

Г. Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ
В ТЕОРИИ ФИЗИЧЕСКИХ СТРУКТУР

В исследованиях по основаниям физики Ю. И. Кулаковым ^(1, 2) была предложена математическая модель строения физического закона. Эта модель под наименованием бинарной физической структуры ранга (m, n) для простейших случаев $m=n=2$ и $m=n+1=3$ была рассмотрена в работах ⁽³⁻⁵⁾ методом параметризации. В настоящей работе дается более совершенная формулировка аксиом физической структуры и применяется функциональный метод, предложенный автором ⁽⁶⁾. Ввиду большого объема изложения полное доказательство проведено для $m \geq n=2$ (§ 2).

§ 1. Математическая формулировка теории
физических структур

Наглядно понятие физической структуры может быть описано следующим образом. Пусть даны произвольные множества $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ и функция $a: \langle i, \alpha \rangle \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow a_{i\alpha} \in R$. Пусть, далее, $m \geq n \geq 2$ — целые. Будем говорить, что тройка $\langle \mathcal{M}, \mathcal{N}, a \rangle$ образует *бинарную физическую структуру ранга (m, n)* , если для любых элементов $i_1, i_2, \dots, i_m \in \mathcal{M}$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathcal{N}$ выполняется уравнение $\Phi(a_{i_1\alpha_1}, a_{i_1\alpha_2}, \dots, a_{i_m\alpha_n}) = 0$. На множества $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ и функции a , Φ вводятся некоторые достаточно естественные ограничения, без которых в математическом отношении задача, по-видимому, оказывается бессодержательной. Приведем точные формулировки.

Пусть даны множества $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ и функция $a: \langle i, \alpha \rangle \rightarrow a_{i\alpha} \in R$. Из соображений удобства в дальнейшем вместо $a_{i\alpha}$ будем писать (i, α) .

Определение 1. Два элемента $i, j \in \mathcal{M}$ (соответственно $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$) считаются *эквивалентными*, если для любого $\gamma \in \mathcal{N}$ (соответственно $k \in \mathcal{M}$) имеет место равенство $(i, \gamma) = (j, \gamma)$ (соответственно $(k, \alpha) = (k, \beta)$).

Будем предполагать, что по введенному отношению эквивалентности множества $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ факторизованы.

Определение 2. Элемент $\tilde{i} \in \mathcal{M}$ (соответственно $\tilde{\alpha} \in \mathcal{N}$) называется *квазинулевым по отношению к $\mathcal{N}$* (соответственно $\mathcal{M}$), если множество значений функции $a: \{\tilde{i}\} \times \mathcal{N} \rightarrow R$ (соответственно $a: \mathcal{M} \times \{\tilde{\alpha}\} \rightarrow R$) конечно.

Обозначим через $\tilde{\mathcal{M}}$, $\tilde{\mathcal{N}}$ множества квазинулевых элементов. Будем предполагать, что они конечны и $\mathcal{M} \setminus \tilde{\mathcal{M}}$, $\mathcal{N} \setminus \tilde{\mathcal{N}}$ не пусты.

Определение 3. Множество $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ (соответственно $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$) называется *ограниченным*, если оно является объединением конечного числа его подмножеств $\mathcal{M}'_p$ (соответственно $\mathcal{N}'_q$), для каждого из которых су-

существует такое $\alpha_p \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ (соответственно $i_q \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$), что множество значений функции $a: \mathcal{M}_p \times \{\alpha_p\} \rightarrow R$ (соответственно $a: \{i_q\} \times \mathcal{N}_q \rightarrow R$) ограничено.

Ясно, что всякое конечное подмножество ограничено и что объединение конечного числа ограниченных множеств ограничено.

Топологию в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ определим, задавая фундаментальные системы окрестностей. Пусть $i_0 \in \mathcal{M}$, $\mathcal{N}'$ — ограниченное множество и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $P(i_0, \mathcal{N}', \varepsilon)$ множество всех $i \in \mathcal{M}$, для которых $|(i, \alpha) - (i_0, \alpha)| < \varepsilon$ при любом $\alpha \in \mathcal{N}'$. Семейство всех $P(i_0, \mathcal{N}', \varepsilon)$ для всевозможных ограниченных множеств $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ и любых значений $\varepsilon > 0$ примем за фундаментальную систему окрестностей точки i_0 . Пересечение любых двух множеств $P(i_0, \mathcal{N}'_1, \varepsilon_1)$, $P(i_0, \mathcal{N}'_2, \varepsilon_2)$ содержит множество $P(i_0, \mathcal{N}'_1 \cup \mathcal{N}'_2, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$. Заметим, что если $\mathcal{N}'$ содержит хотя бы один элемент из $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$, то окрестность $P(i_0, \mathcal{N}', \varepsilon)$ является ограниченным множеством.

Задание фундаментальной системы окрестностей для каждой точки множества $\mathcal{M}$ (и аналогично $\mathcal{N}$) известным образом определяет топологию ((7), с. 20). Отделимость этой топологии (в смысле Хаусдорфа) вытекает из следующих соображений. Поскольку всякое конечное множество ограничено, построенная в $\mathcal{M}$ топология мажорирует слабейшую, при которой непрерывны все частичные отображения $a: \mathcal{M} \times \{\alpha\} \rightarrow R$ для любого $\alpha \in \mathcal{N}$. Если $i \neq j$, то найдется такой элемент $\alpha \in \mathcal{N}$, что $(i, \alpha) \neq (j, \alpha)$, т. е. для любых двух различных элементов $i, j \in \mathcal{M}$ существует непрерывное отображение $a: \mathcal{M} \times \{\alpha\} \rightarrow R$ множества $\mathcal{M}$ в отделимое пространство R , при котором образы элементов i, j различны. Но тогда топология в $\mathcal{M}$ (аналогично, в $\mathcal{N}$) будет отделимой ((7), с. 109). В дальнейшем под $P(i_0)$, $Q(\alpha_0)$ будем понимать открытые окрестности точек $i_0 \in \mathcal{M}$, $\alpha_0 \in \mathcal{N}$. Топология в $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ определяется как произведение топологий пространств-сомножителей.

Предложение 1. Каждая точка $i \in \mathcal{M}$ (соответственно $\alpha \in \mathcal{N}$) имеет такую окрестность $P(i)$ (соответственно $Q(\alpha)$), в которой нет ни одного квазиулевого элемента, за исключением, может быть, самой этой точки.

В силу отделимости пространств $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, а также конечности множеств квазиулевых элементов $\tilde{\mathcal{M}}$, $\tilde{\mathcal{N}}$ утверждение предложения 1 очевидно.

Предложение 2. Функция $a: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow R$ непрерывна на $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$.

Пусть $i_0 \in \mathcal{M}$, $\alpha_0 \in \mathcal{N}$ — произвольные элементы. Рассмотрим ε -окрестность точки $(i_0, \alpha_0) \in R$, задаваемую неравенством $|x - (i_0, \alpha_0)| < \varepsilon$. Если $i \in P(i_0, \{\alpha_0, \beta_0\}, \varepsilon_1)$, $\alpha \in Q(\alpha_0, P(i_0, \{\alpha_0, \beta_0\}, \varepsilon_1), \varepsilon_2)$, где $\beta_0 \notin \mathcal{N}$ и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$, то будет выполняться неравенство $|(i, \alpha) - (i_0, \alpha_0)| < \varepsilon$, т. е. функция $a: \mathcal{M} \times \mathcal{N} \rightarrow R$ непрерывна по совокупности переменных.

Пусть $\mathcal{M}^m$, $\mathcal{N}^n$ — m - и n -кратные прямые произведения множеств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, где $m \geq n \geq 2$ — целые числа. Элемент прямого произведения назовем *кортежем*. Построим функцию $A: \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n \rightarrow R^{mn}$, сопоставляя каждому кортежу $\langle ijk \dots v, \alpha \beta \gamma \dots \tau \rangle \in \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n$ матрицу

$$\begin{pmatrix} (i, \alpha) & (i, \beta) & \dots & (i, \tau) \\ (j, \alpha) & (j, \beta) & \dots & (j, \tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (v, \alpha) & (v, \beta) & \dots & (v, \tau) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

рассматривая ее как точку пространства R^{mn} . Матрицу (1.1) будем обозначать также $(ijk, \dots, v, \alpha \beta \gamma \dots \tau) = [(i, \alpha), (i, \beta), \dots, (v, \tau)] = (x_1, x_2, \dots, x_{mn}) \in R^{mn}$.

Предложение 3. Функция $A: \mathbb{M}^m \times \mathbb{N}^n \rightarrow R^{mn}$ непрерывна на $\mathbb{M}^m \times \mathbb{N}^n$.

Это предположение является естественным следствием непрерывности функции $a: \mathbb{M} \times \mathbb{N} \rightarrow R$.

Определение 4. Преобразования пространства R^{mn} , соответствующие перестановкам строк и столбцов в матрице (1.1), называются каноническими перестановками пространства R^{mn} . Точки R^{mn} , переходящие друг в друга при некоторой канонической перестановке, называются канонически сопряженными.

Обозначим через N множество значений функции A . Множество N наделим топологией, индуцированной из R^{mn} .

Определение 5. Говорят, что тройка $\langle \mathbb{M}, \mathbb{N}, a: \mathbb{M} \times \mathbb{N} \rightarrow R \rangle$ образует бинарную физическую структуру ранга (m, n) , если выполнены следующие условия (аксиомы физической структуры):

A. В любой окрестности произвольного кортежа из $\mathbb{N}^{n-1}$ (соответственно $\mathbb{M}^{m-1}$) найдется такой кортеж $\langle \beta\gamma \dots \tau \rangle$ (соответственно $\langle jk \dots v \rangle$), что отображение $a[\beta\gamma \dots \tau]: \mathbb{M} \rightarrow R^{n-1}$ (соответственно $a[jk \dots v]: \mathbb{N} \rightarrow R^{m-1}$), определяемое функцией $i \rightarrow (i, \beta\gamma \dots \tau) \in R^{n-1}$ (соответственно $\alpha \rightarrow (jk \dots v, \alpha) \in R^{m-1}$), открыто.

B. Отображение $A: \mathbb{M}^m \times \mathbb{N}^n \rightarrow N$ открыто.

C. Существует аналитическая функция $\Phi: E \rightarrow R$, определенная в области $E \subset R^{mn}$, такая, что множество N является открытым подмножеством множества, задаваемого уравнением $\Phi = 0$, т. е.

$$\Phi[(ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau)] = 0 \quad (1.2)$$

для любого кортежа $\langle ijk \dots v, \alpha\beta\gamma \dots \tau \rangle \in \mathbb{M}^m \times \mathbb{N}^n$.

D. Градиент Φ отличен от нуля на всюду плотном в N подмножестве N .

Согласно условию A множество $\mathbb{M}$ по крайней мере $(n-1)$ -мерно, а множество $\mathbb{N}$ $(m-1)$ -мерно. Однако условие A отличается от требования, чтобы множества $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ были многообразиями соответствующей размерности. Открытость отображений $a[\beta\gamma \dots \tau]: \mathbb{M} \rightarrow R^{n-1}$ и $a[jk \dots v]: \mathbb{N} \rightarrow R^{m-1}$ налагает дополнительные ограничения на исходную функцию $a: \mathbb{M} \times \mathbb{N} \rightarrow R$. При этом определенные в множествах $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ топологии не вырождаются в дискретные. Заметим, что кортежи $\langle \beta\gamma \dots \tau \rangle$ и $\langle jk \dots v \rangle$ должны содержать неквазинулевые попарно-различные элементы $\beta, \gamma, \dots, \tau \in \mathbb{N}$ и $j, k, \dots, v \in \mathbb{M}$. Назовем такие кортежи *недиагональными*. Основное содержание теории физических структур заключено в условии C, которое возникло из анализа строения физических законов. Функция $a: \mathbb{M} \times \mathbb{N} \rightarrow R$ выступает как результат физического эксперимента, выявляющего отношение между множествами физических объектов $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$. Уравнение (1.2) есть аналитическое выражение физического закона, так что открытость отображения $A: \mathbb{M}^m \times \mathbb{N}^n \rightarrow N$, требуемая условием B, означает сохранение структуры этого закона в локальном смысле. От функции Φ можно потребовать только достаточной гладкости, но при этом несомненно будет усилить условие D, предположив, что все производные функции Φ отличны от нуля одновременно на всюду плотном в N подмножестве N (см. предложение 6). Такое усиление условия D может быть оправдано физическими соображениями равноправия результатов измерения относительно связи (1.2).

Пусть N_0 — любая окрестность произвольной точки N . Из условий C и D следует, что найдется такая точка $(i_1 j_1 k_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \tau_1) \in N_0$, в которой $\text{grad } \Phi \neq 0$. Без ограничения общности можно предположить, что в этой точке отлична от нуля производная функции Φ по первому

аргументу (i, α) . Но тогда по теореме о неявных функциях существуют такие окрестности H и V , что уравнение (1.2) может быть однозначно разрешено относительно (i, α) в окрестности $U = H \times V \subset R^{mn}$

$$(i, \alpha) = \Gamma[(jk \dots v, \beta\gamma \dots \tau), (i, \beta\gamma \dots \tau), (jk \dots v, \alpha)]. \quad (1.3)$$

Поскольку аналитическая функция Γ определена на V , по условию C аргументы, входящие в нее, могут рассматриваться как независимые переменные. Уравнение (1.3) задает множество $N_1 = N \cap U \subset N_0$.

Предложение 4. Частные производные функции Γ по каждой из переменных $(i, \beta\gamma \dots \tau)$, $(jk \dots v, \alpha)$ отличны от нуля на множестве полной меры в окрестности V .

Предположим, например, что $\Gamma_{(i, \beta)} = 0$ на множестве положительной меры в окрестности V . Тогда в силу аналитичности $\Gamma_{(i, \beta)} \equiv 0$, так что функция Γ не зависит от переменной (i, β)

$$(i, \alpha) = \Gamma_1[(jk \dots v, \beta\gamma \dots \tau), (i, \gamma \dots \tau), (jk \dots v, \alpha)]. \quad (1.3')$$

В силу непрерывности функции $A: \mathbb{M}^m \times \mathbb{A}^n \rightarrow N$ существует такая окрестность $Q(\alpha_1)$, что уравнение (1.3') имеет место для всех $\alpha \in Q(\alpha_1)$. В окрестности $[Q(\alpha_1)]^{n-1}$ кортежа $\langle \alpha_1 \alpha_1 \dots \alpha_1 \rangle$ согласно условию A найдется такой кортеж $\langle \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \rangle$, что отображение $a[\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n]: \mathbb{M} \rightarrow R^{n-1}$ открыто. Однако это невозможно, так как согласно (1.3') $n-1$ координат $(i, \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n)$ выражаются через $n-2$ параметров $(i, \gamma \dots \tau)$. Таким образом, производная $\Gamma_{(i, \beta)}$ может обращаться в нуль только на множестве нулевой меры. Аналогичное утверждение верно и для других производных функции Γ .

Следствие. Все производные функции Γ по переменным $(i, \beta\gamma \dots \tau)$, $(jk \dots v, \alpha)$ одновременно отличны от нуля на множестве полной меры в окрестности V .

Предложение 5. В N_0 существует точка, в которой все производные функции Φ по переменным (i, α) , $(i, \beta\gamma \dots \tau)$, $(jk \dots v, \alpha)$ отличны от нуля.

Имеем $\Gamma_{(i, \beta)} = -\Phi_{(i, \beta)}/\Phi_{(i, \alpha)}$, причем $\Phi_{(i, \alpha)} \neq 0$ на $N_1 \subset N_0$. Согласно следствию предложения 4 в V существует точка, в которой все производные функции Γ по переменным $(i, \beta\gamma \dots \tau)$, $(jk \dots v, \alpha)$ отличны от нуля. В соответствующей точке окрестности N_1 производные Φ по тем же переменным отличны от нуля. Так как $\Phi_{(i, \alpha)} \neq 0$ всюду на N_1 , то предложение 5 доказано.

Предложение 6. В любой окрестности относительно N произвольной точки N существует такая точка, в которой все производные функции Φ отличны от нуля.

Согласно предложению 5 в N_0 существует точка, в которой $\Phi_{(i, \beta)} \neq 0$, т. е. уравнение (1.2) может быть однозначно разрешено относительно (i, β) . Проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим, что в N_0 существует точка, в которой отличны от нуля производные Φ по переменным $(i, \alpha\beta)$, $(i, \gamma \dots \tau)$, $(jk \dots v, \alpha\beta)$. Затем можно уравнение (1.2) разрешить относительно (i, γ) и т. д., что очевидным образом и доказывает предложение 6.

Предложение 7. В любой окрестности относительно N произвольной точки N существует такая точка, что в ней самой и во всех $m!n!$ канонически сопряженных точках все производные функции Φ отличны от нуля.

Это предложение легко доказать, рассматривая окрестность N_0 и все $m!n!$ сопряженных окрестностей N^* и применяя к ним предложение 6.

Не усложняя обозначений, будем считать, что именно в точке $(i_1 j_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1 \dots \tau_1)$ и в точках, ей сопряженных, все производные функции Φ отличны от нуля. В этой точке уравнение (4.2) можно однозначно разрешить относительно любого аргумента. В силу непрерывности функции Φ существует такая окрестность N_1 точки $(i_1 j_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1 \dots \tau_1)$, что всюду в N_1 и в каждой сопряженной окрестности N_1^* все производные функции Φ отличны от нуля. В матрице $(i_1 j_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1 \dots \tau_1)$, возможно, совпадают некоторые компоненты. Например, $(i_1, \alpha_1) = (j_1, \alpha_1)$, хотя бы и $i_1 \neq j_1$. Однако, как легко понять, в окрестности N_1 можно найти такую точку, что в матрице, ее описывающей, будут различны все компоненты. Не усложняя обозначений, будем считать, что все координаты точки $(i_1 j_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1 \dots \tau_1) \in R^{mn}$ различны. Тогда будут попарно-различными все элементы множеств $\mathcal{M}_1 = \{i_1, j_1, k_1, \dots, v_1\}$, $\mathcal{N}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \tau_1\}$.

Множества $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1$ содержат m и n различных элементов, причем можно считать, что среди них нет ни одного квазинулевого. Все значения функции $a: \mathcal{M}_1 \times \mathcal{N}_1 \rightarrow R$ различны. Можно сказать, что во всех точках N , соответствующих недиагональным кортежам из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{N}_1^n$, производные функции Φ отличны от нуля. Действительно, точка $(i_1 j_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1 \dots \tau_1)$ и все ей канонически сопряженные — это и есть точки, соответствующие недиагональным кортежам из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{N}_1^n$.

Пусть $i_0 \in \mathcal{M}$ и $\alpha_0 \in \mathcal{N}$ — произвольные точки и $P(i_0)$, $Q(\alpha_0)$ — любые их окрестности. В силу открытости отображения $A: \mathcal{M}^m \times \mathcal{N}^n \rightarrow N$, требуемой условием A , множество N_0 значений функции $A: [P(i_0)]^m \times [Q(\alpha_0)]^n \rightarrow N$ открыто и потому является некоторой окрестностью точки (i_0^m, α_0^n) . Учитывая все вышеизложенное, вместе с предложением 7 мы можем записать следующее

Предложение 8. В любых окрестностях $P(i_0)$ и $Q(\alpha_0)$ произвольных точек $i_0 \in \mathcal{M}$, $\alpha_0 \in \mathcal{N}$ можно найти множества $\mathcal{M}_1 = \{i_1, j_1, \dots, v_1\}$ и $\mathcal{N}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \dots, \tau_1\}$, содержащие m и n различных неквазинулевых элементов, такие, что значения функции $a: \mathcal{M}_1 \times \mathcal{N}_1 \rightarrow R$ различны и все производные функции Φ отличны от нуля в каждой точке N , соответствующей недиагональному кортежу из $\mathcal{M}_1^m \times \mathcal{N}_1^n$.

Будем предполагать, что $i_0 \notin \mathcal{M}_1$, $\alpha_0 \notin \mathcal{N}_1$.

Предложение 9. Множества $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1$ предложения 8 могут содержать m_1 и n_1 элементов соответственно, где $m_1 \geq m$, $n_1 \geq n$.

Докажем это предложение методом индукции, так как множества $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1$, содержащие m и n элементов, существуют согласно предложению 8. Пусть множества $\mathcal{M}_1 = \{i_1, \dots, v_1, \dots, g_1\}$ и $\mathcal{N}_1 = \{\alpha_1, \dots, \tau_1, \dots, \rho_1\}$, в отношении которых имеет место предложение 9, содержат некоторое число $m' \geq m$ и $n' \geq n$ элементов, при этом $i_0 \notin \mathcal{M}_1$, $\alpha_0 \notin \mathcal{N}_1$. Возьмем такие непересекающиеся без квазинулевых элементов окрестности $P(i_1), \dots, P(g_1) \subset P(i_0)$ и $Q(\alpha_1), \dots, Q(\rho_1) \subset Q(\alpha_0)$, что предложение 9 остается справедливым для любых множеств $\{i, \dots, v, \dots, g\}$ и $\{\alpha, \dots, \tau, \dots, \rho\}$, где $i \in P(i_1), \dots, \rho \in Q(\rho_1)$. Поскольку $i_0 \notin \mathcal{M}_1$, $\alpha_0 \notin \mathcal{N}_1$, выберем окрестности точек множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{N}_1$ таким образом, чтобы существовали непересекающиеся с ними окрестности $P_1(i_0)$ и $Q_1(\alpha_0)$. Пусть $s_1 \in P_1(i_0)$ — некоторый элемент, отличный от i_0 , и $P(s_1) \subset P_1(i_0)$ — некоторая его окрестность. Эту окрестность выберем так, чтобы существовала непересекающаяся с ней окрестность $P_2(i_0)$. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_1 \cup \{s_1\}$, содержащее $m' + 1$ элементов. К каждой точке N , соответствующей недиагональному кортежу из $[\mathcal{M}_1 \cup \{s_1\}]^m \times \mathcal{N}_1^n$, и связанной с ней окрестностью можно применить предложение 7. Всего таких точек конечное число. Переходя последовательно от одной точки к другой, можно найти такие множества $\mathcal{M}_1 = \{i_1, \dots, g_1, s_1\}$, $\mathcal{N}_1 = \{\alpha_1, \dots$

..., ρ'_1 }, где $i'_1 \in P(i_1)$, ..., $s'_1 \in P(s_1)$, $\alpha'_1 \in Q(\alpha_1)$, ..., $\rho'_1 \in Q(\rho_1)$, содержащие $m'+1$ и n' различных элементов, что все значения функции $a: \mathfrak{M}'_1 \times \mathfrak{N}'_1 \rightarrow R$ различны и в каждой точке N , соответствующей недиагональному кортежу из $[\mathfrak{M}'_1]^m \times [\mathfrak{N}'_1]^n$, все производные функции Φ отличны от нуля. При этом $\mathfrak{M}'_1 \subset P(i_0)$, $\mathfrak{N}'_1 \subset Q(\alpha_0)$, $i_0 \notin \mathfrak{M}'_1$, $\alpha_0 \notin \mathfrak{N}'_1$. Еще раз отметим, что число элементов в множестве $\mathfrak{M}'_1$ на единицу больше, чем в множестве $\mathfrak{M}_1$. Аналогично можно увеличить на единицу число элементов в множестве $\mathfrak{N}'_1$, что и доказывает предложение 9.

Определение 6. Два уравнения $\Phi=0$ и $\Phi_1=0$, где $\Phi: E \rightarrow R$ и $\Phi_1: E \rightarrow R$, считаются эквивалентными, если множества, которые они определяют в R^{mn} , канонически сопряжены (в частности, совпадают).

Предложение 10. Если эквивалентные уравнения $\Phi=0$ и $\Phi_1=0$ могут быть однозначно разрешены относительно одного и того же аргумента в некоторых окрестностях канонически сопряженных точек, то они определяют этот аргумент как одну и ту же функцию остальных переменных.

Действительно, предположим, например, что $\Phi_{(i, \alpha)} \neq 0$, $\Phi_{1(i, \alpha)} \neq 0$ и эквивалентные уравнения можно записать в виде, однозначно разрешенном относительно (i, α) :

$$\begin{aligned} (i, \alpha) &= \Gamma[(jk \dots v, \beta\gamma \dots \tau), (i, \beta\gamma \dots \tau), (jk \dots v, \alpha)], \\ (i, \alpha) &= \Gamma_1[(jk \dots v, \beta\gamma \dots \tau), (i, \beta\gamma \dots \tau), (jk \dots v, \alpha)], \end{aligned}$$

откуда следует, что $\Gamma \equiv \Gamma_1$, так как все аргументы, входящие в функции Γ и Γ_1 , являются согласно условию C независимыми переменными. Эквивалентные уравнения обычно возникают при различных канонических перестановках.

В заключение введем понятие параметризации. Пусть $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{N}_1$ — множества, определяемые предложением 9, и $\langle i_1 j_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1 \dots \tau_1 \rangle$ — недиагональный кортеж из $\mathfrak{M}_1^m \times \mathfrak{N}_1^n$. В окрестности кортежей $\langle j_1 \dots v_1 \rangle \in \mathfrak{M}_1^{m-1}$ и $\langle \beta_1 \dots \tau_1 \rangle \in \mathfrak{N}_1^{n-1}$ найдем по условию A такие кортежи $\langle j'_1 \dots v'_1 \rangle$ и $\langle \beta'_1 \dots \tau'_1 \rangle$, чтобы отображения $a[j'_1 \dots v'_1]: \mathfrak{M} \rightarrow R^{m-1}$ и $a[\beta'_1 \dots \tau'_1]: \mathfrak{N} \rightarrow R^{n-1}$ были открытыми. Запишем уравнение (1.3) для кортежа $\langle i j'_1 \dots v'_1, \alpha \beta'_1 \dots \tau'_1 \rangle$, где $i \in P(i_1)$, $\alpha \in Q(\alpha_1)$,

$$(i, \alpha) = \Gamma[(j'_1 \dots v'_1, \beta'_1 \dots \tau'_1), (i, \beta'_1 \dots \tau'_1), (j'_1 \dots v'_1, \alpha)]. \quad (1.4)$$

Если числа $(i, \beta'_1 \dots \tau'_1)$ и $(j'_1 \dots v'_1, \alpha)$ рассматривать как независимые параметры, задаваемые открытыми отображениями $a[\beta'_1 \dots \tau'_1]: P(i_1) \rightarrow R^{n-1}$ и $a[j'_1 \dots v'_1]: Q(\alpha_1) \rightarrow R^{m-1}$, то уравнение (1.4) будет определять некоторое локальное параметрическое представление функции $a: P(i_1) \times Q(\alpha_1) \rightarrow R$. Для того чтобы не нарушилось условие A , параметры $(i, \beta'_1 \dots \tau'_1)$ и $(j'_1 \dots v'_1, \alpha)$ должны входить в представление (1.4) существенным образом.

§ 2. Бинарная физическая структура ранга $(m, 2)$

В данном параграфе подробно будет рассмотрен случай $m \geq n = 2$, так как исследование общего случая $m \geq n \geq 2$ требует очень большого объема изложения. Полную сводку результатов можно найти в работе ⁽⁸⁾.

Теорема. Бинарная физическая структура ранга $(m, 2)$, где $m \geq 2$, существует для $m=2$, $m=3$, $m=4$ и не существует для $m \geq 5$. Если тройка $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{N} \rightarrow R \rangle$ образует бинарную физическую структуру ранга $(m, 2)$, то в любых окрестностях $P(i_0)$, $Q(\alpha_0)$ произвольных точек $i_0 \in \mathfrak{M}$, $\alpha_0 \in \mathfrak{N}$ найдутся элементы $i_1 \in P(i_0)$, $\alpha_1 \in Q(\alpha_0)$, для некоторых окрестностей $P(i_1)$, $Q(\alpha_1)$ которых функция $a: P(i_1) \times Q(\alpha_1) \rightarrow R$ и множество значений функции $A: [P(i_1)]^m \times [Q(\alpha_1)]^2 \rightarrow R^{2m}$ могут быть заданы следующим образом:

a) для $m=2$

$$(i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i + \xi_\alpha),$$

$$\Psi[(i, \alpha)] - \Psi[(i, \beta)] - \Psi[(j, \alpha)] + \Psi[(j, \beta)] = 0, \quad (2.1)$$

b) для $m=3$

$$(i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i \xi_\alpha^1 + \xi_\alpha^2),$$

$$\begin{vmatrix} \Psi[(i, \alpha)] & \Psi[(i, \beta)] & 1 \\ \Psi[(j, \alpha)] & \Psi[(j, \beta)] & 1 \\ \Psi[(k, \alpha)] & \Psi[(k, \beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.2)$$

c) для $m=4$

$$(i, \alpha) = \Psi^{-1}[(x_i \xi_\alpha^1 + \xi_\alpha^2) / (x_i + \xi_\alpha^3)],$$

$$\begin{vmatrix} \Psi[(i, \alpha)] & \Psi[(i, \beta)] & \Psi[(i, \alpha)] \times \Psi[(i, \beta)] & 1 \\ \Psi[(j, \alpha)] & \Psi[(j, \beta)] & \Psi[(j, \alpha)] \times \Psi[(j, \beta)] & 1 \\ \Psi[(k, \alpha)] & \Psi[(k, \beta)] & \Psi[(k, \alpha)] \times \Psi[(k, \beta)] & 1 \\ \Psi[(l, \alpha)] & \Psi[(l, \beta)] & \Psi[(l, \alpha)] \times \Psi[(l, \beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.3)$$

где $i, j, k, l \in P(i_1)$, $\alpha, \beta \in Q(\alpha_1)$, Ψ — строго монотонная аналитическая функция одной переменной, определенная в некоторой окрестности точки $(i_1, \alpha_1) \in R$, Ψ^{-1} — обратная функция, x_i и ξ_α — независимые параметры, задаваемые некоторыми открытыми отображениями $x: \mathfrak{M} \rightarrow R$ и $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{m-1}): \mathfrak{N} \rightarrow R^{m-1}$.

Все дальнейшее изложение представляет собой последовательное доказательство сформулированной выше теоремы. Существование уравнений (2.1), (2.2) было предположено Ю. И. Кулаковым ((¹), с. 18, 56), уравнение (2.3) впервые было обнаружено автором ((⁹), с. 191—196).

Уравнение (1.2) для рассматриваемого случая $m \geq n=2$ имеет вид

$$\Phi[(ijk...v, \alpha\beta)] = 0. \quad (2.4)$$

Пусть i_0, α_0 — произвольные точки и $P(i_0)$, $Q(\alpha_0)$ — любые их открытые окрестности. В соответствии с предложением 9 § 1, существуют множества $\mathfrak{M}_1 = \{i_1, j_1, \dots, v_1, \dots, g_1\} \subset P(i_0)$, $\mathfrak{N}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \dots, \tau_1, \dots, \rho_1\} \subset Q(\alpha_0)$, содержащие сколь угодно большое конечное число различных неквази нулевых элементов, такие, что все значения функции $a: \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{N}_1 \rightarrow R$ различны, и в каждой точке N , соответствующей недиагональному кортежу из $\mathfrak{M}_1^m \times \mathfrak{N}_1^2$, все производные функции Φ уравнения (2.4) отличны от нуля. Последнее означает, что в некоторой окрестности каждой такой точки уравнение (2.4) может быть однозначно разрешено относительно любого аргумента, например,

$$(i, \alpha) = \Gamma[(jk...v, \beta), (i, \beta), (jk...v, \alpha)]. \quad (2.5)$$

Поскольку все значения функции $a: \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{N}_1 \rightarrow R$ различны, среди точек N , соответствующих недиагональным кортежам из $\mathfrak{M}_1^m \times \mathfrak{N}_1^2$, нет совпадающих, поэтому окрестности точек, где все производные функции Φ отличны от нуля, можно взять непересекающимися. Пусть, далее, $P(i_1), \dots, P(g_1)$ и $Q(\alpha_1), \dots, Q(\rho_1)$ — такие непересекающиеся окрестности, не содержащие квазинулевых элементов, что если в множествах $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{N}_1$ любой элемент заменить точкой из его окрестности, то сохраняют силу утверждения предложения 9. Например, в точке, соответствующей любому кортежу $\langle ijk \dots v, \alpha\beta \rangle \in P(i_1) \times \dots \times Q(\beta_1)$, все производные функции Φ отличны от нуля. Кроме того, элементы $i, j, k, \dots, v$ и α, β попарно-различны, и в матрице $\langle ijk \dots v, \alpha\beta \rangle$ различны все компоненты.

Уравнение (2.5) задает некоторую окрестность точки $(i_1 j_1 \dots v_1, \alpha_1 \beta_1)$. Поскольку окрестности точек, соответствующих недиагональным кортежам из $\mathfrak{M}_1^m \times \mathfrak{N}_1^2$, не пересекаются, уравнение (2.5) будет задавать каждую такую окрестность. При этом можно сохранить одно и то же обозначение для функции Γ . Все производные функции Γ в уравнении (2.5) отличны от нуля. Аргументы, входящие в функцию Γ , можно рассматривать как $2m - 1$ независимую переменную. Число элементов в множествах $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{N}_1$ будем предполагать настолько большим, что исключение по той или иной причине некоторых из них несущественно.

В окрестности $P(g_1)$ возьмем элемент g и запишем уравнение (2.5) для кортежей $\langle gik \dots v, \alpha\beta \rangle$ и $\langle gjk \dots v, \alpha\beta \rangle$

$$(g, \alpha) = \Gamma[(ik \dots v, \beta), (g, \beta), (ik \dots v, \alpha)],$$

$$(g, \alpha) = \Gamma[(jk \dots v, \beta), (g, \beta), (jk \dots v, \alpha)],$$

откуда, приравнявая правые части, получаем соотношение

$$\hat{R}(ij)\Gamma[(ik \dots v, \beta), (g, \beta), (ik \dots v, \alpha)] = 0, \quad (2.6)$$

где для сокращения записи был использован оператор альтернирования $\hat{R}$, действие которого состоит в антисимметризации выражений, стоящих справа от оператора. Например, $\hat{R}(ij)\Psi[(i, \alpha)] = \Psi[(i, \alpha)] - \Psi[(j, \alpha)]$.

Зафиксируем в соотношении (2.6) переменную (g, β) . Вводя также новое обозначение

$$\Omega[(ik \dots v, \alpha\beta)] = \Gamma[(ik \dots v, \beta), (g, \beta), (ik \dots v, \alpha)]|_{(g, \beta) = \text{const}},$$

получаем уравнение

$$\hat{R}(ij)\Omega[(ik \dots v, \alpha\beta)] = 0. \quad (2.7)$$

Из свойств функции Γ вытекает, что отличны от нуля все производные функции Ω . Это значит, что уравнение (2.7) можно однозначно разрешить, например, относительно (i, α) . Сопоставляя уравнения (2.7) и (2.5), легко получаем, что левая часть уравнения (2.7) имеет отличные от нуля производные по всем переменным.

Совершенно аналогично можно получить уравнение

$$\hat{R}(\alpha\beta)\Xi[(ijk \dots v, \alpha)] = 0, \quad (2.8)$$

в котором «расщеплены» элементы α, β .

Два уравнения (2.7) и (2.8) эквивалентны, так как задают одно и то же множество — совокупность окрестностей всех точек, соответству-

ющих недиагональным кортежам из $\mathfrak{M}_1^m \times \mathfrak{N}_1^2$. Это обстоятельство налагает дополнительные ограничения на функции Ω и Ξ .

Разрешим уравнения (2.7) и (2.8) относительно (i, α) :

$$\begin{aligned}(i, \alpha) &= \chi_1 \{ \Omega[(jk, \alpha\beta)], (k, \alpha\beta), (i, \beta) \}, \\ (i, \alpha) &= \chi \{ \Xi[(ijk, \beta)], (jk, \alpha) \},\end{aligned}\quad (2.9)$$

откуда получаем функциональное уравнение для $\chi[\lambda, (jk, \alpha)]$

$$\chi \{ \Xi[(ijk, \beta)], (jk, \alpha) \} = \chi_1 \{ \Omega[(jk, \alpha\beta)], (k, \alpha\beta), (i, \beta) \}. \quad (2.10)$$

Для сокращения записи в уравнении (2.10) временно опущены «неподвижные» элементы, следующие за k .

Продифференцируем уравнение (2.10) по переменным (i, β) , (j, α) и разделим правую и левую части первого результата на соответствующие части второго

$$\frac{\chi_\lambda \{ \Xi[(ijk, \beta)], (jk, \alpha) \} \Xi_{(j, \beta)}[(ijk, \beta)]}{\chi_{(j, \alpha)} \{ \Xi[(ijk, \beta)], (jk, \alpha) \}} = \frac{\Omega_{(j, \beta)}[(jk, \alpha\beta)]}{\Omega_{(j, \alpha)}[(jk, \alpha\beta)]}, \quad (2.11)$$

где χ_λ — производная функции χ по первому аргументу. Результат (2.11) может рассматриваться как функционально-дифференциальное уравнение для $\chi[\lambda, (jk, \alpha)]$. Заметим, что все производные, входящие в равенство (2.11), отличны от нуля.

В уравнении (2.11) перейдем к переменной $\lambda = \Xi[(ijk, \beta)]$, которая взаимно-однозначно связана с (i, β)

$$\begin{aligned}\chi_\lambda[\lambda, (jk, \alpha)] \Xi_{(j, \beta)} \{ \chi[\lambda, (jk, \beta)], (jk, \beta) \} = \\ = \chi_{(j, \alpha)}[\lambda, (jk, \alpha)] \Omega_{(j, \beta)}[(jk, \alpha\beta)] / \Omega_{(j, \alpha)}[(jk, \alpha\beta)].\end{aligned}\quad (2.12)$$

Зафиксируем значение переменных $(jk \dots v, \beta)$, не входящих в функцию $\chi[\lambda, (jk, \alpha)]$

$$\chi_\lambda[\lambda, (jk, \alpha)] A_1(\lambda) + \chi_{(j, \alpha)}[\lambda, (jk, \alpha)] B_1[(jk, \alpha)] = 0,$$

т. е. по переменным λ и (j, α) получено линейное однородное уравнение в частных производных. Это уравнение не имеет особых точек, так как коэффициенты A_1 и B_1 не обращаются в нуль, и поэтому может быть решено методом характеристик

$$\chi[\lambda, (jk, \alpha)] = \chi_2 \{ A(\lambda) + B[(jk, \alpha)], (k, \alpha) \}, \quad (2.13)$$

где χ_2 , A , B — аналитические функции, имеющие отличные от нуля производные по первому аргументу, так как $A_\lambda(\lambda) = 1/A_1(\lambda) \neq 0$, $B_{(j, \alpha)}[(jk, \alpha)] = 1/B_1[(jk, \alpha)] \neq 0$, $\chi_\lambda[\lambda, (jk, \alpha)] \neq 0$. Подставим решение (2.13) в уравнение (2.9)

$$(i, \alpha) = \chi_2 \{ A[\Xi[(ijk, \beta)]] + B[(jk, \alpha)], (k, \alpha) \}$$

и разрешим результат подстановки относительно суммы $A+B$

$$A \{ \Xi[(ijk, \beta)] \} = \Theta[(ik, \alpha)] - B[(jk, \alpha)], \quad (2.14)$$

причем $\Theta_{(i, \alpha)}[(ik, \alpha)] \neq 0$.

Уравнение (2.14) инвариантно относительно подстановки элементов из множества $\mathfrak{N}$, откуда следует

$$\hat{R}(\alpha\beta) \Theta[(ik, \alpha)] = \hat{R}(\alpha\beta) B[(jk, \alpha)].$$

Инвариантность же последнего выражения относительно подстановки элементов из множества $\mathfrak{M}$ приводит к окончательному результату

$$\hat{R}(ij)\hat{R}(\alpha\beta)\Theta[(ikl\dots v, \alpha)] = 0. \quad (2.15)$$

Уравнение (2.15) является следствием эквивалентности уравнений (2.7) и (2.8).

Запишем уравнение (2.15) для частного случая $m=2$

$$\Theta[(i, \alpha)] - \Theta[(i, \beta)] - \Theta[(j, \alpha)] + \Theta[(j, \beta)] = 0. \quad (2.16)$$

Представим уравнение (2.16) в виде, разрешенном относительно аргумента (i, α) , и проведем параметризацию в смысле, разъясненном в § 1. Функция $a: P(i_1) \times Q(\alpha_1) \rightarrow R$ будет иметь следующее параметрическое представление:

$$(i, \alpha) = \Psi^{-1}(x_i + \xi_\alpha),$$

где Ψ — строго монотонная аналитическая функция одной переменной, определенная в некоторой окрестности точки $(i_1, \alpha_1) \in R$, в которой $\Psi \equiv \Theta$, Ψ^{-1} — обратная функция.

Если далее предполагать, что $i, j \in P(i_1)$, $\alpha, \beta \in Q(\alpha_1)$, то множество значений функции $A: [P(i_1)]^2 \times [Q(\alpha_1)]^2 \rightarrow R^4$ может быть задано уравнением (2.1).

При последующих преобразованиях результата (2.15) будем предполагать, что $m \geq 3$. Переставим в уравнении (2.15) элементы j, k

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)\Theta[(ijl\dots v, \alpha)] = 0. \quad (2.17)$$

Эквивалентные уравнения (2.15) и (2.17) определяют неявно, например, (j, α) как одну и ту же функцию остальных переменных, в частности переменной (i, α) , откуда легко получаем

$$\frac{\Theta_{(i,\alpha)}[(ijl, \alpha)]}{\Theta_{(i,\alpha)}[(ikl, \alpha)]} + \frac{\Theta_{(j,\alpha)}[(ijl, \alpha)]}{\Theta_{(j,\alpha)}[(jkl, \alpha)]} = \frac{Q_{(j,\alpha)}[(kl, \alpha)]}{Q_{(j,\alpha)}[(jkl, \alpha)]}, \quad (2.18)$$

где для сокращения записи опущены элементы, следующие за l .

Равенство (2.18) есть функционально-дифференциальное уравнение для Θ .

Фиксируя значение переменной (k, α) , приходим к линейному неоднородному уравнению в частных производных для функции Θ

$$\Theta_{(i,\alpha)}[(ijl, \alpha)]A_1[(il, \alpha)] + \Theta_{(j,\alpha)}[(ijl, \alpha)]A_1[(jl, \alpha)] = B_1[(jl, \alpha)], \quad (2.19)$$

причем $A_1 \neq 0$. Если частное решение неоднородного уравнения взять не зависящим от переменной (i, α) , то общее решение уравнения (2.19) можно записать в следующем виде

$$\Theta[(ijl, \alpha)] = P\{A[(il, \alpha)] - A[(jl, \alpha)], (l, \alpha)\} + B[(jl, \alpha)], \quad (2.20)$$

где функции P и A имеют отличные от нуля производные по первому аргументу.

Подставим решение (2.20) в уравнение (2.18), произведем сокращение на ненулевые множители и зафиксируем переменную (k, α) , полагая $x = A[(il, \alpha)]$, $y = A[(jl, \alpha)]$

$$P'[x - y, (l, \alpha)] = E[y, (l, \alpha)] / \{F[x, (l, \alpha)] - F[y, (l, \alpha)]\} \quad (2.21)$$

Заметим, что введение независимых переменных x и y возможно, так как $A_{(i, \alpha)}[(il, \alpha)] \neq 0$, $A_{(j, \alpha)}[(jl, \alpha)] \neq 0$. Свойство функций E и F легко вывести из исходного уравнения (2.18) и из условия неравенства нулю производной P' . Согласно введенному обозначению $E \neq 0$, $F \neq 0$ и, кроме того, $F[x, (l, \alpha)] - F[y, (l, \alpha)] \neq 0$.

Продифференцируем выражение (2.21) по переменным x, y . Сравнивая результаты, после простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} E'[y, (l, \alpha)]/E[y, (l, \alpha)] = \\ = \{F'[x, (l, \alpha)] - F'[y, (l, \alpha)]\} / \{F[x, (l, \alpha)] - F[y, (l, \alpha)]\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Переставим в равенстве (2.22) переменные x, y . Правая часть при этом не изменится. Сравнивая левые части, приходим к уравнению для функции E

$$E'[x, (l, \alpha)]/E[x, (l, \alpha)] = C[(l, \alpha)]. \quad (2.23)$$

Воспользовавшись уравнением (2.23), из равенства (2.22) получаем также уравнение и для функции F

$$F'[x, (l, \alpha)] = C_1[(l, \alpha)] + C[(l, \alpha)]F[x, (l, \alpha)], \quad (2.24)$$

где $C[(l, \alpha)]$ и $C_1[(l, \alpha)]$ — аналитические функции.

Уравнения (2.23) и (2.24) легко интегрируются

$$E[x, (l, \alpha)] = K[(l, \alpha)] \exp C[(l, \alpha)]x, \quad (2.25)$$

$$F[x, (l, \alpha)] = -C_1[(l, \alpha)]/C[(l, \alpha)] + L[(l, \alpha)] \exp C[(l, \alpha)]x. \quad (2.26)$$

Поскольку $E \neq 0$, не обращается в нуль также и коэффициент K . Производная функции F в соответствии с выражением (2.26) имеет вид $F' = CL \exp Cx$, откуда следует, что произведение CL есть аналитическая функция, причем $CL \neq 0$, так как должно быть $F[x, (l, \alpha)] - F[y, (l, \alpha)] \neq 0$. Если коэффициент $C[(l, \alpha)]$ обращается в нуль, то уравнение (2.24) имеет линейное решение, которое может быть получено из общего решения (2.26) при $C \rightarrow 0$.

Решения (2.25) и (2.26) подставим в выражение (2.21) для производной P'

$$P'[x-y, (l, \alpha)] = K[(l, \alpha)] / \{L[(l, \alpha)] \exp C[(l, \alpha)](x-y) - L[(l, \alpha)]\},$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} P[x-y, (l, \alpha)] = C_2[(l, \alpha)] + K[(l, \alpha)] \times \{C[(l, \alpha)]L[(l, \alpha)]\}^{-1} \times \\ \times \ln \{L[(l, \alpha)] \exp C[(l, \alpha)](y-x) - L[(l, \alpha)]\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Используя результат (2.27), можно выписать общее выражение для функции $\Theta[(ijl, \alpha)]$ в соответствии с формулой (2.20)

$$\begin{aligned} \Theta[(ijl, \alpha)] = B[(jl, \alpha)] + C_2[(l, \alpha)] + K[(l, \alpha)] \times \{C[(l, \alpha)]L[(l, \alpha)]\}^{-1} \times \\ \times \ln \{L[(l, \alpha)] \exp C[(l, \alpha)] [A[(jl, \alpha)] - A[(il, \alpha)]] - L[(l, \alpha)]\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Заметим, что выражение под логарифмом в формуле (2.28) в нуль не обращается.

Подставим функцию (2.28) в уравнения (2.15) и (2.17)

$$\hat{R}(ij) \hat{R}(\alpha\beta) K[(l, \alpha)] \{C[(l, \alpha)]L[(l, \alpha)]\}^{-1} \ln \{\Lambda[(il, \alpha)] - \Lambda[(kl, \alpha)]\} = 0, \quad (2.29)$$

$$\hat{R}(ik)\hat{R}(\alpha\beta)K[(l, \alpha)]\{C[(l, \alpha)]L[(l, \alpha)]\}^{-1}\ln\{\Lambda[(il, \alpha)]-\Lambda[(jl, \alpha)]\}=0, \quad (2.30)$$

$$\Lambda[(il, \alpha)] \stackrel{\text{def}}{=} L[(l, \alpha)]/\exp C[(l, \alpha)]A[(il, \alpha)]-L[(l, \alpha)]. \quad (2.31)$$

Функция Λ аналитична, в выражении (2.31) возможен предельный переход $C \rightarrow 0$, сохраняющий свойства этой функции. Кроме того, очевидно $\Lambda_{(i, \alpha)}[(il, \alpha)] \neq 0$, так как $C[(l, \alpha)]L[(l, \alpha)] \neq 0$.

Эквивалентные уравнения (2.29) и (2.30) определяют неявно, например, (i, α) как одну и ту же функцию переменной (l, β) . Сравнивая соответствующие производные, легко получаем

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(ilf \dots v, \alpha)] & \Lambda[(ilf \dots v, \beta)] & 1 \\ \Lambda[(jlf \dots v, \alpha)] & \Lambda[(jlf \dots v, \beta)] & 1 \\ \Lambda[(klf \dots v, \alpha)] & \Lambda[(klf \dots v, \beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.32)$$

Запишем результат (2.32) для $m=3$. После параметризации легко получаем параметрическое представление функции $a: P(i_1) \times Q(\alpha_1) \rightarrow R$ и уравнение (2.2), задающее множество значений функции $A: [P(i_1)]^3 \times [Q(\alpha_1)]^2 \rightarrow R^6$, что и составляет содержание случая $b)$ доказываемой теоремы.

При дальнейших преобразованиях результата (2.32) будем предполагать, что $m \geq 4$. Переставим в уравнении (2.32) элементы k, l

$$\begin{vmatrix} \Lambda[(ikf \dots v, \alpha)] & \Lambda[(ikf \dots v, \beta)] & 1 \\ \Lambda[(jkf \dots v, \alpha)] & \Lambda[(jkf \dots v, \beta)] & 1 \\ \Lambda[(lkf \dots v, \alpha)] & \Lambda[(lkf \dots v, \beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.33)$$

Эквивалентные уравнения (2.32) и (2.33) определяют неявно, например, (j, β) как одну и ту же функцию переменной (i, α) , откуда получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_{(i, \alpha)}[(ilf, \alpha)]}{\Lambda_{(i, \alpha)}[(ikf, \alpha)]} \times \frac{\Lambda[(ikf, \alpha)] - \Lambda[(lkf, \alpha)]}{\Lambda[(ilf, \alpha)] - \Lambda[(klf, \alpha)]} &= \frac{\Lambda_{(j, \beta)}[(jlf, \beta)]}{\Lambda_{(j, \beta)}[(j kf, \beta)]} \times \\ &\times \frac{\Lambda[(j kf, \beta)] - \Lambda[(lkf, \beta)]}{\Lambda[(jlf, \beta)] - \Lambda[(klf, \beta)]}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где для сокращения записи опущены «неподвижные» элементы, следующие за f .

Поскольку правая и левая части уравнения (2.34) содержат различные переменные, получаем

$$\frac{\Lambda_{(i, \alpha)}[(ilf, \alpha)]}{\Lambda_{(i, \alpha)}[(ikf, \alpha)]} \cdot \frac{\Lambda[(ikf, \alpha)] - \Lambda[(lkf, \alpha)]}{\Lambda[(ilf, \alpha)] - \Lambda[(klf, \alpha)]} = a, \quad (2.35)$$

где $a \neq 0$. В соотношении (2.35) зафиксируем значение переменной (k, α) :

$$\Lambda_{(i, \alpha)}[(ilf, \alpha)] / \{\Lambda[(ilf, \alpha)] - B[(lf, \alpha)]\} = a \Lambda_{(i, \alpha)}[(if, \alpha)] / \{\Delta[(if, \alpha)] - \Delta[(lf, \alpha)]\},$$

откуда после интегрирования по переменной (i, α) получаем выражение для функции Λ :

$$\Lambda[(ilf, \alpha)] = B[(lf, \alpha)] + A[(lf, \alpha)] \{\Delta[(if, \alpha)] - \Delta[(lf, \alpha)]\}^a. \quad (2.36)$$

Заметим, что в выражении (2.36) $A[(lf, \alpha)] \neq 0$, $\Lambda_{(i, \alpha)}[(if, \alpha)] \neq 0$ и отлична от нуля разность, стоящая в фигурных скобках.

Подставим выражение (2.36) в соотношение (2.35), введя обозначения $x = \Delta[(if, \alpha)]$, $y = \Delta[(kf, \alpha)]$, $z = \Delta[(lf, \alpha)]$,

$$\frac{(x-z)^{a-1}}{(x-y)^{a-1}} \cdot \frac{(x-y)^a - (z-y)^a}{(x-z)^a - (y-z)^a} = a. \quad (2.37)$$

Переставим в уравнении (2.37) переменные y, z

$$\frac{(x-y)^{a-1}}{(x-z)^{a-1}} \cdot \frac{(x-z)^a - (y-z)^a}{(x-y)^a - (z-y)^a} = a,$$

т. е. $a^2 = 1$.

Легко проверить, что уравнение (2.37) обращается в тождество только при подстановке значения $a = -1$.

Для функции Λ из формулы (2.36), где должно быть $a = -1$, получаем выражение

$$\Lambda[(if, \alpha)] = B[(lf, \alpha)] + A[(lf, \alpha)] \{ \Delta[(if, \alpha)] - \Delta[(lf, \alpha)] \}^{-1}. \quad (2.38)$$

Подставим функцию (2.38) в уравнение (2.32), исключая B и вынося из первого и второго столбца в ненулевой множитель A :

$$\begin{vmatrix} \{\hat{R}(il) \Delta[(ifw, \alpha)]\}^{-1} & \{\hat{R}(il) \Delta[(ifw, \beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(jl) \Delta[(jfw, \alpha)]\}^{-1} & \{\hat{R}(jl) \Delta[(jfw, \beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(kl) \Delta[(kfw, \alpha)]\}^{-1} & \{\hat{R}(kl) \Delta[(kfw, \beta)]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.39)$$

где опущены элементы, следующие в кортеже $\langle ijkf w \dots v \rangle$ за элементом w . Уравнение (2.39) является следствием эквивалентности уравнений (2.32) и (2.33). Производные левой части уравнения (2.39) по каждой из переменных $(ijk, \alpha\beta)$, а следовательно, и по всем остальным отличны от нуля.

Запишем уравнение (2.39) для $m=4$. Проведя параметризацию, находим параметрическое представление функции $a: P(i_1) \times Q(\alpha_1) \rightarrow R$ и уравнение (2.3), задающее множество значений функции $A: [P(i)]^4 \times [Q(\alpha_1)]^2 \rightarrow R^8$, что и составляет содержание случая с) доказываемой теоремы.

При последующих преобразованиях результата (2.39) будем предполагать, что $m \geq 5$. Переставим в уравнении (2.39) элементы l, f :

$$\begin{vmatrix} \{\hat{R}(if) \Delta[(ilw, \alpha)]\}^{-1} & \{\hat{R}(if) \Delta[(ilw, \beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(jf) \Delta[(jlw, \alpha)]\}^{-1} & \{\hat{R}(jf) \Delta[(jlw, \beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(kf) \Delta[(klw, \alpha)]\}^{-1} & \{\hat{R}(kf) \Delta[(klw, \beta)]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.40)$$

Эквивалентные уравнения (2.39) и (2.40) определяют, например, (j, α) как одну и ту же функцию переменной (i, α) , откуда получаем

$$\hat{R}(lf) \frac{\Delta_{(i, \alpha)}[(ifw, \alpha)]}{\{\hat{R}(il) \Delta[(ifw, \alpha)]\}^2} \times \begin{vmatrix} \{\hat{R}(jl) \Delta[(jfw, \beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(kl) \Delta[(kfw, \beta)]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\frac{\Delta_{(j, \alpha)}[(jfw, \alpha)]}{\{\hat{R}(jl) \Delta[(jfw, \alpha)]\}^2} \times \begin{vmatrix} \{\hat{R}(il) \Delta[(ifw, \beta)]\}^{-1} & 1 \\ \{\hat{R}(kl) \Delta[(kfw, \beta)]\}^{-1} & 1 \end{vmatrix}$$

Воспользуемся дополнительно уравнениями (2.39) и (2.40), чтобы исключить из последнего соотношения элемент β :

$$\hat{R}(lf) \{ \Delta_{(i, \alpha)} [(ifw, \alpha)] / \Delta_{(j, \alpha)} [(jfw, \alpha)] \} \times \\ \times \frac{ \{ \hat{R}(jk) \Delta_{[(jfw, \alpha)]} \} \times \{ \hat{R}(jl) \Delta_{[(jfw, \alpha)]} \} }{ \{ \hat{R}(ik) \Delta_{[(ifw, \alpha)]} \} \times \{ \hat{R}(il) \Delta_{[(ifw, \alpha)]} \} } = 0. \quad (2.41)$$

В уравнении (2.41) зафиксируем значение переменных (ijl, α) , вводя удобные обозначения функций A, B, B_1, B_2 :

$$\{ \Delta_{[(kfw, \alpha)]} + B_1[(fw, \alpha)] \} \times \{ A[(kw, \alpha)] + B[(fw, \alpha)] \} = B_2[(fw, \alpha)], \quad (2.42)$$

причем $A_{(k, \alpha)}[(kw, \alpha)] \neq 0, B_2[(fw, \alpha)] \neq 0$.

Перепишем уравнение (2.39), преобразуя очевидным образом определитель третьего порядка в определитель четвертого порядка и используя связь (2.42):

$$\begin{vmatrix} A[(iw, \alpha)] & A[(iw, \beta)] & A[(iw, \alpha)] \times A[(iw, \beta)] & 1 \\ A[(jw, \alpha)] & A[(jw, \beta)] & A[(jw, \alpha)] \times A[(jw, \beta)] & 1 \\ A[(kw, \alpha)] & A[(kw, \beta)] & A[(kw, \alpha)] \times A[(kw, \beta)] & 1 \\ A[(lw, \alpha)] & A[(lw, \beta)] & A[(lw, \alpha)] \times A[(lw, \beta)] & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.43)$$

Соотношение (2.43) в действительности является тождеством, так как отсутствуют переменные (f, α) и (f, β) . Продифференцируем тождество (2.43) последовательно по переменным $(i, \alpha), (i, \beta), (j, \alpha), (j, \beta)$

$$A_{(i, \alpha)}[(iw, \alpha)] \times A_{(j, \alpha)}[(jw, \alpha)] \times A_{(i, \beta)}[(iw, \beta)] \times A_{(k, \beta)}[(kw, \beta)] = 0,$$

хотя, как было установлено выше при получении связи (2.42), производные функции A по первому аргументу отличны от нуля. Выявленное противоречие означает, что нельзя записать уравнение, задающее множество N в случае $m \geq 5, n=2$, т. е. бинарные физические структуры ранга $(m, 2)$ для $m \geq 5$ не существуют. Это утверждение завершает доказательство теоремы.

Поступила в редакцию
28 октября 1976 г.

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Кулаков Ю. И. Элементы теории физических структур. Новосибирск, изд. Новосиб. ун-та, 1968, 3—174.
- ² Кулаков Ю. И. О новом виде симметрии, лежащей в основании физических теорий феноменологического типа. Докл. АН СССР, 201, № 3 (1971), 570—572.
- ³ Кулаков Ю. И. Об одном принципе, лежащем в основании классической физики. Докл. АН СССР, 193, № 1 (1970), 72—75.
- ⁴ Кулаков Ю. И. Математическая формулировка теории физических структур. Сиб. мат. журн., 12, № 5 (1971), 1142—1145.
- ⁵ Михайличенко Г. Г. Бинарная физическая структура ранга (3.2). Сиб. мат. журн., 14, № 5 (1973), 1057—1064.
- ⁶ Михайличенко Г. Г. Об одном функциональном уравнении с двухиндексными переменными. Укр. мат. журн., 25, № 5 (1973), 589—598.
- ⁷ Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М., «Наука», 1968.
- ⁸ Михайличенко Г. Г. Решение функциональных уравнений в теории физических структур. Докл. АН СССР, 206, № 5 (1972), 1056—1058.
- ⁹ Михайличенко Г. Г. Вопросы единственности решения основного уравнения теории физических структур. В кн.: Кулаков Ю. И. Элементы теории физических структур. Новосибирск, изд. Новосиб. ун-та, 1968, 175—226 (Дополнение).