

Об одном функциональном уравнении с двухиндексными переменными

Г. Г. Михайличенко

В работе [1] Ю. И. Кулаков дал математическую формулировку теории физических структур. Эта теория приводит к функциональным уравнениям с двухиндексными переменными, методы решения которых рассматриваются в данной работе.

Пусть имеются два множества $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ и имеется также вещественная функция $a: \mathbb{M} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющая каждой паре (i, α) из прямого произведения $\mathbb{M} \times \mathbb{N}$ некоторое число $a_{i\alpha} = (i, \alpha) \in \mathbb{R}$. Два элемента $i, j \in \mathbb{M}$ будем считать совпадающими: $i = j$, если для любого $\alpha \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $(i, \alpha) = (j, \alpha)$. Если же найдется хотя бы одно такое α , что выполняется неравенство $(i, \alpha) \neq (j, \alpha)$, то элементы i, j будем считать различными: $i \neq j$. Аналогично определяются совпадение и различие элементов $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Будем предполагать, что в обоих множествах $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ все совпадающие элементы отождествлены.

В множествах $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ определим топологию, введя фундаментальные системы окрестностей. Пусть $i_0 \in \mathbb{M}$ — некоторый фиксированный элемент, который будем называть точкой, и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $P(i_0, \varepsilon)$ совокупность всех тех элементов $i \in \mathbb{M}$, для которых имеет место неравенство $|(i, \alpha) - (i_0, \alpha)| < \varepsilon$ при любом $\alpha \in \mathbb{N}$. Семейство всех множеств $P(i_0, \varepsilon)$ для всевозможных значений положительного числа ε образует фундаментальную систему окрестностей точки i_0 . Произвольной окрестностью $P(i_0)$ точки i_0 назовем всякое подмножество из $\mathbb{M}$, содержащее некоторую окрестность из фундаментальной системы. Аналогично вводится окрестность $Q(\alpha_0, \varepsilon)$ и фундаментальная система окрестностей точки $\alpha_0 \in \mathbb{N}$. Произвольную окрестность точки α_0 будем обозначать через $Q(\alpha_0)$. Нетрудно убедиться в том, что определенные выше системы окрестностей $P(i_0)$ и $Q(\alpha_0)$ удовлетворяют аксиомам окрестности и определяют на множествах $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ единственные топологические структуры. Топология в прямом произведении определяется естественным образом по топологии сомножителей. Элемент прямого произведения называется кортежем.

Пусть $\mathbb{M}^m = \mathbb{M} \times \mathbb{M} \times \dots \times \mathbb{M}$, $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$ — m - и n -кратные прямые произведения множеств $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$, где $m \geq n \geq 2$. Построим функцию $\mathbb{M}^m \times \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$, сопоставляя каждому кортежу $\mathbb{M}^m \times \mathbb{N}^n \ni (ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau)$ числовую матрицу размера $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} (i, \alpha) & (i, \beta) & (i, \gamma) & \dots & (i, \tau) \\ (j, \alpha) & (j, \beta) & (j, \gamma) & \dots & (j, \tau) \\ (k, \alpha) & (k, \beta) & (k, \gamma) & \dots & (k, \tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (v, \alpha) & (v, \beta) & (v, \gamma) & \dots & (v, \tau) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

рассматриваемую как точку m -мерного пространства R^m . Матрицу (1) удобнее выписывать в одну строку: $(ijk \dots v, \alpha \beta \gamma \dots \tau) \in R^m$. Назовем каноническими перестановками пространства R^m преобразования, соответствующие перестановкам строк и столбцов в матрице (1). Точки R^m , переходящие друг в друга при некоторой канонической перестановке, называются канонически сопряженными. Множество значений функции $\mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n \rightarrow R^m$ обозначим через N . Заметим, что множество N инвариантно относительно канонических перестановок. Кортеж считается недиагональным, если в нем различны все элементы из одного множества.

Говорят, что на множествах $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ задана бинарная физическая структура ранга (m, n) , если выполнены следующие условия.

А. Отображение $a[\beta \gamma \dots \tau]: \mathfrak{N} \rightarrow R^{n-1}$, задаваемое функцией $i \rightarrow (i, \beta \gamma \dots \tau) \in R^{n-1}$, открыто для любого недиагонального кортежа $(\beta \gamma \dots \tau) \in \mathfrak{N}^{n-1}$, где $\beta \neq \gamma \neq \dots \neq \tau$; отображение $a[jk \dots v]: \mathfrak{M} \rightarrow R^{m-1}$, определяемое функцией $\alpha \rightarrow (jk \dots v, \alpha) \in R^{m-1}$, открыто для любого недиагонального кортежа $(jk \dots v) \in \mathfrak{M}^{m-1}$, где $j \neq k \neq \dots \neq v$; отображение $\mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n \rightarrow N \subset R^m$ открыто.

В. Существует аналитическая функция Φ , определенная в R^m , такая, что множество $M \subset R^m$, задаваемое уравнением $\Phi = 0$, не пусто.

С. Градиент Φ отличен от нуля всюду на M за исключением, может быть, множества меры нуль относительно M .

Д. Множество N значений функции $\mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n \rightarrow R^m$ совпадает с M , т. е.

$$\Phi[(ijk \dots v, \alpha \beta \gamma \dots \tau)] = 0 \quad (2)$$

для любого кортежа $(ijk \dots v, \alpha \beta \gamma \dots \tau) \in \mathfrak{M}^m \times \mathfrak{N}^n$.

Поскольку исследование общего случая $m \geq n \geq 2$ требует достаточно большого объема изложения, в дальнейшем будем рассматривать частный случай $m \geq n = 3$, для которого и формулируется основной результат.

Теорема. Если тройка $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \rightarrow R)$ образует бинарную физическую структуру ранга $(m, 3)$, то в любых окрестностях $P(i_0)$, $Q(\alpha_0)$ произвольных точек $i_0 \in \mathfrak{M}$, $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$ найдутся элементы $i_1 \in P(i_0)$, $\alpha_1 \in Q(\alpha_0)$, в некоторых окрестностях $P(i_1)$, $Q(\alpha_1)$ которых функция $a: P(i_1) \times Q(\alpha_1) \rightarrow R$ и аналитическое множество значений функции $[P(i_1)]^m \times [Q(\alpha_1)]^3 \rightarrow R^m$ могут быть представлены в виде: а) для $m = 3$ $((i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i \xi_\alpha + y_i \eta_\alpha))$

$$\begin{vmatrix} \Psi[(i, \alpha)] & \Psi[(i, \beta)] & \Psi[(i, \gamma)] \\ \Psi[(j, \alpha)] & \Psi[(j, \beta)] & \Psi[(j, \gamma)] \\ \Psi[(k, \alpha)] & \Psi[(k, \beta)] & \Psi[(k, \gamma)] \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

а также $((i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i \xi_\alpha + y_i \eta_\alpha))$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \Psi[(i, \alpha)] & \Psi[(i, \beta)] & \Psi[(i, \gamma)] \\ 1 & \Psi[(j, \alpha)] & \Psi[(j, \beta)] & \Psi[(j, \gamma)] \\ 1 & \Psi[(k, \alpha)] & \Psi[(k, \beta)] & \Psi[(k, \gamma)] \end{vmatrix} = 0; \quad (4)$$

в) для $m = 4$ $((i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i \xi_\alpha + y_i \eta_\alpha + \theta_\alpha))$

$$\begin{vmatrix} \Psi[(i, \alpha)] & \Psi[(j, \beta)] & \Psi[(l, \gamma)] & 1 \\ \Psi[(j, \alpha)] & \Psi[(j, \beta)] & \Psi[(j, \gamma)] & 1 \\ \Psi[(k, \alpha)] & \Psi[(k, \beta)] & \Psi[(k, \gamma)] & 1 \\ \Psi[(l, \alpha)] & \Psi[(l, \beta)] & \Psi[(l, \gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

где $i, j, k, l \in P(i_1)$, $\alpha, \beta, \gamma \in Q(\alpha_1)$; Ψ — строго монотонная аналитическая функция одной переменной, определенная в некоторой окрестности точки $(i_1, \alpha_1) \in R$; Ψ^{-1} — обратная функция; $x_i, \xi_\alpha, y_i, \eta_\alpha, \theta_\alpha$ — независимые параметры; с) для $m \geq 5$ бинарные физические структуры ранга $(m, 3)$ не существуют.

Доказательство. Уравнение (2) для рассматриваемого случая $m \geq n = 3$ имеет вид

$$\Phi[(ijk \dots v, \alpha\beta\gamma)] = 0. \quad (2')$$

Из условия А следует, что отображение $a: \mathcal{M} \times \mathcal{R} \rightarrow R$ открыто и непрерывно по индуцированной на $\mathcal{M} \times \mathcal{R}$ топологии. В соответствии с этим же условием открыто и непрерывно отображение $\mathcal{M}^n \times \mathcal{R}^3 \rightarrow N \subset R^{3m}$.

Возьмем m произвольных точек $i_0, j_0, k_0, \dots, v_0$ из множества $\mathcal{M}$ и три произвольные точки $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ из множества $\mathcal{R}$. Пусть $P(i_0), P(j_0), P(k_0), \dots, P(v_0), Q(\alpha_0), Q(\beta_0), Q(\gamma_0)$ — любые окрестности этих точек. Множество N_0 значений функции $P(i_0) \times P(j_0) \times \dots \times P(v_0) \times Q(\alpha_0) \times Q(\beta_0) \times \dots \times Q(\gamma_0) \rightarrow R^{3m}$ содержит открытое относительно N подмножество. Из условий С и D следует, что найдется такой кортеж $\langle i_1 j_1 k_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \rangle$, где $i_1 \in P(i_0), j_1 \in P(j_0), \dots, v_1 \in P(v_0), \alpha_1 \in Q(\alpha_0), \beta_1 \in Q(\beta_0), \gamma_1 \in Q(\gamma_0)$, для которого в соответствующей точке $(i_1 j_1 k_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1) \in N_0$ градиент Φ не равен нулю. Это означает, что в самой точке и некоторой ее окрестности отлична от нуля хотя бы одна из частных производных функции Φ . Без ограничения общности можно предположить, что отлична от нуля производная функции Φ по первому аргументу (i, α) . Тогда по теореме о неявных функциях уравнение (2') может быть однозначно разрешено относительно (i, α) в некоторой окрестности $U = H \times V$ точки $(i_1 j_1 k_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1) \in R^{3m}$:

$$(i, \alpha) = \Gamma[(jk \dots v, \beta\gamma), (i, \beta\gamma), (jk \dots v, \alpha)], \quad (6)$$

где аналитическая функция Γ определена в $(3m - 1)$ -мерной окрестности V .

Уравнение (6) задает аналитическое подмножество $N_1 = U \cap N$. В силу непрерывности функции $a: \mathcal{M} \times \mathcal{R} \rightarrow R$ элементы $i, j, k, \dots, v$ и α, β, γ , для которых имеет место представление (6), образуют некоторые окрестности $P(i_1), P(j_1), P(k_1), \dots, P(v_1)$ и $Q(\alpha_1), Q(\beta_1), Q(\gamma_1)$ точек $i_1, j_1, k_1, \dots, v_1$ и $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ соответственно.

Покажем, что частная производная функции Γ по переменной (i, β) , например, отлична от нуля на множестве полной меры в окрестности V . Предположим, что $\Gamma_{(i, \beta)} = 0$ на множестве положительной меры. В силу аналитичности функции Γ и ее производных обращение в нуль будет тождественным. Т. е. $\Gamma_{(i, \beta)} = 0$ в окрестности V и функция Γ не зависит от переменной (i, β) :

$$(i, \alpha) = \Gamma_1[(jk \dots v, \beta\gamma), (i, \gamma), (jk \dots v, \alpha)]. \quad (6')$$

В окрестности $Q(\alpha_1)$ точки α_1 возьмем два различных элемента α_2, α_3 и запишем уравнение (6'), подставляя вместо α элементы α_2, α_3 :

$$(i, \alpha_2) = \Gamma_1[(jk \dots v, \beta\gamma), (i, \gamma), (jk \dots v, \alpha_2)],$$

$$(i, \alpha_3) = \Gamma_1[(jk \dots v, \beta\gamma), (i, \gamma), (jk \dots v, \alpha_3)].$$

В соответствии с условием А отображение $a[\alpha_2, \alpha_3]: \mathbb{M} \rightarrow R^2$, задаваемое функцией $i \rightarrow (i, \alpha_2, \alpha_3)$, открыто для недиагонального кортежа $\langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle \in \mathbb{R}^2$. Но это невозможно, так как две координаты (i, α_2, α_3) выражаются аналитически через один параметр (i, γ) . Т. е. множество точек $(i, \alpha_2, \alpha_3) \in R^2$ при фиксированных различных элементах α_2, α_3 и $i \in P(i_1)$ на самом деле есть множество нулевой меры в R^2 , следовательно, не открыто в R^2 противоречие с условием А. Таким образом, производная $\Gamma_{(i, \beta)}$ может обращаться в нуль только на множестве нулевой меры и на множестве полной меры в окрестности V отлична от нуля.

Производные функции Γ можно выразить через производные функции Φ , в частности,

$$\Gamma_{(i, \beta)} = -\Phi_{(i, \beta)'} / \Phi_{(i, \alpha)} \quad (7)$$

Между окрестностью $V \subset R^{3m-1}$ и множеством $N_1 = U \cap N$ существует, очевидно, взаимно однозначное соответствие. Поэтому множеству нулевой меры в V соответствует множество нулевой меры в N_1 . Учитывая связь (7) можно сказать, что производная $\Phi_{(i, \beta)}$ не обращается в нуль на множестве полной меры в N_1 . Это означает, что в N_1 существует точка, в которой $\Phi_{(i, \beta)} \neq 0$, и кроме того, что $\Phi_{(i, \alpha)} \neq 0$ всюду в N_1 . Аналогичные рассуждения можно провести относительно каждой переменной функции Φ .

В результате получаем, что в N_1 можно найти такую точку, в которой все производные функции Φ отличны от нуля. Если рассматривать также канонически сопряженные области N_1^* , то окончательный вывод будет следующим. Существуют множества $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{R}_1$, содержащие достаточно большое конечное число различных элементов, такие, что все значения функции $a: \mathbb{M}_1 \times \mathbb{R}_1 \rightarrow R$ различны и в каждой точке N , соответствующей недиагональному кортежу из $\mathbb{M}_1^n \times \mathbb{R}_1^2$, все производные функции Φ не обращаются в нуль. Поэтому в каждой такой точке возможно решение (6), причем функция Γ будет иметь отличную от нуля производную по каждой переменной.

Для сокращения записи в дальнейшем изложении введем оператор альтернирования $\hat{R}$, действие которого состоит в антисимметризации выражений, стоящих справа от оператора. Например, $\hat{R}(ij) \Psi[(i, \alpha)] = \Psi[(i, \alpha)] - \Psi[(j, \alpha)]$.

В окрестности $P(g_1)$ точки $g_1 \in \mathbb{M}_1$ возьмем элемент g и запишем уравнение (6) для кортежей $\langle gik \dots v, \alpha\beta\gamma \rangle$, $\langle gjk \dots v, \alpha\beta\gamma \rangle$:

$$(g, \alpha) = \Gamma[(ik \dots v, \beta\gamma), (g, \beta\gamma), (ik \dots v, \alpha)],$$

$$(g, \alpha) = \Gamma[(jk \dots v, \beta\gamma), (g, \beta\gamma), (jk \dots v, \alpha)],$$

откуда, приравнивая правые части, получаем соотношение

$$\hat{R}(ij) \Gamma[(ik \dots v, \beta\gamma), (g, \beta\gamma), (ik \dots v, \alpha)] = 0. \quad (8)$$

В соответствии с условием А отображение $a[\beta\gamma]: \mathbb{M} \rightarrow R^2$ открыто для любого недиагонального кортежа $\langle \beta\gamma \rangle \in \mathbb{R}^2$. Поэтому, если $g \in P(g_1)$, то аргументы $(g, \beta\gamma)$ можно рассматривать как две независимые переменные, по которым соотношение (8) является тождеством. Фиксируя переменные $(g, \beta\gamma)$ и вводя новое обозначение

$$\Omega[(ik \dots v, \alpha\beta\gamma)] = \Gamma[(ik \dots v, \beta\gamma), (g, \beta\gamma), (ik \dots v, \alpha)]|_{(g, \beta\gamma) = \text{const}},$$

получаем уравнение

$$\hat{R}(ij) \Omega[(ik \dots v, \alpha\beta\gamma)] = 0. \quad (9)$$

Здесь заметим, что фиксирование независимых переменных $(g, \beta\gamma)$ связывает только элемент $g \in P(g_1)$, не налагая никаких ограничений на элементы β, γ . Поэтому из множества $\mathcal{M}_1$ должен быть исключен элемент g_1 . Но поскольку $\mathcal{M}_1$ содержит достаточно большое число элементов, исключение некоторых из них, обычно имеющее место при фиксировании значения независимых переменных, несущественно.

Аналогично может быть получено второе уравнение

$$\hat{R}(\alpha\beta) \Xi[(ijk \dots v, \alpha\gamma)] = 0. \quad (10)$$

Уравнения (9) и (10) задают аналитическое множество N в окрестности каждой точки, соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{R}_1^3$. В силу обозначения функции Ω, Ξ аналитичны, имеют отличные от нуля производные по всем переменным, а также не обращаются в нуль все производные левых частей уравнений (9) и (10).

Разрешим уравнения (10) и (9) относительно аргумента (i, α) :

$$\begin{aligned} (i, \alpha) &= X \{ \Xi[(ijk \dots v, \beta\gamma)], (ijk \dots v, \gamma), (jk \dots v, \alpha) \}, \\ (i, \alpha) &= X_1 \{ \Omega[(ijk \dots v, \alpha\beta\gamma)], (ik \dots v, \beta\gamma), (k \dots v, \alpha) \}, \end{aligned} \quad (11)$$

куда получаем функциональное уравнение для X :

$$\begin{aligned} X \{ \Xi[(ijk \dots v, \beta\gamma)], (ijk \dots v, \gamma), (jk \dots v, \alpha) \} = \\ = X_1 \{ \Omega[(ijk \dots v, \alpha\beta\gamma)], (ik \dots v, \beta\gamma), (k \dots v, \alpha) \}. \end{aligned} \quad (12)$$

Продифференцируем уравнение (12) по переменным $(j, \beta), (j, \alpha)$, разделим один результат на другой и зафиксируем переменные $(jk \dots v, \beta)$:

$$\begin{aligned} X_\lambda[\lambda, (ijk \dots v, \gamma), (jk \dots v, \alpha)] A_1[\lambda, (ijk \dots v, \gamma)] + \\ + X_{(j, \alpha)}[\lambda, (ijk \dots v, \gamma), (jk \dots v, \alpha)] B_1[(ijk \dots v, \alpha\gamma)] = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\lambda = \Xi[(ijk \dots v, \beta\gamma)]_{(ijk \dots v, \beta)} = \text{const}$. Заметим, что между λ и (i, β) имеется взаимно однозначная связь, так как $\Xi_{(i, \beta)} \neq 0$. Поскольку $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$, уравнение (13) не имеет особых точек и может быть проинтегрировано методом характеристик:

$$\begin{aligned} X[\lambda, (ijk \dots v, \gamma), (jk \dots v, \alpha)] = \\ = X_2 \{ A[\lambda, (ijk \dots v, \gamma)] + B[(jk \dots v, \alpha\gamma)], (ijk \dots v, \gamma), (k \dots v, \alpha) \}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставим решение (14) в уравнение (11) и разрешим результат подстановки относительно суммы $A + B$:

$$\begin{aligned} A \{ \Xi[(ijk \dots v, \beta\gamma)], (ijk \dots v, \gamma) \} = -B[(jk \dots v, \alpha\gamma)] + \\ + \Theta_1[(ik \dots v, \alpha\gamma), (j, \gamma)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Сравнивая уравнения (10) и (15), получаем

$$\hat{R}(\alpha\beta) B[(jk \dots v, \alpha\gamma)] = \hat{R}(\alpha\beta) \Theta_1[(ik \dots v, \alpha\gamma), (j, \gamma)]. \quad (16)$$

Уравнение (16) запишем для кортежей $(igk \dots v, \alpha\beta\gamma), (jgk \dots v, \alpha\beta\gamma)$ и приравняем правые части:

$$\hat{R}(ij) \hat{R}(\alpha\beta) \Theta_1[(ik \dots v, \alpha\gamma), (g, \gamma)] = 0,$$

откуда, фиксируя независимую переменную (g, γ) , получаем

$$\hat{R}(ij) \hat{R}(\alpha\beta) \Theta[(ik \dots v, \alpha\gamma)] = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) является естественным следствием того, что одни и те же участки аналитического множества N задаются уравнениями (9) и (10). Любая производная левой части уравнения (17) отлична от нуля, поэтому его можно разрешить относительно любого аргумента.

Переставим в уравнении (17) элементы β, γ :

$$\hat{R}(ij) \hat{R}(\alpha\gamma) \Theta[(ik \dots v, \alpha\beta)] = 0. \quad (18)$$

Уравнения (17) и (18) определяют (i, α) как одну и ту же функцию переменных (i, β) . Сравнивая соответствующие частные производные, выраженные из неявных заданий (17) и (18), получаем

$$\frac{\Theta_{(i,\alpha)}[(ik \dots v, \alpha\beta)]}{\Theta_{(i,\alpha)}[(ik \dots v, \alpha\gamma)]} + \frac{\Theta_{(i,\beta)}[(ik \dots v, \alpha\beta)]}{\Theta_{(i,\beta)}[(ik \dots v, \beta\gamma)]} = \frac{\Theta_{(i,\beta)}[(ik \dots v, \gamma\beta)]}{\Theta_{(i,\beta)}[(ik \dots v, \beta\gamma)]}. \quad (19)$$

Равенство (19) есть функционально-дифференциальное уравнение для Θ . Зафиксируем в уравнении (19) переменные $(ik \dots v, \gamma)$:

$$\Theta_{(i,\alpha)}[(ik \dots v, \alpha\beta)] A_1[(ik \dots v, \alpha)] + \\ + \Theta_{(i,\beta)}[(ik \dots v, \alpha\beta)] A_1[(ik \dots v, \beta)] = B_1[(ik \dots v, \beta)], \quad (20)$$

причем $A_1 \neq 0$. Решение линейного неоднородного уравнения (20) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного. Это частное решение возьмем не зависящим от переменных $(ik \dots v, \alpha)$:

$$\Theta[(ik \dots v, \alpha\beta)] = B[(ik \dots v, \beta)] + \\ + P\{A[(ik \dots v, \alpha)] - A[(ik \dots v, \beta)], (k \dots v, \alpha\beta)\}, \quad (21)$$

где функции P и A имеют отличные от нуля производные по первому аргументу.

Подставим решение (21) в исходное уравнение (19), фиксируя переменные $(ik \dots v, \gamma)$ и вводя обозначения $x = A[(ik \dots v, \alpha)]$, $y = A[(ik \dots v, \beta)]$:

$$P'[x - y, (k \dots v, \alpha\beta)] = \frac{E[y, (k \dots v, \beta)]}{F[x, (k \dots v, \alpha)] - F[y, (k \dots v, \beta)]}. \quad (22)$$

Поскольку $P' \neq 0, \infty$, должно быть $E \neq 0$, $F[x, (k \dots v, \alpha)] - F[y, (k \dots v, \beta)] \neq 0$.

Продифференцируем равенство (22) по переменным x, y и сложим результаты:

$$\frac{E'[y, (k \dots v, \beta)]}{E[y, (k \dots v, \beta)]} = \frac{F'[x, (k \dots v, \alpha)] - F'[y, (k \dots v, \beta)]}{F[x, (k \dots v, \alpha)] - F[y, (k \dots v, \beta)]}. \quad (23)$$

Для функций E и F получаются из соотношения (23) уравнения

$$E'[y, (k \dots v, \beta)] = CE[y, (k \dots v, \beta)],$$

$$F'[x, (k \dots v, \alpha)] = C_1 + CF[x, (k \dots v, \alpha)],$$

где C и C_1 — некоторые постоянные. Полученные уравнения легко решаются:

$$E[y, (k \dots v, \beta)] = K[(k \dots v, \beta)] \exp Cy, \quad (24)$$

$$F[x, (k \dots v, \alpha)] = L[(k \dots v, \alpha)] \exp Cx - C_1/C. \quad (25)$$

В решениях (24), (25) возможен предельный переход $C \rightarrow 0$, при этом $CL \rightarrow C_1$. Из свойств функций E и F следует, что $K \neq 0$, $L[(k \dots v, \alpha)] \neq$

— $L[(k \dots v, \beta)] \neq 0$, если $CL = 0$. Подставим функции (24), (25) в выражение (22):

$$P'[x - y, (k \dots v, \alpha\beta)] = \frac{K[(k \dots v, \beta)]}{L[(k \dots v, \alpha)] \exp C(x - y) - L[(k \dots v, \beta)]}$$

и после интегрирования по переменной $(x - y)$

$$P[x - y, (k \dots v, \alpha\beta)] = \{K[(k \dots v, \beta)]/CL[(k \dots v, \beta)]\} \times \\ \times \ln \{L[(k \dots v, \alpha)] - L[(k \dots v, \beta)] \exp C(y - x)\} + C_2[(k \dots v, \alpha\beta)]. \quad (26)$$

Для функции (21), используя решение (26), получаем два выражения в зависимости от того, обращается в нуль произведение $CL[(k \dots v, \beta)]$ или нет. Выпишем эти два выражения, исключая аддитивные члены и множители, исчезающие при подстановке в уравнение (18):

$$\Theta[(ik \dots v, \alpha\beta)] = \frac{A[(ik \dots v, \alpha)] - A[(ik \dots v, \beta)]}{L[(k \dots v, \alpha)] - L[(k \dots v, \beta)]}, \quad (27)$$

$$\Theta[(ik \dots v, \alpha\beta)] = \ln \{\Lambda[(ik \dots v, \alpha)] - \Lambda[(ik \dots v, \beta)]\}, \quad (28)$$

где $\Lambda[(ik \dots v, \alpha)] = \{C^2 L[(k \dots v, \alpha)]\}^{-1} \exp \{-CA[(ik \dots v, \alpha)]\} - 1/CC_1$.

Можно показать, что уравнение (18) с функцией (27) несовместно по перестановкам элементов j, k , т. е. возникают противоречия. Функция Λ в выражении (28) аналитична, имеет отличную от нуля производную по первому аргументу. Возможен предельный переход $C \rightarrow 0$, когда $CL \rightarrow C_1 \neq 0$. Заметим также, что разности, стоящие под знаком логарифма в выражении (28), в нуль не обращаются.

Подставим функцию (28) в уравнение (18), записывая результат в форме определителя:

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(ikl \dots v, \alpha)] & \Lambda[(jkl \dots v, \alpha)] & 1 \\ \Lambda[(ikl \dots v, \beta)] & \Lambda[(jkl \dots v, \beta)] & 1 \\ \Lambda[(ikl \dots v, \gamma)] & \Lambda[(jkl \dots v, \gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (29)$$

Поскольку $m \geq 3$, переставим в уравнении (28) элементы j, k

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(ijl \dots v, \alpha)] & \Lambda[(kjl \dots v, \alpha)] & 1 \\ \Lambda[(ijl \dots v, \beta)] & \Lambda[(kjl \dots v, \beta)] & 1 \\ \Lambda[(ijl \dots v, \gamma)] & \Lambda[(kjl \dots v, \gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (30)$$

Уравнения (29) и (30) определяют неявно, например (i, α) как одну и ту же функцию переменной (i, β) . Сравнивая соответствующие частные производные, получаем

$$\hat{R}(jk) \frac{\Lambda_{(i,\alpha)}[(ikl \dots v, \alpha)]}{\Lambda_{(i,\beta)}[(ikl \dots v, \beta)]} \frac{\Lambda[(jkl \dots v, \beta)] - \Lambda[(jkl \dots v, \gamma)]}{\Lambda[(jkl \dots v, \alpha)] - \Lambda[(jkl \dots v, \gamma)]} = 0, \quad (31)$$

т. е. относительно Λ имеем функционально-дифференциальное уравнение. Методика решения уравнения (31) в общих чертах совпадает с той, которая применялась к уравнению (19), хотя и имеются специфические особенности.

Уравнение (31) имеет два независимых решения:

$$\Lambda[(ikl \dots v, \alpha)] = T[(il \dots v, \alpha)]/T[(kl \dots v, \alpha)], \quad (32)$$

$$\Lambda[(ikl \dots v, \alpha)] = \Pi[(il \dots v, \alpha)] - \Pi[(kl \dots v, \alpha)], \quad (33)$$

где $T[(il \dots v, \alpha)] \neq 0$, $T_{(i, \alpha)}[(il \dots v, \alpha)] \neq 0$, $\Pi_{(i, \alpha)}[(il \dots v, \alpha)] \neq 0$. Подставим решения (32) и (33) в уравнение (29):

$$\begin{vmatrix} T[(ilp \dots v, \alpha)] & T[(ilp \dots v, \beta)] & T[(ilp \dots v, \gamma)] \\ T[(jlp \dots v, \alpha)] & T[(jlp \dots v, \beta)] & T[(jlp \dots v, \gamma)] \\ T[(klp \dots v, \alpha)] & T[(klp \dots v, \beta)] & T[(klp \dots v, \gamma)] \end{vmatrix} = 0, \quad (34)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \Pi[(ilp \dots v, \alpha)] & \Pi[(ilp \dots v, \beta)] & \Pi[(ilp \dots v, \gamma)] \\ 1 & \Pi[(jlp \dots v, \alpha)] & \Pi[(jlp \dots v, \beta)] & \Pi[(jlp \dots v, \gamma)] \\ 1 & \Pi[(klp \dots v, \alpha)] & \Pi[(klp \dots v, \beta)] & \Pi[(klp \dots v, \gamma)] \end{vmatrix} = 0. \quad (35)$$

Пусть $m = 3$. Запишем уравнения (34) и (35) для кортежа $(ij_1k_1, \alpha\beta_1\gamma_1)$, разрешим относительно (i, α) и введем естественным образом параметры $x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha$:

$$(i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i \xi_\alpha + y_i \eta_\alpha), \quad (i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i \xi_\alpha + y_i \eta_\alpha)$$

где $\Psi(t) = T(t)$ или $\Psi(t) = \Pi(t)$ в окрестности точки $(i_1, \alpha_1) \in R$. Если предполагать далее, что $i, j, k \in P(i_1)$, $\alpha, \beta, \gamma \in Q(\alpha_1)$, где $i_1 \in P(i_0)$, $\alpha_1 \in Q(\alpha_0)$, то получаем уравнения (3) и (4), задающие аналитическое множество значений функции $[P(i_1)]^3 \times [Q(\alpha_1)]^3 \rightarrow R^6$.

Можно показать, что для $m \geq 4$ уравнение (35) оказывается несовместным по перестановке элементов k, l и поэтому остается только уравнение (34). Заметим, что производные левой части уравнения (34) в нуль не обращаются.

Переставим в уравнении (34) элементы k, l :

$$\begin{vmatrix} T[(ikp \dots v, \alpha)] & T[(ikp \dots v, \beta)] & T[(ikp \dots v, \gamma)] \\ T[(jlp \dots v, \alpha)] & T[(jlp \dots v, \beta)] & T[(jlp \dots v, \gamma)] \\ T[(klp \dots v, \alpha)] & T[(klp \dots v, \beta)] & T[(klp \dots v, \gamma)] \end{vmatrix} = 0. \quad (36)$$

Уравнения (34) и (36) определяют (i, β) как одну и ту же функцию переменных (i, α) . Отсюда для T получаем функционально-дифференциальное уравнение

$$\hat{R}(kl) \{T_{(i, \alpha)}[(ilp \dots v, \alpha)]/T_{(i, \beta)}[(ilp \dots v, \beta)]\} \times \\ \times \frac{T[(jlp \dots v, \beta)] T[(klp \dots v, \gamma)] - T[(jlp \dots v, \gamma)] T[(klp \dots v, \beta)]}{T[(jlp \dots v, \alpha)] T[(klp \dots v, \gamma)] - T[(jlp \dots v, \gamma)] T[(klp \dots v, \alpha)]} = 0,$$

которое решается так же, как и уравнение (31):

$$T[(ilp \dots v, \alpha)] = \Delta[(ilp \dots v, \alpha)] - \Delta[(lp \dots v, \alpha)]. \quad (37)$$

В отличие от уравнения (31) здесь имеется всего одно решение. Аналитическая функция $\Delta[(ilp \dots v, \alpha)]$ имеет отличную от нуля производную $\Delta_{(i, \alpha)}[(ilp \dots v, \alpha)]$.

Подставим решение (37) в определитель (34):

$$\begin{vmatrix} \Delta[(ipq \dots v, \alpha)] & \Delta[(ipq \dots v, \beta)] & \Delta[(ipq \dots v, \gamma)] & 1 \\ \Delta[(jpq \dots v, \alpha)] & \Delta[(jpq \dots v, \beta)] & \Delta[(jpq \dots v, \gamma)] & 1 \\ \Delta[(kpq \dots v, \alpha)] & \Delta[(kpq \dots v, \beta)] & \Delta[(kpq \dots v, \gamma)] & 1 \\ \Delta[(lpq \dots v, \alpha)] & \Delta[(lpq \dots v, \beta)] & \Delta[(lpq \dots v, \gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (38)$$

Пусть $m = 4$. Запишем уравнение (38) для кортежа $\langle i, j, k, l, \alpha, \beta, \gamma \rangle$, разрешим относительно (i, α) , вводя параметры $x_i, y_i, \xi_\alpha, \eta_\alpha, \theta_\alpha$: $(i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i \xi_\alpha + y_i \eta_\alpha + \theta_\alpha)$, где $\Psi(t)$ — строго монотонная аналитическая функция, определенная в окрестности точки $(i_1, \alpha_1) \in R$. Если считать, что $i, j, k, l \in P(i_1), \alpha, \beta, \gamma \in Q(\alpha_1)$, то множество значений функции $[P(i_1)]^4 \times [Q(\alpha_1)]^3 \rightarrow R^{12}$ будет, очевидно, задаваться уравнением (5).

В дальнейшем будем предполагать, что $m \geq 5$. Переставим в уравнении (38) элементы l, p :

$$\begin{vmatrix} \Delta[(ilq \dots v, \alpha)] & \Delta[(ilq \dots v, \beta)] & \Delta[(ilq \dots v, \gamma)] & 1 \\ \Delta[(jlq \dots v, \alpha)] & \Delta[(jlq \dots v, \beta)] & \Delta[(jlq \dots v, \gamma)] & 1 \\ \Delta[(klq \dots v, \alpha)] & \Delta[(klq \dots v, \beta)] & \Delta[(klq \dots v, \gamma)] & 1 \\ \Delta[(plq \dots v, \alpha)] & \Delta[(plq \dots v, \beta)] & \Delta[(plq \dots v, \gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (39)$$

Уравнения (38) и (39) определяют неявно (i, α) как одну и ту же функцию переменной (i, β) . Сравнивая частные производные, получаем

$$\hat{R}(lp) \frac{\Delta_{(i, \alpha)}[(ipq \dots v, \alpha)] \bar{\Delta}[(ipq \dots v, \alpha)]}{\Delta_{(i, \beta)}[(ipq \dots v, \beta)] \bar{\Delta}[(ipq \dots v, \beta)]} = 0, \quad (40)$$

где $\bar{\Delta}$ означает алгебраическое дополнение в определителях (38) и (39) к соответствующим элементам. В равенстве (40) зафиксируем все переменные, кроме $(ipq \dots v, \alpha)$:

$$\Delta_{(i, \alpha)}[(ipq \dots v, \alpha)] = A_{(i, \alpha)}[(iq \dots v, \alpha)] B[(pq \dots v, \alpha)],$$

причем $A_{(i, \alpha)} \neq 0, B \neq 0$, так как $\Delta_{(i, \alpha)} \neq 0$. После интегрирования по переменной (i, α) переходим к следующему выражению для функции Δ :

$$\Delta[(ipq \dots v, \alpha)] = A[(iq \dots v, \alpha)] B[(pq \dots v, \alpha)] + C[(pq \dots v, \alpha)]. \quad (41)$$

Подставим функцию (41) в определитель (38). Аддитивный член C исчезает в линейной комбинации со столбцом из единиц. Ненулевой множитель B может быть вынесен из первых трех столбцов:

$$\begin{vmatrix} A[(iq \dots v, \alpha)] & A[(iq \dots v, \beta)] & A[(iq \dots v, \gamma)] & 1 \\ A[(jq \dots v, \alpha)] & A[(jq \dots v, \beta)] & A[(jq \dots v, \gamma)] & 1 \\ A[(kq \dots v, \alpha)] & A[(kq \dots v, \beta)] & A[(kq \dots v, \gamma)] & 1 \\ A[(lq \dots v, \alpha)] & A[(lq \dots v, \beta)] & A[(lq \dots v, \gamma)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (42)$$

В соотношение (42) не входят переменные $(p, \alpha, \beta, \gamma)$, поэтому оно является тождеством по всем остальным переменным. Продифференцируем соотношение (42) по переменным $(i, \alpha), (j, \beta), (k, \gamma)$:

$$A_{(i, \alpha)}[(iq \dots v, \alpha)] A_{(j, \beta)}[(jq \dots v, \beta)] A_{(k, \gamma)}[(kq \dots v, \gamma)] = 0,$$

что противоречит условию необращения в нуль каждого из сомножителей. Установленное противоречие доказывает, что уравнение (38) несовместно по перестановке элементов l, p . Это означает, что для $m \geq 5$ физические структуры ранга $(m, 3)$ не существуют.

В заключение отметим, что предложенный в данной работе метод был использован для рассмотрения бинарных физических структур произвольного ранга (m, n) . Установлено, что физические структуры существуют

только для $m = n \geq 2$, $m = n + 1 \geq 3$, $m = n + 2 = 4$ и не существуют для всех остальных пар значений целых чисел m и n . Полная сводка результатов приведена в работе [2].

Автор выражает искреннюю признательность Ю. Г. Решетняку за многочисленные полезные замечания и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Кулаков, Математическая формулировка теории физических структур, Сиб. матем. ж., т. 12, № 5, 1971.
2. Г. Г. Михайличенко, Решение функциональных уравнений в теории физических структур, ДАН СССР, т. 206, № 5, 1972.

Поступила в печать 5.V 1970 г.,
после переработки — 15.XI 1972 г.
Новосибирский государственный университет