

УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ЖУРНАЛ

ВИП. 6

ОКРЕМИЙ ВІДБИТОК

$\beta')$ якщо всі точки спектра оператора H з додатними дійсними частинами, то можна знайти таке $t_1 > t_0$, що

$$|x(t_1) - \xi_0| > \sigma'; \quad (13)$$

$\gamma')$ якщо спектральна множина оператора H вміщує точки як з додатними, так і з від'ємними дійсними частинами, то в σ'_0 -околі точки ξ_0 існує особливий точковий многовид $\mathcal{M}(t_0, \varepsilon)$ такий, що із співвідношення

$$x(t_0) \in \mathcal{M}(t_0, \varepsilon)$$

випливає справедливості нерівності (12), а з співвідношення

$$x(t_0) \notin \mathcal{M}(t_0, \varepsilon)$$

— справедливості нерівності (13)

Доведення цих теорем проводиться аналогічно схемі, викладеній в працях [3, 4], і буде наведено в іншій статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Филатов, Усреднение в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях, «Фан», УзССР, Ташкент, 1967
2. Ф. Рисси, Б. Секефальди и Надь, Лекция по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954
3. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963
4. З. Ф. Сирченко, Обобщение одной теоремы Н. Н. Боголюбова на случай гильбертова пространства, УМЖ, т. XVI, № 3, 1964

Надійшла 3 VI 1970 р

Інститут математики АН УРСР

УДК 517.948+519.55

Тернарна фізична структура рангу (3,2)

Г. Г. Михайличенко

В роботі [1] Ю. І. Кулаков запропонував абстрактну математичну модель відношень між множинами фізичних об'єктів. Ця модель, названа теорією фізичних структур, являє собою особливу метричну геометрію, побудовану на сім'ї множин. Для того щоб наочно уявити положення теорії, розглянемо окремий випадок тернарної фізичної структури рангу (3, 2) на двох множинах

$$\mathcal{M} = \{i, k, \dots, l, \dots\} \text{ і } \mathcal{N} = \{\alpha, \beta, \dots, \delta, \dots\}.$$

Рівняння теорії в цьому випадку будується так. Нехай прямий добуток $\mathcal{M}^2 \times \mathcal{N}$ однозначно відображається в множину дійсних чисел R :

$$\mathcal{M}^2 \times \mathcal{N} \rightarrow R, \quad (1)$$

тобто кожному елементу $(i, k; \alpha) \in \mathcal{M}^2 \times \mathcal{N}$ зіставляється число $a_{ik\alpha}$. Елементу $(i, k, l, \alpha, \beta) \in \mathcal{M}^3 \times \mathcal{N}^2$ при цьому зіставляється точка

$$(a_{ik\alpha}, a_{i'l\beta}, a_{il\alpha}, a_{i'l\beta}, a_{kl\alpha}, a_{kl\beta}) \in R^6 \quad (2)$$

в шестивимірному арифметичному просторі R^6 .

Підкреслимо, що відображення має вигляд $a_{ik\alpha} = a(x_{ik}, y_{i\alpha}, y_{k\alpha})$, де $x: \mathcal{M}^2 \rightarrow R$, $y: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow R$.

Вважатимемо, що на множинах $\mathcal{M}$ і $\mathcal{N}$ відображення (1) реалізує тернарну фізичну структуру рангу (3, 2), якщо сукупність точок (2) в R^6 для всіх елементів із $\mathcal{M}^3 \times \mathcal{N}^2$ утворює п'ятивимірний диференційовний

многовид Для цього повинна існувати досить гладка функція Φ від шести змінних така, що

$$\forall (i, k, l; \alpha, \beta) \in \mathfrak{M}^3 \times \mathfrak{N}^2,$$

$$\Phi(a_{ik\alpha}, a_{ik\beta}, a_{il\alpha}, a_{il\beta}, a_{kl\alpha}, a_{kl\beta}) = 0 \quad (3)$$

Можна також сказати, що многовид, заданий рівнянням (3), визначає фізичну структуру.

Припустимо однозначну розв'язність рівняння (3) щодо якого-небудь аргументу. Співвідношення (3), взагалі кажучи, може мати місце не при будь-якій функції Φ і не для будь-якого відображення (1) і тому являє собою рівняння особливого роду як для функції Φ , так і для відображення (1). Це рівняння називатимемо рівнянням фізичної структури

Дві структури, що реалізуються відображеннями $(i, k; \alpha) \rightarrow a_{ik\alpha}$ і $(i, k; \alpha) \rightarrow b_{ik\alpha}$, вважаються еквівалентними, якщо $b_{ik\alpha} = \psi(a_{ik\alpha})$, де ψ деяка строго монотонна функція.

Т е о р е м а. *Всяка тернарна фізична структура рангу (3, 2) еквівалентна структурі, що реалізується відображенням*

$$(i, k, \alpha) \rightarrow b_{ik\alpha} = x_{ik} + y_{i\alpha} - y_{k\alpha}, \quad (4)$$

де $x: \mathfrak{M}^2 \rightarrow R$, $y: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \rightarrow R$, і визначається многовидом

$$b_{ik\alpha} - b_{ik\beta} - b_{il\alpha} + b_{il\beta} + b_{kl\alpha} - b_{kl\beta} = 0. \quad (5)$$

Візьмемо в множині $\mathfrak{N}$ три довільних елементи α, β, γ і запишемо рівняння (3) для $(i, k, l; \alpha, \gamma)$, $(i, k, l; \beta, \gamma)$ у вигляді, розв'язаному щодо останнього аргументу:

$$a_{kl\gamma} = f(a_{ik\alpha}, a_{ik\gamma}, a_{il\alpha}, a_{il\gamma}, a_{kl\alpha}),$$

$$a_{kl\gamma} = f(a_{ik\beta}, a_{ik\gamma}, a_{il\beta}, a_{il\gamma}, a_{kl\beta}).$$

Покладаючи $a_{ik\gamma} = a$, $a_{il\gamma} = b$ і

$$\varphi(x, y, z) = f(x, a, y, b, z),$$

одержуємо один з можливих варіантів запису рівняння структури

$$\varphi(a_{ik\alpha}, a_{il\alpha}, a_{kl\alpha}) = \varphi(a_{ik\beta}, a_{il\beta}, a_{kl\beta}) \quad (6)$$

Візьмемо далі в множині $\mathfrak{M}$ чотири довільних елементи i, k, l, m і запишемо рівняння (3) для $(i, k, l; \alpha, \beta)$, $(i, k, m; \alpha, \beta)$, $(i, l, m; \alpha, \beta)$, $(k, l, m; \alpha, \beta)$ у вигляді, розв'язаному щодо останнього аргументу: у вигляді, розв'язаному щодо останнього аргументу:

$$a_{kl\beta} = f(a_{ik\alpha}, a_{ik\beta}, a_{il\alpha}, a_{il\beta}, a_{kl\alpha}),$$

$$a_{km\beta} = f(a_{ik\alpha}, a_{ik\beta}, a_{im\alpha}, a_{im\beta}, a_{km\alpha}), \quad (7)$$

$$a_{lm\beta} = f(a_{il\alpha}, a_{il\beta}, a_{im\alpha}, a_{im\beta}, a_{lm\alpha}),$$

$$a_{lm\beta} = f(a_{kl\alpha}, a_{kl\beta}, a_{km\alpha}, a_{km\beta}, a_{lm\alpha}).$$

Запроваджуючи позначення $x_1 = a_{il\alpha}$, $x_2 = a_{il\beta}$, $x_3 = a_{im\alpha}$, $x_4 = a_{im\beta}$, $x_5 = a_{lm\alpha}$, $y_1 = a_{ik\alpha}$, $y_2 = a_{ik\beta}$, $y_3 = a_{kl\alpha}$, $y_4 = a_{km\alpha}$, одержуємо функціональне рівняння для $f(s, t, u, v, w)$:

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \\ & = f[y_3, f(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3), y_4, f(y_1, y_2, x_3, x_4, y_4), x_5]. \end{aligned} \quad (8)$$

Продиференціюємо рівняння (3) за змінними $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2$, позначаючи f_s, f_t, f_u, f_v, f_w частинні похідні f за відповідними аргументами. Одержані рівності являють собою систему шести лінійних неоднорідних рівнянь щодо таких двох невідомих:

$$\begin{aligned} f_t[y_3, f(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3), y_4, f(y_1, y_2, x_3, x_4, y_4), x_5], \\ f_v[y_3, f(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3), y_4, f(y_1, y_2, x_3, x_4, y_4), x_5]. \end{aligned}$$

Для сумісності рівнянь необхідно, щоб кожен визначник третього порядку розширеної матриці системи

$$\left\| \begin{array}{ccc} f_s(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & f_u(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3) & 0 \\ f_t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & f_v(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3) & 0 \\ f_u(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & 0 & f_u(y_1, y_2, x_3, x_4, y_4) \\ f_v(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & 0 & f_v(y_1, y_2, x_3, x_4, y_4) \\ 0 & f_s(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3) & f_s(y_1, y_2, x_3, x_4, y_4) \\ 0 & f_t(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3) & f_t(y_1, y_2, x_3, x_4, y_4) \end{array} \right\| \quad (9)$$

дорівнював нулю.

Візьмемо в матриці (9) визначник, складений із перших трьох рядів, і прирівняємо його до нуля:

$$\left| \begin{array}{cc} f_s(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & f_u(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3) \\ f_t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & f_v(y_1, y_2, x_1, x_2, y_3) \end{array} \right| = 0. \quad (10)$$

Умова (10) являє собою уже функціонально-диференціальне рівняння для $f(s, t, u, v, w)$. Покладаючи в умові (10)

$$y_1 = a, y_2 = b, y_3 = c, x_1 = s, x_2 = t, x_3 = u, x_4 = v, x_5 = w,$$

одержуємо лінійне однорідне рівняння в частинних похідних

$$f_s(s, t, u, v, w) h_1(s, t) + f_t(s, t, u, v, w) h_2(s, t) = 0,$$

розв'язок якого знаходиться методом характеристик

$$f(s, t, u, v, w) = \theta[h(s, t), u, v, w]. \quad (11)$$

Підставимо розв'язок (11) в умову (10), запроваджуючи позначення змінних $x_1 = u, x_2 = v, y_1 = s, y_2 = t, y_3 = w$

$$\left| \begin{array}{cc} h_u(u, v) & \theta_u[h(s, t), u, v, w] \\ h_v(u, v) & \theta_v[h(s, t), u, v, w] \end{array} \right| = 0. \quad (12)$$

Розв'язок рівняння (12) також знаходиться методом характеристик

$$\theta[h(s, t), u, v, w] = \lambda[h(s, t), h(u, v), w]. \quad (13)$$

Розв'язок (13) підставимо у визначник, складений із першого, третього і п'ятого рядків матриці (9), і прирівняємо його до нуля. Покладаючи $y_3 = y_4 = a, y_1 = b, y_2 = c, h(x_1, x_2) = \xi, h(x_3, x_4) = \eta, x_5 = w$, одержуємо рівняння для $\lambda(\xi, \eta, w)$.

$$\lambda_\xi(\xi, \eta, w) q_1(\xi) + \lambda_\eta(\xi, \eta, w) q_1(\eta) = 0,$$

розв'язком якого є

$$\lambda(\xi, \eta, w) = \chi[q(\xi) - q(\eta), w].$$

Отже, для функції $f(s, t, u, v, w)$ маємо вираз

$$f(s, t, u, v, w) = \chi[\psi(s, t) - \psi(u, v), w], \quad (14)$$

де $\psi(s, t) = \varrho[h(s, t)]$.

Розв'язок (14) підставимо в рівняння (7).

$$\begin{aligned} a_{kl\beta} &= \chi[\psi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) - \psi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}), a_{kl\alpha}] \\ \text{або} \quad \psi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) - \psi(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) &= \theta(a_{kl\alpha}, a_{kl\beta}). \end{aligned} \quad (15)$$

Запишемо (15) для $(m, i, k; \alpha, \beta)$, $(m, i, l; \alpha, \beta)$, $(m, k, l; \alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} \psi(a_{m\alpha}, a_{m\beta}) - \psi(a_{m\alpha}, a_{m\beta}) &= \theta(a_{i\alpha}, a_{i\beta}), \\ \psi(a_{m\alpha}, a_{m\beta}) - \psi(a_{m\alpha}, a_{m\beta}) &= \theta(a_{i\alpha}, a_{i\beta}), \\ \psi(a_{m\alpha}, a_{m\beta}) - \psi(a_{m\alpha}, a_{m\beta}) &= \theta(a_{i\alpha}, a_{i\beta}), \end{aligned}$$

звідки легко знаходимо, що

$$\theta(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) - \theta(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) + \theta(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) = 0, \quad (16)$$

а також

$$a_{kl\beta} = \chi_2[\theta(a_{i\alpha}, a_{i\beta}) - \theta(a_{i\alpha}, a_{i\beta}), a_{kl\alpha}].$$

З другого боку, у відповідності з варіантом (6)

$$\begin{aligned} a_{kl\beta} &= \chi_1[\varphi(a_{i\alpha}, a_{i\alpha}, a_{kl\alpha}), a_{i\beta}, a_{i\beta}] \\ \text{і тому} \quad \chi_2[\theta(x, y) - \theta(s, t), u] &= \chi_1[\varphi(x, s, u), y, t], \end{aligned} \quad (17)$$

де $x = a_{i\alpha}, y = a_{i\beta}, s = a_{i\alpha}, t = a_{i\beta}, u = a_{kl\alpha}$.

Продиференціюємо рівність (17) за змінними x, s і розділимо один результат на другий.

$$\theta_x(x, y) = -\theta_s(s, t) \varphi_x(x, s, u) [\varphi_s(x, s, u)]^{-1}. \quad (18)$$

Права частина рівності (18) не залежить від змінної y , тому

$$\theta_{xy}(x, y) = 0, \quad \theta(x, y) = \psi(x) + \varphi(y),$$

де $\psi(x), \varphi(y)$ функції однієї змінної.

Рівняння (16) набуде вигляду

$$\psi(a_{i\alpha}) - \psi(a_{i\alpha}) + \psi(a_{kl\alpha}) = \varphi(a_{i\beta}) - \varphi(a_{i\beta}) + \varphi(a_{kl\beta}). \quad (19)$$

Записавши рівняння (19) для $(i, k, l; \alpha, \gamma)$, $(i, k, l; \beta, \gamma)$, знаходимо многовид, що визначає тернарну фізичну структуру рангу (3,2)

$$\psi(a_{i\alpha}) - \psi(a_{i\beta}) - \psi(a_{i\alpha}) + \psi(a_{i\beta}) + \psi(a_{kl\alpha}) - \psi(a_{kl\beta}) = 0. \quad (20)$$

Оскільки рівняння (20), що задає многовид однозначно розв'язне щодо $a_{kl\beta}$, функція ψ має однозначну обернену функцію ψ^{-1} і тому строго монотонна.

Можна одержати параметричне зображення відображення (1), яке реалізує розглядану структуру, якщо зафіксувати елементи $p \in \mathfrak{M}$, $\delta \in \mathfrak{N}$ і записати рівняння (20) для $(i, k, p; \alpha, \delta)$, запроваджуючи позначення

$$(i, k) \rightarrow \psi(a_{ik\delta}) = x_{ik}, \quad (i; \alpha) \rightarrow \psi(a_{i\rho\alpha}) - \psi(a_{i\rho\delta}) = y_{i\alpha}, \\ (i, k; \alpha) \rightarrow a_{ik\alpha} = \psi^{-1}(x_{ik} + y_{i\alpha} - y_{k\alpha}). \quad (21)$$

Зазначимо, що функція (21) перетворює рівняння (20) при підстановці в тотожність.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ю. И. Кулаков, Элементы теории физических структур, изд. Новосибирского госуниверситета, 1969

Надійшла 9 IX 1969 р.,

після переробки — 12 III 1970 р

Новосибірський державний університет

УДК 517.9

Задача типу Діріхле для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Б. Й. Пташник

Добре відомо, що для гіперболічних рівнянь крайові задачі з даними на всій границі області, взагалі кажучи, не є коректними. Однак вивченню задачі Діріхле, а також інших крайових задач для окремих гіперболічних рівнянь присвячено цілий ряд робіт [1—12], в яких при деяких умовах одержано певні позитивні результати.

В дисертації Л. Хермандера [13] доведено важливий результат про існування коректних постановок крайових задач для довільних диференціальних операторів із сталими коефіцієнтами, але Хермандер не вказує конкретні шляхи відшукування таких постановок.

В цій роботі вивчається одна крайова задача типу задачі Діріхле для гіперболічних рівнянь $2n$ -го порядку із сталими коефіцієнтами в паралелепіпеді.

1°. Нехай в $m+1$ -вимірному паралелепіпеді

$$\bar{R}_m = \bar{D}_m \times [0 \leq t \leq T], \quad \bar{D}_m = \{0 \leq x_p \leq \pi; p = 1, \dots, m\},$$

задано лінійне диференціальне рівняння

$$L[u] = Q\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right) u = f(t, x_1, \dots, x_m), \quad (1)$$

де $Q(\lambda, \eta_1, \dots, \eta_m)$ — однорідний многочлен степеня n відносно своїх аргументів із сталими дійсними коефіцієнтами, а функція $f(t, x_1, \dots, x_m)$ неперервна по t , N раз неперервно диференційовна по всіх просторових змінних (N — деяке, досить велике, натуральне число) і обертається в

нуль разом з усіма похідними на поверхні паралелепіпеда R_m за винятком гіперплощин $t=0$ і $t=T$. (Цю частину поверхні паралелепіпеда будемо називати «бічною» і позначати через Γ)

Припустимо, що оператор L — строго гіперболічний, тобто для довільного дійсного вектора $\eta \neq 0$ всі корені λ рівняння

$$Q(\lambda^2, \eta_1^2, \dots, \eta_m^2) = 0 \quad (2)$$