-I3с.-Деп. в ВИНИТИ 29.05.87, №3858-В87.(Реферат//Сиб.мат.журн.-I989.-Т.30,№I.-С.223).

I9. Михайличенко Г.Г. Некоторые замечания к классификации Ли групп преобразований//Вест.МГУ.Сер.I.Математика,механика.-I986.-№5.-С.93.

20. Михайличенко Г.Г. Групповые свойства физической структуры ранга (3,3)/Ред."Сиб.мат.журн.".-I987.-22с.-Деп. в ВИНИТИ 29.05.87,№3855-В87. (Реферат//Сиб.мат.журн.-I989.-Т.30.-№I,С.222).

2I. Михайличенко Г.Г. Об одной задаче в теории физических структур//Сиб.мат.журн.-I977.-Т.I8,№5.-С.I342-I355.

22. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы.-М.:Наука,I973.-5I9 с.

23. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.-М.:Наука,1978.-400 с.

24. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований.-М.:ИЛ, 1947.-360 с.

25. Lie S., Engel F. Teorie der Transformations-gruppen, Bd 3.-Leipzig:Teubner, 1893.

26. Владимиров С.А. Группы симметрии дифференциальных уравнений и релятивистские поля.-М.:Атомиздат,1979.-167 с.

27. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. -М.:Наука,1966.-496 с.

28. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия.-М.:Наука,1969.-303 с.

29. Кулаков Ю.И. Элементы теории физических структур (дополнение Михайличенко Г.Г.).-Новосибирск:НГУ,1968.-226 с.

30. Михайличенко Г.Г., Лозицкий Е.Л. Простейшие двуметрические физические структуры//Вычислительные системы.-Новосибирск: ИМ,1988.-Вып.125.-С.88-89.

31. Владимиров Ю.С. Биспиноры и физическая структура ранга (3,3)//Вычислительные системы.-Новосибирск:ИМ СОАН СССР,1988.-Вып.125.-С.42-60.

32. Владимиров Ю.С. Описание взаимодействий в рамках теории физических структур//Вычислительные системы.-Новосибирск:ИМ СОАН СССР,1988.-Вып.125.-С.61-87.

33. Михайличенко Г.Г. Об одном функциональном уравнении с двухиндексными переменными//Укр.мат.журн.-1973.-Т.25,№5.-С. 589-598.

34. Михайличенко Г.Г. Решение некоторых функциональных уравнений, связанных с понятием физического закона:Дис. ... канд.физ.-мат.наук:01.01.01, 01.04.02.-Новосибирск, 1973.- 138 с.

35. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.-М.:Наука,1976.-576 с.

36. Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли.-М.:ГИТТЛ,1940.-396 с.

37. Бредон Г.Э. Введение в теорию компактных групп преобразований.-М.:Наука,1980.-440 с.

38. Михайличенко Г.Г. Тернарная физическая структура ранга (3,2)//Укр.мат.журн.-1970.-Т.22,№6.-С.837-841.

39. Михайличенко Г.Г. Тернарная физическая структура ранга (2,2,2)//Изв.вузов.Математика.-1976.-№8(171).-С.60-67.

40. Кулаков Ю.И. Новая формулировка теории физических структур//Вычислительные системы.-Новосибирск:ИМ СОАН СССР,1988.-Вып. 125.-С.3-32.

41. Михайличенко Г.Г. Групповая симметрия геометрии двух множеств//Укр.мат.журн.-1989.-Т.41,№11.-С.1501-1506.

42. Михайличенко Г.Г. Группы движений в геометрии двух множеств/Ред."Сиб.мат.журн."-1989.-18с.-Деп. в ВИНИТИ 26.09.89 №6016-В89. (Реферат//Сиб.мат.журн.-1990.-Т.31,№5.-С.204).

43. Михайличенко Г.Г. Групповые свойства произвольных физических структур// Вычислительные системы.-Новосибирск:ИМ,1990.-Вып. 135.-С.27-39.

44. Берже М. Геометрия.Т.1.-М.:Мир,1984.-560с.