

GÉOMÉTRIE. — *Géométries à deux dimensions dans la théorie de structures physiques.*
Note (*) de **G. G. Mikhaylitchenko**, présentée par Serge Sobolev.

On détermine toutes les géométries métriques de dimension 2 pour lesquelles les distances de six points sont liées par une relation fonctionnelle.

In this work are given all metrics for two-dimensional geometries in which six mutual distances for arbitrary four points are functionally connected.

Comme on sait, les six distances mutuelles des quatre points arbitraires du plan euclidien satisfont à une relation dont l'interprétation géométrique est que le volume d'un tétraèdre aux sommets dans le plan est zéro. D'après les résultats de la géométrie des distances (voir p. ex., [1]), si l'on a la même relation pour quatre points quelconques d'un espace métrique $\mathcal{M}$, alors $\mathcal{M}$ est isométrique à un ensemble du plan. On a des théorèmes analogues pour les autres espaces de courbure constante, celui de Lobatchevsky et sphérique.

Le résultat principal de cette Note est l'établissement du fait que l'existence même d'une dépendance satisfaite par les six distances des quatre points quelconques de l'espace, sans aucune précision de la forme de cette dépendance, suffit à définir la géométrie de l'espace, d'une manière assez stricte. Les relations auxquelles les distances doivent satisfaire et la métrique sont soumis à quelques suppositions générales se réduisant essentiellement à la différentiabilité des fonctions et l'indépendance d'équations. Nous avons ici une application du principe de symétrie phénoménologique proposé par Y. I. Kulakov [2].

Il est à noter que la question ainsi posée peut être décelée dans le travail célèbre de H. Helmholtz *Sur les phénomènes qui sont à la base de la géométrie* [3]. L'idée avancée est que la géométrie de l'espace n -dimensionnel est définie par l'existence de solides mobiles à $n(n+1)/2$ degrés de liberté. Donc, les distances mutuelles des $n+2$ points du solide doivent satisfaire à une relation, parce que dans le cas contraire le nombre de degrés de liberté eut été réduit d'une unité. Dans le plan ($n=2$) on a trois degrés de liberté pour les solides et une relation pour la distance de quatre points quelconques.

D'une manière précise, soit $\mathcal{M}$ un ensemble quelconque et $a(x, y)$ une fonction réelle définie pour couple de points différents $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{M}$. La fonction a peut être considérée comme une sorte de métrique sur $\mathcal{M}$, sans exiger que les axiomes habituels soient vérifiés. Admettons la condition suivante :

I. Si $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{M}$ sont tels que pour chaque $z \in \mathcal{M}$ on a :

$$a(x, z) = a(y, z) \quad \text{et} \quad a(z, x) = a(z, y),$$

alors $x = y$.

Munissons l'ensemble $\mathcal{M}$ de la plus faible topologie dans laquelle la fonction a est continue. Soit $P(x)$ un voisinage du point $x \in \mathcal{M}$ dans cette topologie (hausdorffienne, d'après I).

La représentation $\mathcal{A} : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}^6$ qui fait correspondre à chaque quadruple $(x, y, z, t) \in \mathcal{M}^4$ le point $\langle a(x, y), a(x, z), a(x, t), \dots, a(z, t) \rangle \in \mathbb{R}^6$ a pour image $\mathcal{N} = \mathcal{A}(\mathcal{M}^4)$. Admettons deux conditions supplémentaires :

II. L'ensemble des paires $(x, y) \in \mathcal{M}^2$ pour lesquelles les représentations :

$$z \rightarrow \langle a(z, x), a(z, y) \rangle \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad z \rightarrow \langle a(x, z), a(y, z) \rangle \in \mathbb{R}^2$$

sont ouvertes est dense dans $\mathcal{M}^2$.

III. Il existe une fonction $\Phi : \varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^4 , définie dans un domaine $\varepsilon \subset \mathbb{R}^6$, telle que $\mathcal{N}$ est un sous-ensemble ouvert de l'ensemble défini par l'équation $\Phi = 0$, c'est-à-dire :

$$(*) \quad \Phi(a(x, y), a(x, z), a(x, t), a(y, z), a(y, t), a(z, t)) = 0,$$

pour tout quadruple $(x, y, z, t) \in \mathcal{M}^4$.

IV. La représentation $\mathcal{A} : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathcal{N}$ est ouverte dans la topologie de $\mathcal{N}$ induite par $\mathbb{R}^6$.

V. L'ensemble des points de ε où toutes les dérivées du premier ordre de Φ sont différentes de zéro est dense dans $\mathcal{N}$.

Le sens de la condition I est que toutes les propriétés considérées de l'espace $\mathcal{M}$ doivent s'exprimer à l'aide de la fonction a . La condition II sert à assurer que $\mathcal{M}$ soit une variété à deux dimensions, et est, certainement, plus faible que cette dernière assertion. La condition III, qui est la plus essentielle, exprime le principe de symétrie phénoménologique, introduit par Y. I. Kulakov, dans le cadre général de la théorie des structures physiques [4] comme une méthode de classification de lois physiques.

Cette condition exige que les six distances de quatre points quelconques soient dépendantes. Les conditions IV et V expriment que la représentation $\mathcal{A}$ doit être, en quelque sorte, non dégénérée : d'après IV, l'image d'un voisinage de $\mathcal{M}^4$ n'a jamais dimension inférieure à $\mathcal{N}$, tandis que V signifie, sommairement, qu'il existe des quadruples en position générale.

DÉFINITION. — Si les conditions I-V sont satisfaites, on dit que la fonction $a : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ définit une géométrie deux-dimensionnelle (structure physique) de rang 4 sur $\mathcal{M}$.

Les géométries définies sur $\mathcal{M}$ par les fonctions a et b sont considérées comme équivalentes si $b(x, y) = \Psi(a(x, y))$, où Ψ est une fonction d'une variable.

THÉORÈME. — Si une fonction $a : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ définit une géométrie deux-dimensionnelle de rang 4 sur un ensemble $\mathcal{M}$, alors pour un sous-ensemble des paires (x, y) dense dans $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ on peut introduire des coordonnées x_1, x_2 et y_1, y_2 dans un voisinage $P(x) \times P(y)$ de (x, y) de telle sorte que la métrique $a(x, y)$ s'y exprime, à une équivalence près, par l'une des formules suivantes :

$$(1) \quad a(x, y) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2,$$

$$(2) \quad a(x, y) = \cos x_2 \cos y_2 \cos(x_1 - y_1) + \sin x_2 \sin y_2,$$

$$(3) \quad a(x, y) = \operatorname{sh} x_2 \operatorname{sh} y_2 \cos(x_2 - y_1) - \operatorname{ch} x_2 \operatorname{ch} y_2,$$

$$(4) \quad a(x, y) = (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2,$$

$$(5) \quad a(x, y) = \operatorname{ch} x_2 \operatorname{ch} y_2 \cos(x_1 - y_1) - \operatorname{sh} x_2 \operatorname{sh} y_2,$$

$$(6) \quad a(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

$$(7) \quad a(x, y) = (x_1 - y_1)^\alpha (x_2 - y_2)^\beta,$$

$$(8) \quad a(x, y) = (x_1 - y_1)/(x_2 - y_2) + \ln(x_2 - y_2),$$

$$(9) \quad a(x, y) = \ln((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2) + \gamma \operatorname{arctg}((x_1 - y_1)/(x_2 - y_2)),$$

$$(10) \quad a(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + \delta_x x_2^2 + \delta_y y_2^2)/x_2 y_2,$$

avec $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq 0$; δ_x, δ_y étant constantes dans $P(x), P(y)$ et $\delta_x, \delta_y = 0$ ou ± 1 .

Les expressions (1)-(7) définissent les métriques des géométries bien connues : euclidienne (1), sphérique (2), de Lobatchevsky (3), de Minkowski (4), d'un hyperboloïde à une nappe (5), du plan symplectique (6), du plan simplicial (7).

Les métriques définies par les expressions (8)-(10) n'ont pas, jusqu'à présent, été considérées en géométrie, semble-t-il.

Il est à noter que (10) définit une géométrie sur un espace non connexe, sur les composantes duquel on obtient ou la géométrie du plan symplectique ($\delta_x = \delta_y = 0$), ou celle du plan de Lobatchevsky ($\delta_x = \delta_y = +1$), ou bien celle d'un hyperboloïde à une nappe ($\delta_x = \delta_y = -1$). On pourrait introduire, par analogie, un système d'axiomes pour la géométrie de distances n -dimensionnelle phénoménologiquement invariante de rang $n+2$; jusqu'à présent seuls les cas $n=1$ [5] et $n=2$ ont été étudiés. Il y a quelque raison de croire que pour $n \geq 3$ les seules métriques possibles sont celles qui généralisent (1)-(6) et (10), tandis que les métriques (7), (8) et (9) sont spécifiques pour la géométrie deux-dimensionnelle. Il faut noter l'apparition des espaces symplectiques de dimension impaire, dont la métrique ne peut pas être obtenue à partir d'un espace linéaire [2] : la métrique de l'espace symplectique à trois dimensions définie par $a(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 - y_3$.

L'auteur est reconnaissant à Y. G. Rechetniak, qui a stimulé les recherches sur la géométrie phénoménologiquement invariante et suivi son travail avec une attention constante, et A. D. Alexandrov, de l'Académie de Sciences de l'U.R.S.S., pour ses remarques nombreuses qui ont beaucoup contribué au perfectionnement du texte.

(*) Remise le 21 septembre 1981.

[1] L. M. BLUMENTHAL, *Theory and Application of Distance Geometry*, Oxford, 1953.

[2] Y. I. KULAKOV, *La géométrie de l'espace à courbure constante considérée comme cas particulier de la théorie des structures physiques* (DAN, 193, n° 5, 985, 1970).

[3] H. HELMHOLTZ, *En ce qui concerne les faits exposés dans les fondements de la géométrie*, d'après *Des fondements de la géométrie*, M., 1956, p. 336.

[4] Y. I. KULAKOV, *Les éléments de la théorie des structures physiques*, Novosibirsk, 1968.

[5] G. G. MIKHAYLITCHENKO, *Appendice mathématique dans* [4], p. 200-205.

Novosibirsk, Institut Pédagogique d'État
et ul. Zhemtchuzhnaya, 10, app. 14,
630090, Novosibirsk, U.R.S.S.