

УДК 512.81

Г. Г. МИХАЙЛИЧЕНКО

ТРЕХМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ

Пуанкаре в своей работе «Об основных гипотезах геометрии» [1], опубликованной в 1887 г., предположил, что «необходимыми и достаточными предварительными допущениями плоской геометрии» являются следующие гипотезы:

А. Плоскость имеет два измерения.

В. Положение плоской фигуры в ее плоскости определяется тремя условиями.

Далее Пуанкаре ставит задачу выяснить, «какие заключения возможно извлечь из двух гипотез А и В». Математически задача состояла в определении всех трехпараметрических групп Ли преобразований плоскости. Опуская подробные выкладки, Пуанкаре приводит четыре различных типа операторов X_1, X_2, X_3 , задающих базис соответствующих трехмерных алгебр Ли. Приведенный список, однако, явно неполон, так как в нем отсутствуют движения сферы, плоскости Лобачевского, однополостного гиперboloида, симплектической плоскости. По-видимому, сам Пуанкаре придавал значение только идейной стороне поставленной задачи. Ее полное решение затруднялось, возможно, тем обстоятельством, что правильная классификация трехмерных вещественных алгебр Ли была дана Бианки только в 1918 г. [2].

Софус Ли нашел все конечномерные группы преобразований плоскости [3], но список трехмерных алгебр у него оказывается почему-то неполным. В частности, отсутствуют алгебры движений плоскости Галилея, антисевдоевклидовой плоскости и некоторые другие. Список всех конечномерных алгебр Ли преобразований плоскости можно найти в монографии [4], но выделение из них всех трехмерных подалгебр связано с «проблемой классификации подалгебр данной алгебры Ли (с точностью до подобия), которая до настоящего времени полного решения не получила» [5, с. 149].

В предлагаемой работе автор находит с точностью до подобия все трехмерные алгебры Ли преобразований (движений) плоскости, решая тем самым полностью задачу, поставленную Пуанкаре [1].

Рассмотрим локальную трехпараметрическую группу Ли локальных преобразований плоскости, задаваемую уравнениями

$$\begin{cases} x' = \lambda(x, y; \alpha, \beta, \gamma), \\ y' = \sigma(x, y; \alpha, \beta, \gamma), \end{cases} \quad (1)$$

где $(x, y) \in U \subset R^2$, $\lambda_x \sigma_y - \lambda_y \sigma_x \neq 0$ и параметры α, β, γ входят существенным образом [6]. Предположим, что нулевым значениям параметров α, β, γ соответствует тождественное преобразование области $U \subset R^2$. Тогда бесконечно малое (инфинитезимальное) преобразование будет

$$\begin{cases} x' = x + \lambda_1(x, y) \alpha + \lambda_2(x, y) \beta + \lambda_3(x, y) \gamma, \\ y' = y + \sigma_1(x, y) \alpha + \sigma_2(x, y) \beta + \sigma_3(x, y) \gamma, \end{cases} \quad (2)$$

где, например, $\lambda_1 = \partial \lambda / \partial \alpha|_{\alpha=\beta=\gamma=0}$.

Операторы X_i , $i = 1, 2, 3$, инфинитезимальных преобразований

$$X_i = \lambda_i(x, y)\partial_x + \sigma_i(x, y)\partial_y, \quad (3)$$

где $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, линейно-независимы и образуют базис трехмерной алгебры Ли с коммутаторами

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k.$$

Структурные константы C_{ij}^k антисимметричны по нижним индексам и удовлетворяют соотношению Якоби:

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k, \\ C_{ij}^l C_{lk}^m + C_{jk}^l C_{li}^m + C_{ki}^l C_{lj}^m = 0.$$

Имеется полная классификация вещественных трехмерных абстрактных алгебр Ли с точностью до изоморфизма (см., например, [2]):

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = 0, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad (4)$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad (5)$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = X_1 + X_2, \quad (6)$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = pX_2, \quad (7)$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad (8)$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = -X_2, \quad (9)$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_2, \quad [X_2, X_3] = -X_1 + qX_2, \quad (10)$$

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_3, X_1] = -X_2, \quad [X_2, X_3] = -X_1, \quad (11)$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_3, X_1] = X_2, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad (12)$$

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_3, X_1] = X_2, \quad [X_2, X_3] = -X_1, \quad (13)$$

где $p \neq 0, 1$, $0 < q^2 < 4$.

Как известно, алгебры Ли называются подобными, если их базисные операторы переходят друг в друга при некоторой невырожденной замене переменных (см. [5, с. 220—221]). Подобные алгебры Ли всегда изоморфны, в то время как изоморфные алгебры могут быть не подобны. Например, алгебры движений плоскости Лобачевского и симплектической плоскости имеют изоморфную структуру (13), но не переходят друг в друга ни при какой замене переменных.

Т е о р е м а. *Базисные векторы (3) трехмерной алгебры Ли локальной группы Ли локальных преобразований плоскости, имеющей структуру (4)—(13), с точностью до подобия задаются следующими выражениями:*

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = \lambda(y)\partial_x, \quad (4.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = -\partial_y, \quad (5.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = y\partial_x + \delta\partial_y, \quad (5.2)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x - \partial_y, \quad (6.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = (x+y)\partial_x + y\partial_y, \quad (6.2)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + y(1-p)\partial_y, \quad (7.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + py\partial_y, \quad (7.2)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y, \quad (8.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + \delta\partial_y, \quad (8.2)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + 2y\partial_y, \quad (9.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x - y\partial_y, \quad (9.2)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = xy\partial_x + (1 - qy + y^2)\partial_y, \quad (10.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + (x + qy)\partial_y, \quad (10.2)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = xy\partial_x + (1 + y^2)\partial_y, \quad (11.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = -y\partial_x + x\partial_y, \quad (11.2)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \operatorname{tg} y \sin x \partial_x + \cos x \partial_y, \\ X_3 &= \operatorname{tg} y \cos x \partial_x - \sin x \partial_y, \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \sin x \partial_x, \quad X_3 = \cos x \partial_x, \quad (13.1)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \sin x \partial_x + \cos x \partial_y, \\ X_3 &= \cos x \partial_x - \sin x \partial_y, \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= -\operatorname{th} y \sin x \partial_x + \cos x \partial_y, \\ X_3 &= -\operatorname{th} y \cos x \partial_x - \sin x \partial_y, \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= -\operatorname{cth} y \sin x \partial_x + \cos x \partial_y, \\ X_3 &= -\operatorname{cth} y \cos x \partial_x - \sin x \partial_y, \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

где $p \neq 0, -1$; $4 > q \neq 0$; $\lambda(y) = ay + b$; δ — любое.

Алгебра (9.2) есть алгебра движений (изометрических преобразований) плоскости Минковского, (11.2) — евклидовой плоскости, (12.1) — двумерной сферы, (13.2) — симплектической плоскости, (13.3) — однополостного двумерного гиперболоида, (13.4) — плоскости Лобачевского, (5.1) — плоскости Галилея, (9.1) — антипсевдоевклидовой плоскости, (11.1) — антиевклидовой плоскости и т. д. Приведенные в теореме результаты исчерпывают все возможные трехмерные алгебры Ли движений в плоских геометриях, удовлетворяющих двум гипотезам Пуанкаре и включающих в себя, как частный случай, девять геометрий Кэли — Клейна [7].

Осуществим в преобразованиях (1) замену переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad (14)$$

где $\varphi_x \psi_y - \varphi_y \psi_x \neq 0$. В переменных ξ, η для инфинитезимальных операторов (3) будем иметь выражения

$$X_i = (\lambda_i \varphi_x + \sigma_i \varphi_y) \partial_\xi + (\lambda_i \psi_x + \sigma_i \psi_y) \partial_\eta. \quad (15)$$

Если функции φ и ψ являются некоторыми решениями уравнений

$$\varphi_x(x, y) \lambda_1(x, y) + \varphi_y(x, y) \sigma_1(x, y) = 1,$$

$$\psi_x(x, y) \lambda_1(x, y) + \psi_y(x, y) \sigma_1(x, y) = 0,$$

в которых, очевидно, $\lambda_1^2 + \sigma_1^2 \neq 0$, так как операторы (3) линейно-независимы, то для оператора X_1 получим максимально простое выражение $X_1 = \partial_\xi$. Возвращаясь к прежним обозначениям переменных и коэффициентов, можем записать:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \lambda_2(x, y) \partial_x + \sigma_2(x, y) \partial_y, \\ X_3 &= \lambda_3(x, y) \partial_x + \sigma_3(x, y) \partial_y, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

т. е. $\lambda_1(x, y) = 1, \sigma_1(x, y) = 0$.

Заметим, что операторы (16), как легко проверить, допускают замену переменных

$$\xi = x + \varphi(y), \quad \eta = \psi(y), \quad (17)$$

сохраняющую за X_1 максимально простую форму.

По классификации (4) — (13) коммутатор $[X_1, X_2]$ либо равен нулю, либо совпадает с оператором X_3 . Рассмотрим сначала первый случай:

$$[X_1, X_2] = 0. \quad (18)$$

Подставим в условие (18) операторы (16):

$$\lambda_{2x}(x, y)\partial_x + \sigma_{2x}(x, y)\partial_y = 0,$$

откуда следует, что $\lambda_{2x}(x, y) = 0$, $\sigma_{2x}(x, y) = 0$, т. е. $\lambda_2(x, y) = \lambda(y)$, $\sigma_2(x, y) = \sigma(y)$, и потому

$$X_2 = \lambda_2(y)\partial_x + \sigma_2(y)\partial_y.$$

В последнем результате осуществим замену переменных (17):

$$X_2 = [\lambda_2(y) + \sigma_2(y)\varphi'(y)]\partial_\xi + \sigma_2(y)\psi'(y)\partial_\eta.$$

Если $\sigma_2(y) = 0$, то $X_2 = \lambda_2(y)\partial_\xi$, причем $\lambda_2(y) \neq \text{const}$, так как операторы X_1 , X_2 линейно-независимы. Пусть функция $\psi(y)$ удовлетворяет уравнению $\lambda_2[\psi^{-1}(\eta)] = \eta$. Тогда, возвращаясь к прежним обозначениям переменных, получаем выражения

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= y\partial_x, \\ X_3 &= \lambda_3(x, y)\partial_x + \sigma_3(x, y)\partial_y, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

сохраняющие свою форму при замене

$$\xi = x + \varphi(y), \quad \eta = y. \quad (20)$$

Если же $\sigma_2(y) \neq 0$, то пусть функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$ являются решениями уравнений $\lambda_2(y) + \sigma_2(y)\varphi'(y) = 0$, $\sigma_2(y)\psi'(y) = 1$. В этом случае будем иметь выражения

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y, \\ X_3 &= \lambda_3(x, y)\partial_x + \sigma_3(x, y)\partial_y, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

сохраняющиеся при замене переменных

$$\xi = x + a, \quad \eta = y + b. \quad (22)$$

Предположим, что операторы (19), (21) удовлетворяют дополнительно коммутационному соотношению

$$[X_3, X_1] = 0. \quad (23)$$

Подставим в условие (23) сначала операторы (19):

$$-\lambda_{3x}(x, y)\partial_x - \sigma_{3x}(x, y)\partial_y = 0,$$

откуда следует $\lambda_{3x}(x, y) = 0$, $\sigma_{3x}(x, y) = 0$, т. е. $\lambda_3(x, y) = \lambda(y)$, $\sigma_3(x, y) = \sigma(y)$, и потому

$$X_3 = \lambda(y)\partial_x + \sigma(y)\partial_y. \quad (24)$$

В полученном выражении для X_3 произведем замену переменных (20):

$$X_3 = [\lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y)]\partial_\xi + \sigma(y)\partial_\eta.$$

Если $\sigma(y) = 0$, то $X_3 = \lambda(\eta)\partial_\xi$, где $\lambda(\eta)$ есть произвольная нелинейная функция одной переменной, так как операторы X_1 , X_2 , X_3 в (19) линейно-независимы. Если же $\sigma(y) \neq 0$, то функцию $\varphi(y)$ можно взять из решений уравнения $\lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y) = 0$, и тогда $X_3 = \sigma(\eta)\partial_\eta$ при произвольной функции $\sigma(y)$, отличной от нуля. Возвращаясь к прежним обозначениям переменных, можем записать:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = \lambda(y)\partial_x, \quad (25)$$

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = \sigma(y)\partial_y, \quad (26)$$

где $\lambda(y) \neq ay + b$, $\sigma(y) \neq 0$.

При подстановке операторов (21) в коммутационное условие (23) аналогично предыдущему получаем выражение (24), т. е.

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, & X_2 &= \partial_y, \\ X_3 &= \lambda(y)\partial_x + \sigma(y)\partial_y, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

причем $\lambda(y)$ и $\sigma(y)$ не обращаются одновременно в константы. Заметим также, что выражения (27) сохраняются при замене переменных (22).

Выясним теперь, какие возникают дополнительные ограничения на операторы (25)–(27), если третий коммутатор обращается в нуль:

$$[X_2, X_3] = 0. \quad (28)$$

Для операторов (25) условие (28) выполняется всегда при любой функции $\lambda(y)$. Для операторов (26) имеем $[X_2, X_3] = -\sigma(y)\partial_x \neq 0$, так как $\sigma(y) \neq 0$. Для операторов (27) получаем $[X_2, X_3] = \lambda'(y)\partial_x + \sigma'(y)\partial_y \neq 0$, так как функции $\lambda(y)$ и $\sigma(y)$ не есть одновременно постоянные.

Таким образом, условие (28) выполняется только для операторов (25), которые и образуют базис (4.1) трехмерной абелевой алгебры Ли.

Пусть, далее, операторы (26), (27) удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[X_2, X_3] = X_1. \quad (29)$$

Для операторов (26) из соотношения (29) получаем $\sigma(y) = -1$, т. е. $X_3 = -\partial_y$. Из этого же соотношения для операторов (27) находим $\lambda'(y) = 1$, $\sigma'(y) = 0$, откуда $\lambda(y) = y + b$, $\sigma(y) = \delta = \text{const}$, и потому $X_3 = (y + b)\partial_x + \delta\partial_y$, где δ — произвольная постоянная. Допустимой заменой переменных (22) можно исключить слагаемое b . В результате из выражений (26), (27) получаем базисы (5.1) и (5.2) двух трехмерных алгебр Ли с коммутационными соотношениями (5). Заметим, что эти алгебры изоморфны, но не подобны [5, с. 220–221], так как их базисы (5.1) и (5.2) не переходят друг в друга ни при какой замене координат (14).

Предположим, что операторы (19), (21), удовлетворяющие условию (18), подчиняются дополнительно коммутационному соотношению

$$[X_3, X_1] = -X_1. \quad (30)$$

Для операторов (19) из соотношения (30) получаем

$$-\lambda_{3x}(x, y)\partial_x - \sigma_{3x}(x, y)\partial_y = -\partial_x,$$

т. е. $\lambda_{3x}(x, y) = 1$, $\sigma_{3x}(x, y) = 0$, откуда после интегрирования $\lambda_3(x, y) = x + \lambda(y)$, $\sigma_3(x, y) = \sigma(y)$, и потому

$$X_3 = [x + \lambda(y)]\partial_x + \sigma(y)\partial_y. \quad (31)$$

Произведем замену переменных (20):

$$X_3 = [x + \lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y)]\partial_\xi + \sigma(y)\partial_\eta,$$

и если функцию $\varphi(y)$ взять из решений уравнения $-\varphi(y) + \lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y) = 0$, то для оператора X_3 получим более простое выражение: $X_3 = \xi\partial_\xi + \sigma(\eta)\partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям переменных, можем записать:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = x\partial_x + \sigma(y)\partial_y. \quad (32)$$

Операторы (19), (21) отличаются только выражением для оператора X_2 , который отсутствует в условии (30). Поэтому, подставляя операторы (21) в условие (30), приходим к прежнему результату (31). В итоге получаем

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = [x + \lambda(y)]\partial_x + \sigma(y)\partial_y \quad (33)$$

с допустимой заменой переменных (22).

Операторы (32), (33) удовлетворяют двум условиям коммутирования (18) и (30). Пусть имеет место третье условие

$$[X_2, X_3] = X_1 + X_2. \quad (34)$$

Для операторов (32) это означает

$$[y - \sigma(y)]\partial_x = (1 + y)\partial_y,$$

т. е. $\sigma(y) = -1$. В результате получаем базис (6.1) с коммутаторами (6).

Подставим теперь в условие (34) операторы (33):

$$\lambda'(y)\partial_x + \sigma'(y)\partial_y = \partial_x + \partial_y,$$

т. е. $\lambda'(y) = 1$, $\sigma'(y) = 1$, а после интегрирования $\lambda(y) = y + \tilde{a}$, $\sigma(y) = y + \tilde{b}$, и потому $X_3 = (x + y + \tilde{a})\partial_x + (y + \tilde{b})\partial_y$. Постоянные $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ в полученном выражении для X_3 можно исключить заменой переменных (22). В итоге приходим к базису (6.2) трехмерной алгебры Ли с коммутаторами (6), которая изоморфна, но не подобна алгебре Ли с базисом (6.1).

Предположим теперь, что операторы (32), (33) удовлетворяют другому (третьему) условию коммутирования:

$$[X_2, X_3] = pX_2, \quad (35)$$

где $p \neq 0, -1$.

Для операторов (32) из условия (35) имеем

$$[y - \sigma(y)]\partial_x = py\partial_y,$$

т. е. $\sigma(y) = (1 - p)y$. В результате получаем базисные операторы (7.1) трехмерной алгебры Ли с коммутаторами (7).

Подставим в условие (35) операторы (33):

$$\lambda'(y)\partial_x + \sigma'(y)\partial_y = p\partial_y,$$

т. е. $\lambda'(y) = 0$, $\sigma'(y) = p$. После интегрирования получаем $\lambda(y) = \tilde{a}$, $\sigma(y) = py + \tilde{b}$, и потому $X_3 = (x + \tilde{a})\partial_x + (py + \tilde{b})\partial_y$. Поскольку $p \neq 0$, постоянные $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ можно исключить допустимой заменой переменных (22): $\xi = x + \tilde{a}$, $\eta = y + \tilde{b}/p$, после чего приходим к базису (7.2) трехмерной алгебры Ли с коммутаторами (7). Аналогично предыдущему, алгебры с базисами (7.1) и (7.2) изоморфны, но не подобны.

Заметим, что при получении операторов (7.1) ограничение $p \neq 0, -1$ не было использовано, но выражение для X_3 в базисе (7.2) упрощалось заменой $\xi = x + \tilde{a}$, $\eta = y + \tilde{b}/p$, в которой необходимо должно быть $p \neq 0$. Поэтому базисные векторы (8.1) и (8.2) трехмерных неподобных алгебр Ли с коммутаторами (8) можно получить из базиса (7.1) и базиса (7.2) до упрощения, полагая в них $p = 0$ и производя во втором базисе замену переменных $\xi = x + \tilde{a}$, $\eta = y$. Если же в операторах (7.1), (7.2) положить $p = 1$, то придем к базисам (9.1), (9.2) трехмерных алгебр Ли с коммутаторами (9).

Будем теперь предполагать, что операторы (19), (21) удовлетворяют условию

$$[X_3, X_1] = -X_2. \quad (36)$$

Для выражений (19) это означает:

$$-\lambda_{3x}(x, y)\partial_x - \sigma_{3x}(x, y)\partial_y = -y\partial_x,$$

т. е. $\lambda_{3x}(x, y) = y$, $\sigma_{3x}(x, y) = 0$, откуда после интегрирования $\lambda_3(x, y) = xy + \lambda(y)$, $\sigma_3(x, y) = \sigma(y)$, и потому

$$X_3 = [xy + \lambda(y)]\partial_x + \sigma(y)\partial_y.$$

Произведем замену переменных (20)

$$X_3 = [xy + \lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y)]\partial_\xi + \sigma(y)\partial_\eta$$

и функцию $\varphi(y)$ возьмем из решений уравнения $-y\varphi(y) + \lambda(y) + \sigma(y)\varphi'(y) = 0$. Тогда для оператора X_3 будем иметь более простое выражение: $X_3 = \xi\eta\partial_\xi + \sigma(\eta)\partial_\eta$. Возвращаясь к прежним обозначениям пе-

ременных, получаем

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x, \quad X_3 = xy\partial_x + \sigma(y)\partial_y. \quad (37)$$

Подставим теперь в условие (36) операторы (24):

$$-\lambda_{3x}(x, y)\partial_x - \sigma_{3x}(x, y)\partial_y = -\partial_y,$$

т. е. $\lambda_{3x}(x, y) = 0$, $\sigma_{3x}(x, y) = 1$, откуда после интегрирования $\lambda_3(x, y) = \lambda(y)$, $\sigma_3(x, y) = x + \sigma(y)$, и потому

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \lambda(y)\partial_x + [x + \sigma(y)]\partial_y \quad (38)$$

с допустимой заменой переменных (22).

Пусть, далее, операторы (37), (38), удовлетворяющие двум условиям коммутирования (18), (36), подчиняются дополнительно третьему

$$[X_2, X_3] = -X_1 + qX_2, \quad (39)$$

где $4 > q^2 > 0$.

Для операторов (37) в этом случае имеем

$$[y^2 - \sigma(y)]\partial_x = (-1 + qy)\partial_x,$$

т. е. $\sigma(y) = 1 - qy + y^2$, и мы приходим к базису (10.1) трехмерной алгебры Ли с коммутаторами (10).

Подставим в условие (39) операторы (38):

$$\lambda'(y)\partial_x + \sigma'(y)\partial_y = -\partial_x + q\partial_y,$$

т. е. $\lambda'(y) = -1$, $\sigma'(y) = q$, откуда после интегрирования $\lambda(y) = -y + \tilde{a}$, $\sigma(y) = qy + \tilde{b}$, и потому $X_3 = (-y + \tilde{a})\partial_x + (x + qy + \tilde{b})\partial_y$. Постоянные $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ в выражении для X_3 можно исключить заменой переменных (22): $\xi = x + q\tilde{a} + \tilde{b}$, $\eta = y - \tilde{a}$. В результате получаем базис (10.2) трехмерной алгебры Ли с коммутаторами (10).

Заметим, что в предыдущих рассуждениях ограничение $q \neq 0$ в условии (39) не было использовано. Поэтому, полагая в выражениях (10.1) и (10.2) $q = 0$, получаем базисы (11.1) и (11.2) двух изоморфных, но не подобных трехмерных алгебр Ли с коммутаторами (11).

Выше был полностью рассмотрен случай (18), когда по классификации (4)–(13) первый коммутатор $[X_1, X_2]$ обращается в нуль. Перейдем к рассмотрению другого возможного случая, когда первый коммутатор $[X_1, X_2]$ отличен от нуля:

$$[X_1, X_2] = X_3. \quad (40)$$

Подставим в условие (40) операторы (16), опустив для простоты индекс «3» в операторе X_3 :

$$\lambda_{2x}(x, y)\partial_x + \sigma_{2x}(x, y)\partial_y = \lambda(x, y)\partial_x + \sigma(x, y)\partial_y,$$

т. е. $\lambda_{2x}(x, y) = \lambda(x, y)$, $\sigma_{2x}(x, y) = \sigma(x, y)$, откуда после интегрирования $\lambda_2(x, y) = \int \lambda(x, y) dx$, $\sigma_2(x, y) = \int \sigma(x, y) dx$, и потому

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \left(\int \lambda(x, y) dx \right) \partial_x + \left(\int \sigma(x, y) dx \right) \partial_y, \\ X_3 &= \lambda(x, y) \partial_x + \sigma(x, y) \partial_y. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Пусть для операторов (41) выполняется дополнительно условие

$$[X_3, X_1] = X_2, \quad (42)$$

откуда, находим

$$-\lambda_x(x, y) \partial_x - \sigma_x(x, y) \partial_y = \left(\int \lambda(x, y) dx \right) \partial_x + \left(\int \sigma(x, y) dx \right) \partial_y$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x(x, y) + \int \lambda(x, y) dx &= 0, \\ \sigma_x(x, y) + \int \sigma(x, y) dx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Дополнительное дифференцирование по переменной x превращает полученные интегро-дифференциальные уравнения (43) в линейные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{xx}(x, y) + \lambda(x, y) &= 0, \\ \sigma_{xx}(x, y) + \sigma(x, y) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение этих уравнений хорошо известно:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(x, y) &= \lambda(y) \sin x + \mu(y) \cos x, \\ \sigma(x, y) &= \sigma(y) \sin x + \nu(y) \cos x, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

где функции $\lambda(y)$, $\mu(y)$, $\sigma(y)$, $\nu(y)$ произвольны, но не обращаются в нуль одновременно.

Подставим решения (44) в операторы (41), используя также исходные интегро-дифференциальные уравнения (43):

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= [-\lambda(y) \cos x + \mu(y) \sin x] \partial_x + [-\sigma(y) \cos x + \nu(y) \sin x] \partial_y, \\ X_3 &= [\lambda(y) \sin x + \mu(y) \cos x] \partial_x + [\sigma(y) \sin x + \nu(y) \cos x] \partial_y. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Произведем в операторах (45) допустимую замену переменных (17). При этом получим $X_1 = \partial_\xi$,

$$\begin{aligned} X_2 &= \{ -[(\lambda(y) + \varphi'(y)\sigma(y)) \cos \varphi(y) + (\mu(y) + \varphi'(y)\nu(y)) \sin \varphi(y)] \cos \xi - \\ &\quad - [(\lambda(y) + \varphi'(y)\sigma(y)) \sin \varphi(y) - (\mu(y) + \varphi'(y)\nu(y)) \cos \varphi(y)] \sin \xi \} \partial_\xi - \\ &\quad - \{ \psi'(y) [\sigma(y) \cos \varphi(y) + \nu(y) \sin \varphi(y)] \cos \xi + \\ &\quad + \psi'(y) [\sigma(y) \sin \varphi(y) - \nu(y) \cos \varphi(y)] \sin \xi \} \partial_\eta \end{aligned}$$

и аналогично для X_3 .

Пусть функция $\varphi(y)$ является решением уравнения

$$[\lambda(y) + \varphi'(y)\sigma(y)] \cos \varphi(y) + [\mu(y) + \varphi'(y)\nu(y)] \sin \varphi(y) = 0.$$

Если при этом функции $\sigma(y)$ и $\nu(y)$ обращаются в нуль, то, возвращаясь к прежним обозначениям, получаем

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \mu(y) \sin x \partial_x, \quad X_3 = \mu(y) \cos x \partial_x. \quad (46)$$

Если же хотя бы одна из функций $\sigma(y)$, $\nu(y)$ отлична от нуля и при этом $\sigma(y) \cos \varphi(y) + \nu(y) \sin \varphi(y) \neq 0$, то вторую функцию $\psi(y)$ выберем из решений уравнения $\psi'(y) [\sigma(y) \cos \varphi(y) + \nu(y) \sin \varphi(y)] = -1$. Тогда в прежних обозначениях можем записать:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \mu(y) \sin x \partial_x + (\cos x + \nu(y) \sin x) \partial_y, \\ X_3 &= \mu(y) \cos x \partial_x + (-\sin x + \nu(y) \cos x) \partial_y. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Если, наконец, при $\sigma^2(y) + \nu^2(y) \neq 0$ будет $\sigma(y) \cos \varphi(y) + \nu(y) \sin \varphi(y) = 0$, то должна быть $\sigma(y) \sin \varphi(y) - \nu(y) \cos \varphi(y) \neq 0$. Функцию $\psi(y)$ возьмем из решений уравнения $\psi'(y) [\sigma(y) \sin \varphi(y) - \nu(y) \cos \varphi(y)] = -1$. И тогда в прежних обозначениях получаем выражения для операторов X_1 , X_2 , X_3 :

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \mu(y) \sin x \partial_x + \sin x \partial_y, \\ X_3 &= \mu(y) \cos x \partial_x + \cos x \partial_y. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Будем ниже предполагать, что операторы (46)–(48) удовлетворяют дополнительно условию

$$[X_2, X_3] = X_1. \quad (49)$$

Подставим в условие (49) операторы (46):

$$-\mu^2(y)\partial_x = \partial_x,$$

т. е. $\mu^2(y) = -1$, что невозможно, так как функция $\mu(y)$ вещественна.

Для операторов (47) условие (49) означает:

$$[\mu'(y) - \mu^2(y)]\partial_x + [\nu'(y) - \mu(y)\nu(y)]\partial_y = \partial_x,$$

откуда получаем связь

$$\nu'(y) - \mu(y)\nu(y) = 0. \quad (50)$$

Произведем в выражениях (47) замены переменных (17):

$$\begin{aligned} X_2 = & \{[\varphi'(y) \cos \varphi(y) - (\mu(y) + \varphi'(y)\nu(y)) \sin \varphi(y)] \cos \xi + \\ & + [\varphi'(y) \sin \varphi(y) + (\mu(y) + \varphi'(y)\nu(y)) \cos \varphi(y)] \sin \xi\} \partial_\xi + \\ & + \{\psi'(y)[\cos \varphi(y) - \nu(y) \sin \varphi(y)] \cos \xi + \\ & + \psi'(y)[\sin \varphi(y) + \nu(y) \cos \varphi(y)] \sin \xi\} \partial_\eta \end{aligned}$$

и аналогично для X_3 .

Пусть функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ являются решениями следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \sin \varphi(y) + \nu(y) \cos \varphi(y) &= 0, \\ \psi'(y)[\cos \varphi(y) - \nu(y) \sin \varphi(y)] &= 1. \end{aligned}$$

При этом, как легко проверить, с учетом связи (50) имеет место уравнение

$$\varphi'(y) \cos \varphi(y) - [\mu(y) + \varphi'(y)\nu(y)] \sin \varphi(y) = 0.$$

Возвращаясь после замены (17) к прежним обозначениям функций и переменных, вместо (47) можем записать более простые выражения:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \\ X_2 &= \mu(y) \sin x \partial_x + \cos x \partial_y, \\ X_3 &= \mu(y) \cos x \partial_x - \sin x \partial_y. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Подставим операторы (51) в условие (49):

$$[\mu'(y) - \mu^2(y)]\partial_x = \partial_x,$$

откуда получаем уравнение

$$\mu'(y) - \mu^2(y) = 1,$$

которое имеет единственное решение: $\mu(y) = \operatorname{tg}(y + \tilde{b})$. Постоянную $\tilde{b}$ в выражениях (51) можно исключить заменой переменных $\xi = x$, $\eta = y + \tilde{b}$. В результате приходим к базису (12.1) трехмерной алгебры Ли с коммутаторами (12).

Подставим, наконец, в условие (49) операторы (48):

$$-\mu^2(y)\partial_x - \mu(y)\partial_y = \partial_x,$$

откуда получаем противоречие: $\mu^2(y) = -1 \neq 0$ и $\mu(y) = 0$, т. е. выражения (48) не могут удовлетворять условию (49).

Пусть в заключение операторы (46)–(48) удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[X_2, X_3] = -X_1. \quad (52)$$

Для операторов (46) это означает

$$-\mu^2(y)\partial_x = -\partial_x,$$

т. е. $\mu^2(y) = 1$ и, следовательно, $\mu(y) = \pm 1$. При $\mu(y) = +1$ получаем базис (13.1) трехмерной алгебры Ли с коммутаторами (13). Если же $\mu(y) = -1$, то, произведя замену переменных $\xi = x + \pi$, $\eta = y$, возвращаемся к тому же базису (17.1).

Подставим теперь в условие (52) операторы (47):

$$[\mu'(y) - \mu^2(y)]\partial_x + [\nu'(y) - \mu(y)\nu(y)]\partial_y = -\partial_x,$$

откуда получаем снова связь (50) и после замены переменных (17) более простые выражения (51).

Операторы (51) подставим в условие (52):

$$[\mu'(y) - \mu^2(y)]\partial_x = -\partial_x,$$

откуда получаем уравнение

$$\mu'(y) - \mu^2(y) = -1, \quad (53)$$

которое имеет три решения: $\mu(y) = \pm 1$, $\mu(y) = -\text{th}(y + \tilde{b})$, $\mu(y) = -\text{cth}(y + \tilde{b})$. При $\mu(y) = +1$ получаем из выражений (51) базис (13.2) трехмерной алгебры Ли с коммутаторами (13). Если же $\mu(y) = -1$, то, производя замену переменных $\xi = x + \pi$, $\eta = -y$ в операторах (51), возвращаемся к базису (19.2). И, наконец, подставляя второе и третье решения уравнения (53) в операторы (51), получаем соответственно базисы (13.3) и (13.4) двух трехмерных алгебр Ли с коммутаторами (13). Постоянная $\tilde{b}$ при этом исключается заменой переменных $\xi = x$, $\eta = y + \tilde{b}$. Заметим, что все четыре алгебры (13.1)–(13.4) изоморфны, так как их коммутаторы совпадают, но не подобны.

Легко проверить, что операторы (48) не удовлетворяют условию (52), так как при их подстановке в это условие возникает противоречие: $\mu^2(y) = 1 \neq 0$ и $\mu(y) = 0$ одновременно.

Произведем в операторах (13.2)–(13.4) замены переменных:

$$\xi = \sin x / (\cos x + 1), \quad \eta = e^y / (\cos x + 1); \quad \xi = \sin x / (\cos x - \text{th } y),$$

$$\eta = 1 / \text{ch } y (\cos x - \text{th } y); \quad \xi = \sin x / (\cos x - \text{cth } y), \quad \eta = 1 / \text{sh } y (\cos x - \text{cth } y)$$

соответственно. В результате получаем единообразную запись после возвращения к прежним обозначениям переменных:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2} (1 + x^2 + \delta y^2) \partial_x + x y \partial_y, \\ X_2 &= x \partial_x + y \partial_y, \\ X_3 &= \frac{1}{2} (1 - x^2 - \delta y^2) \partial_x - x y \partial_y, \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

где $\delta = 0$ для (13.2), $\delta = +1$ для (13.3) и $\delta = -1$ для (13.4).

Автор выражает благодарность С. Ю. Прищепиону за полезные обсуждения.

Новосибирск,
Новосибирский педагогический институт

Статья поступила
13 октября 1980 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пуанкаре А. Об основных гипотезах геометрии. — В кн.: Об основаниях геометрии. М.: Гостехиздат, 1965, с. 388—398.
2. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.
3. Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen, Bd 3, Leipzig: Teubner, 1893.
4. Чеботарев Н. Г. Теория группы Ли. М.: Гостехиздат, 1940.
5. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. М.: ИЛ, 1947.
7. Яглом И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М.: Наука, 1969.